民國叢書


数字图书馆推广工程
DIGITAL LIBRARY PROMOTION PROJECT




数字图书馆推广工程
DIGITAL LIBRARY PROMOTION PROJECT

民國叢書

第二編

·89·

科學技術史類

中算史論叢

李儼著



上海書店


数字图书馆推广工程
DIGITAL LIBRARY PROMOTION PROJECT

中算史論叢

（一）

李儼著





序

年來研治中算史，其論文之發表於各雜誌者，計有十餘篇.意在廣徵海內明達之見，俾獲折衷之說.惟各文刻非一時，收集爲難.而初稿遺譌及印刷錯誤之處，又往往而有.茲特輯錄成册，以便就正當世.此册所收者，計有下列各篇：

中算家之 Pythagoras 定理研究（學藝雜誌第八卷第二號，十五年十月，第一至二七頁）；重差術源流及其新註（學藝雜誌第七卷第八號，十五年四月，第一至一五頁）；大衍求一術之過去與未來（學藝雜誌第七卷第二號，十四年九月，第一至四五頁）；敦煌石室「算書」（中大季刊第一卷第二號，十五年六月，第一至四頁）；明代算學書志（圖書館學季刊第一卷第四期，十五年十二月，第六六七至六八二頁）；明清之際西算輸入中國年表（圖書館學季刊第二卷第一期，十六年十二月，第一至三四頁）；對數之發明及其東來（科

學雜誌第十二卷第二號,第三號,第六號,十六年二月,三月,六月,第一〇九至一五八頁,第二八五至三二五頁,第六八九至七〇〇頁);中算輸入日本之經過(東方雜誌第二二卷第一八號,十四年九月,第八二至八八頁);梅文鼎年譜(清華學報第二卷第二期十四年十二月,第六〇九至六三四頁).

中華民國十七年二月十日

李儼記於靈寶



目次

中算家之 Pythagoras 定理研究 …………………… 1
重差術源流及其新註 …………………………………… 39
大衍求一術之過去與未來 ………………………… 61
敦煌石室「算書」………………………………………… 123
明代算學書志 ……………………………………………… 129
明清之際西算輸入中國年表 ………………………… 149
對數之發明及其東來 ………………………………… 195
中算輸入日本之經過 ………………………………… 349
梅文鼎年譜 ………………………………………………… 363

目次

中國數學史導言 …… 1
中算史之工作 …… 41
二十年來中算史料之發見 …… 63
二十年來中算史論文目錄 …… 77
永樂大典算書 …… 83
宋楊輝算書考 …… 93
東方圖書館善本算書解題 …… 121
明清算家之割圜術研究 …… 129
李善蘭年譜 …… 435

目次

1. 九章算術補註……………………………………1

2. 孫子算經補註……………………………………11

3. 籌算制度考……………………………………29

4. 珠算制度考……………………………………37

5. 中算家之縱橫圖(Magic Squares)研究……59

6. 中算家之Pascal三角形研究………………111

7. 中算家之方程論……………………………127

8. 中算家之級數論……………………………197

9. 三角術及三角函數表之東來………………323

中算家之Pythagoras定理研究

目 次

1. Pythagoras 定理本事。

2. 周髀算經與 Pythagoras 定理。

3. 九章算經與 Pythagoras 定理。

4. 句股方圓圖注。

5. 劉徽九章注。

6. 漢唐算家之論述。

7. 宋元算家之論述。

8. 明清算家之論證上。

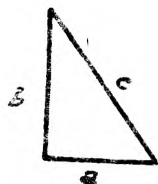
9. 明清算家之論證下。

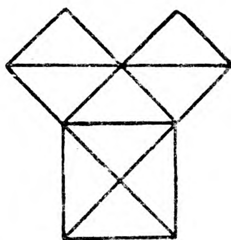
10. 餘論。

1. Pythagoras定理本事

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 定理者,句冪股冪合成弦冪,如圖句 $=a$, 股 $=b$, 弦 $=c$,則 $a^2+b^2=c^2$ 是也.德國數學史家 Mortitz Cantor 在所著 Vorlesungen über

Geschichte der Mathematik, Vol. I (三版), Leipzig, 1907, p. 108 謂埃及於公元二千年前已知正三角形句股弦之比爲 $a:b:c=3:4:5$. Pythagoras (公元前 580?－500?) 生於希臘薩摩斯 (Samos), 曾遊埃及, 其 $a:b:c=3:4:5$ 之說或亦得諸埃及. 嘗立學校於南意大利之克洛吞(Croton), 後爲政客所忌, 逃亡而被殺於麥塔逢坦 (Metapotum). Pythagoras 氏定理證法今已無傳, 或以爲如右圖以等邊三角爲計算. 至幾何原本之證法, 則出於歐幾里(Euclid). 希臘以後證此定理實繁有人. 其詳可觀 Joh. Jos. Jgn. Hoffmann, Der Pythagoräische Lehrsatz mit zwey und dreysig theils bekannten, theils neuen Beweisen. Mainz, 1819, 及 Jury Wipper, Sechsundvierzig Beweisen des Pythagoräischen Lehrsatzes. Aus dem Russischen von F. Graap, Leipzig, 1800. 而收羅較富, 則爲 F. Yanney 及 J. A. Calderhead 見於 Am. Math. Monthly, Vols. 3 及 4, 1896 及 1897 者. 北京高師數理雜誌第二卷第一至四號(1920－1921)





王邦珍君「Pythagoras定理之證明」一文,亦載有六十法,惜於吾國算家對此定理之研究,未嘗收錄.此篇之作,則介紹國中研究此定理之經過耳.

2. 周髀算經與Pythagoras定理

周髀算經約為戰國前著作,其原因茲不具述,僅言其與Pythagoras定理之關係.按周髀本文:「商高曰,數之法出於圓方,圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一.故折矩以為句廣三,股修四,徑隅五,既方其外半之一矩,環而共盤得成三,四,五.兩矩共長二十有五,是謂積矩,……」.此言$a:b:c=3:4:5$也.又曰:「周髀長八尺,夏至之日晷一尺六寸,髀者股也,正晷者句也,……故以句為首,以髀為股,……若求邪至日者,以日下為句,日高為股,句股各自乘,幷而開方除之,得邪至日,從髀所旁至日所十萬里」,此言$c=\sqrt{a^2+b^2}$,即$a^2+b^2=c^2$也.又曰:「法曰周髀長八尺,句之損益寸千里,……榮方曰,周髀者何?陳子曰,古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀.」關於周髀二字之考據,大都以髀為股.如廣韻卷三,紙第四,「髀股也,又步米切」,唐·房玄齡晉書卷十一,「髀股也,股者表也」,唐·長孫無忌隋書卷十九,亦言「髀股

也,股者表也」,說文段注,「股髀也,又曰髀骨猶言股骨」是也.日本飯島忠夫支那古代史論第七章(1925)因鄭玄注儀禮聘禮「宮必有碑,所以識日景引陰陽也」,謂碑與髀通.惟漢·劉熙釋名「釋典藝第二十」明言「碑,被也.此本王莽時所設也,施其轆轤,以繩被其上,以引棺也,……」,似此則飯島之說不能成立.至周之爲解則周髀本文明言「古時天子治周,此數望之從周,故曰周髀」,唐·房玄齡晉書,唐·長孫無忌隋書并言「其本庖犧氏立周天曆度,其所傳則周公受於殷商,周人志之,故曰周髀」,宋李籍周髀算經音義稱「周天曆度,本庖犧氏立法,其傳自周公受之於大夫商高,故曰周髀」,宋·陳振孫直齋書錄解題卷十二「曆象類」周髀算經二卷,音義一卷條下稱「周髀者蓋天之書也,稱周公受之商高,而以句股爲術,故曰周髀」,此一說也.亦有以周爲環,如唐·房玄齡晉書,及宋·李籍周髀算經音義并言「……每衡周經里數,各依算術用句股重差,推晷影極游,以爲遠近之數,皆得於表股者也,故曰周髀.」清·陳杰算法大成上編(1844金望欣序)卷二「句股」稱「句股之法,始於周髀算經……周,環也,髀

股也,環其股以爲法,遂名爲句股云,[句者曲也……]」.此又一說也.

3. 九章算經與Pythagoras定理.

九章算經所述Pythagoras定理問題見卷九句股章.清·陳杰以爲句股出於周髀說見前節.漢·鄭玄釋周禮地官保氏九數云:「九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股」,此言漢時有重差,夕桀,句股各術,即九章算經卷九句股章亦爲漢時所增也.魏·劉徽注九章於句股稱「短面曰句,長面曰股,相與結角曰弦,句短其股,股短其弦,將以施於諸率,故先具此術以見其源也.」,宋·李籍九章算術音義句股注稱「句短面也,股長面也,短長相推以求其弦,故曰句股」,九章本文句股「術曰,句股各自乘,幷而開方除之,即弦」,即 $c=\sqrt{a^2+b^2}$, 由此化得 $a=\sqrt{c^2-b^2}$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$, $\frac{a^2}{c-b}=c+b$, $\frac{b^2}{c-a}=c+a$, 四式,其餘和較雜糅,則未及也.至句股弦相與之率,於 $3^2+4^2=5^2$ 外,幷知 $5^2+12^2=13^2$, $7^2+24^2=25^2$, $8^2+15^2=17^2$, $20^2+21^2=29^2$ 焉.劉徽圖注,僅存其注,舊圖已佚.

九章又言帶從開方,如第二十問爲 $x^2+(14+20)$

$x=2(1775\times 20)$是也.

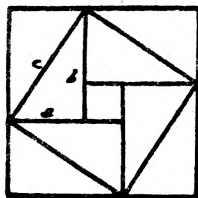
4. 句股方圓圖注.

趙爽字君卿一曰名嬰,宋·李籍謂「不詳何代人」,宋·鮑澣之疑為「魏,晉之間人」,清·阮元因「今本周髀算經題」云漢·趙君卿注,故系於漢代,日本三上義夫因其周髀注有法出九章之語,知其習知九章算經之法.玆將其「句股方圓圖注」分左右兩列解釋如下.

「趙君卿曰,句股各自乘,併之,為弦實,開方除之,即弦也.」

令$a=$句,$b=$股,$c=$弦,如題意

$$a^2+b^2=c^2,\ c=\sqrt{a^2+b^2},\cdots(1)$$



(弦圖)

「案弦圖,又可以句股相乘為朱實二,倍之為朱實四,以句股之差自乘為中黃實,加差實,亦成弦實.」

如弦圖,$2ab+(b-a)^2=c^2,\cdots\cdots(2)$

此與印度·巴斯卡剌,阿刻雅(Bhaskara Acarya)在一一五〇年所證明者相類.

「以差實減弦實,半其餘.以差爲從法,開方除之,復得句矣,加差於句卽股.」

從(2)得 $\frac{c^2-(b-a)^2}{2}=ab=A$ ……………………………………(3)

令 $b-a=p,\quad a=x.$

則 $x^2+px-A=0$ ………(4)

$x+p=b.$

「凡幷句股之實,卽成弦實,或矩於內,或方於外,形詭而量均,體殊而數齊」

「句實之矩,以股弦差爲廣,股弦幷爲袤,而股實方其裏,減矩句之實於弦實,開其餘卽股.倍股在兩邊爲從法,開矩句之角,卽股弦差,加股爲弦.」

$(c-b)(c+b)=c^2-b^2=a^2=B$ ……………………………………(5)

$\sqrt{c^2-(c-b)(c+b)}=b,$

令 $2b=q,\quad a-b=y,$

則 $y^2+qy-B=0$ ………(6)

$y+b=c$

「以差除句實,得股弦幷.以幷除句實,亦得股弦差.」

$$\left.\begin{aligned}\frac{a^2}{c-b}&=c+b\\ \frac{a^2}{c+b}&=c-b\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

「令并自乘,與句實爲實,倍并爲法,所得亦弦,句實減并自乘,如法爲股.」	$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(c+b)^2+a^2}{2(c+b)}=c,\\ \dfrac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}=b,\end{array}\right\}$ ……… (8)
……………………………	
「兩差相乘,倍而開之,所得以股弦差增之爲句,以句弦差增之爲股,兩差增之爲弦.」	$\sqrt{2(c-a)(c-b)}=a+b-c$ …………………………………… (9)
「倍弦實,列句股差實見弦實者,以圖考之;黃實之多,卽句股差實,以差實減之,開其餘,得外大方.大方之面卽句股并也.令并自乘,倍弦實,減之,開其餘,得中黃方.黃方之面,卽句股差.」	$2c^2-(a+b)^2=(b-a)^2$ …(10) $\sqrt{2c^2-(b-a)^2}=a+b=s$ …………………………………… (11) $\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t$ …………………………………… (12)
「以差減并,而半之爲句.加差於并,而半之爲股.」	$\dfrac{s-t}{2}=a$ ………………… (13) $\dfrac{s+t}{2}=b$ ………………… (14)

「其倍弦爲廣袤合,而令句股見者自乘爲其實,四實以減之,開其餘,所得爲差.以差減合,半其餘爲廣.減廣於弦,卽所求也.」

因 $2c=y(=c-b)+y_1(=c+b)$ ……………………(15)

而 $yy_1=a^2$ …………… (16)

則 $\sqrt{4c^2-4a^2}=y_1-y$ …(17)

$$y=\frac{2c-\sqrt{4c^2-4a^2}}{2} \quad \cdots\cdots (18)$$

則 $b=c-y$.

5. 劉徽九章注.

魏·陳留王景元四年(263)注九章算術,於「句股術」注曰「句股冪合以成弦冪」,又曰,「句自乘爲朱方,股自乘爲青方,令出入相補,各從其類,因就其餘不移動也,合成弦方之冪,開方除之卽弦也.」,又曰,「……句長而股短,故術以木長謂之句,圍之謂之股,言之倒互,句與股求弦,亦如前圖;句三自乘爲朱冪,股四自乘爲青冪,合朱青二十五爲弦五自乘冪,出上,第一圖句股冪合爲弦冪明矣.然二冪之數謂倒互於弦冪之中,而已可更相表裏,居裏者則成方冪,其居表者則成矩冪,二表裏形訛而數均.又按此圖句冪之矩,朱卷居裏,是其冪以股弦差爲實,股弦并爲袤,而股冪方其裏.股冪之矩,青卷居表,是其

冪以句弦差爲廣,句弦并爲袤,而句冪方其裏.是故差之與并除之,短長互相乘也.」以上據宋·楊輝詳解九章算法,文與算經十書本略異.

劉徽於「今有戶高多於廣六尺八寸,兩隅相去適一丈,門戶高廣各幾何.答曰,廣二尺八寸,高九尺六寸.」題注曰:「令戶廣爲句,高爲股,兩隅相去一丈爲弦.高多於廣六尺八寸爲句股差冪,開方除之,其所得即高廣并數,以差減并而半之,即戶廣,加相多之數,即戶高也.」

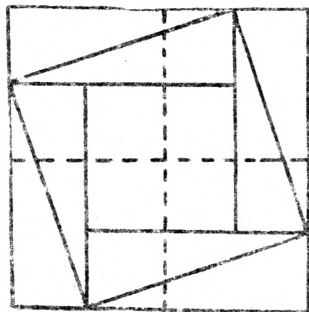
「今此術先求其半一丈自乘,爲朱冪四,黃冪一,半差自乘又倍之,爲黃冪四分之一,減實半其餘,有朱冪二,黃冪四分之一,其於大方棄四分之三,適得四分之一,故開方除之,得高廣并數之半,減差半得廣,加得戶高.」

如弦圖

$$\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]$$

$$=2\times\frac{ab}{2}+\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$



其所解說實開宋,元演段之源,楊輝於此題又設二圖,另見後節.按劉徽九章注屢言及「圖」,今則有注無圖,蓋已亡失,今借弦圖以爲說明,證以下文「其句股合而自乘之冪,令弦自乘倍之爲兩弦冪,以減之,其餘開方除之,爲句股差,……其出於此圖也」之語,卽言$\sqrt{2c^2-(a+b)^2}=b-a=t$,……(12)及「其(弦)實以句股差冪減,半其餘,差爲從法,開方除之,卽句也」,卽$x^2-(b-a)x=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}$,或言$x^2+px-A=0$,……(4),蓋亦本於弦圖也.劉徽又曰:「其倍弦爲廣袤合,矩句卽爲冪,得廣卽句股差,合其矩句之冪,倍爲從法,開之亦句股差」,清·戴震以「廣袤合」,「矩句」語見趙君卿周髀注,亦謂劉說本於趙君卿也.

6. 漢·唐算家之論述

唐·房玄齡晉書卷十一天文志稱「古言天者有三家:一曰蓋天,二曰宣夜,三曰渾天.漢靈帝時蔡邕於朔方上言:宣夜之學,絕無師法,周髀術數具存,……蔡邕所謂周髀者,卽蓋天之說也,……周人志之,故曰周髀.」淮南子天文訓亦如周髀之法以測日高,蔡邕所謂術數具存,非虛語也.至尙書考靈曜,洛書甄曜度,書之眞僞,雖尙待考,其言天高八萬里

一本周髀之說.厥後渾天之說雖盛,而句股法尙長存也.晉書卷十一,天文志稱「吳時中常侍廬江王蕃善數術,傳劉洪乾象曆,依其法而制渾儀,立論考度曰;……周百四十二,而徑四十五,……以句股法言之,旁萬五千里句也,立極八萬里股也,從日邪射陽城弦也,以句股求弦法入之,得八萬一千三百九十四里三十步五尺三寸六分,天徑之半,而地上去天之數也.」

(蓋 $\sqrt{\overline{15000}^2+\overline{80000}^2}=81394$ 里,10298

因　古法一里 =300 步, =81394 里, 30 步, 894

一步 =6 尺, =81394 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分.)

「倍之得十六萬二千七百八十八里六十一步四尺七寸二分天徑之數也,以周率乘之,徑率約之,得五十一萬三千六百八十七里六十八步一尺八寸二分,周天之數也.」

(蓋 $\frac{142}{45}\times2\times81394$ 里, 30 步, 5 尺, 3 寸, 6 分 =

$\frac{142}{45}\times162788$ 里, 61 步, 4 尺, 7 寸, 2 分 =

51368 里, 68 步, 1 尺, 8 寸, 2 分 (?).).

唐·瞿曇悉達開元占經卷一「天體渾宗」篇,所引亦同,此則應用於測天也.

句股之法，魏·劉徽(263)應用之以求圓率，用六角形起算，南齊·祖冲之(429－500)更求其密，得$\pi=3$，14159265. 其在算術，則張丘建算經卷下「今有鹿直西走」及「今有垣高一丈三尺五寸」題，并應用$3^2+4^2=5^2$以爲計算，甄鸞注五經算術卷上「周官車蓋法」條「甄鸞按，句股之法，橫者爲句，直者爲股，邪者爲弦．若句三則股四而弦五，此自然之率也．……求之法，句股各自乘幷而開方除之，卽弦也．……假令句三自乘得九，股四自乘得十六，併之得二十五，開方除之得五弦也」其注周髀算經亦申述此義．此後唐·王孝通緝古算經卷末「假令有句股相乘冪」以下各問，其所計算略涉繁複，如

15．句股形中，已知ab，$c-a$，求a,b,c．

因　$b^2=c^2-a^2=(c-a)(c-a+2a)$，

故　$\dfrac{a^2b^2}{2(c-a)}=\dfrac{a^2[(c-a)+2a]}{2}=\dfrac{c-a}{2}\cdot a^2+a^3$．

16．句股形中，已知ab，$c-b$求c．

$$\frac{a^2b^2}{2(c-b)}=\frac{c-b}{2}\cdot b^2+b^3,\ 又\ b+(c-b)=c.$$

17．句股形中，已知ac，$c-b$，求b．

$$a^2c^2=(c^2-b^2)[(c-b)+b]^2,$$

$$=[(c-b)(c-b+2b)][(c-b)+b]^2.$$

故 $\dfrac{a^2c^2}{2(c-b)}-\dfrac{(c-b)^3}{2}=2(c-b)^2b+\dfrac{5}{2}(c-b)b^2+b^3.$

18. 句股形中,已知 bc, $c-a$, 求 a.

如前 $\dfrac{b^2c^2}{2(c-a)}-\dfrac{(c-a)^3}{2}=2(c-a)^2a+\dfrac{5}{2}(c-a)a^2+a^3.$

19. 句股形中,已知 bc, 及 a 求 b.

$$b^2c^2=b^2(a^2+b^2)$$

故 $b^2c^2=a^2b^2+b^4.$

20. 句股形中,已知 ac, 及 b 求 a.

如前 $a^2c^2=b^2a^2+a^4.$

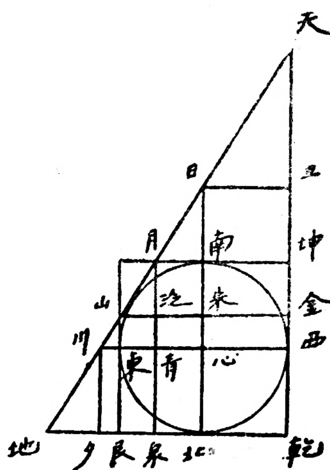
是也.至唐·李淳風注釋周髀算經,九章算術卷九「句股」則無多新說.

7. 宋·元算家之論述

宋,元算家亦論句股形.如元·李冶測圓海鏡十二卷(1248),「以句股容圓爲題,自圓心圓外縱橫取之得大小十五形皆無奇零」,如通△天地乾,天地爲通弦,天乾爲通股,乾地爲通句,而所取之句股弦幷爲 $8^2+15^2=17^2$ 之倍數,如通弦 $=40\times17$, 通股 $=40\times15$, 通句 $=40\times8$ 是也.所得十五形:

	弦,c	句,a	股,b
大或通△天地乾	680	320	600
邊△天川西	544	256	480

底△日地北	425	200	375
黄廣△天山金	510	240	450
黄長△月地泉	272	128	240
上高△天日旦	255	120	225
下高△日山朱	255	120	225
上平△月川青	136	64	120
下平△川地夕	136	64	120
大差△天月坤	408	192	360
小差△山地艮	170	80	150
(皇)極△日川心	289	136	255
(太)虛△月山泛	102	48	90
明△日月南	153	72	135
東△山川東	34	16	30



其「釋名」則

句 $=a$,

股 $=b$,

弦 $=c$,

黄 $=a+b-c$

$=$ 黄方 $=$ 內容圓徑 $=$ 圓 $= r$.

句股和 $=$ 和 $=a+b$,

=弦黃和 $=(a+b-c)+c$.

句股較=差=較=中差 $=b-a$.

=雙差較 $=(c-a)-(c-b)$.

雙差=大差+小差.

句弦和 $=a+c$

句弦較 $=c-a$

=大差=股黃較=股黃差 $=b-(a+b-c)$.

股弦和 $=b+c$

股弦較 $=c-b$

=小差=句黃較=句黃差 $=a-(a+b-c)$.

弦較和 $=c+(b-a)$

=股較和 $=b+(c-a)$,

=句和較 $=(b+c)-a$.

弦較較 $=c-(b-a)=c-b+a$.

=股和較 $=(c+a)-b$.

=句較和 $=(c-b)+a$.

弦和和=總和=三事和 $=a+b+c$.

=句和和 $=(b+c)+a$,

=股和和 $=(a+c)+b$.

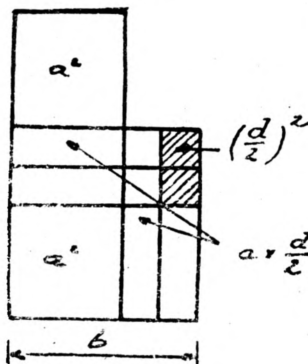
弦和較=黃=黃方=圓徑 $=a+b-c=r$.

$= \text{句較較} = a-(c-b)$,

$= \text{股較較} = b-(c-a)$。

李治以時人有益古集之作,以爲其蘊猶匿而未發,因爲之移補條目,釐定圖式,演爲六十四題,都爲三卷,踵其原名,曰益古演段,自序在己未(1259)夏六月.演段之說得稍具獨立之義,實自此始.

宋·楊輝田畝比類乘除捷法卷下(1275)亦應用周髀弦圖謂「演段曰,和自乘有四段直田積,一段差方積,所以用四積減和,餘得差方一段,卻取方田」,此言 $(a+b)^2=4ab+(b-a)^2$. 蓋出於劉益之議古根源.其於詳解九章算法(1261)句股章「今有戶高多於廣六尺八寸,……」題,已知句股較 $d=b-a$, 弦 $=c$, 求股 $=b$. 如圖



$$c^2=a^2+b^2$$

$$=2a^2+4\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+4a\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$=2a^2+4\left(\frac{d}{2}\right)^2+4\left(a\times\frac{d}{2}\right).$$

故楊輝曰:「弦自乘,變句冪二,半較冪四,半較乘句四」.又如圖中於弦圖內減兩段

$\left(\frac{d}{2}\right)^2$,半之,或$\left(a+\frac{d}{2}\right)$之平方,開方得$a+\frac{d}{2}$,故可得$a$及$b$.此一法也.

同題,因$c^2=2a^2+d^2+2ad$如圖楊輝曰:「弦自乘,變二句冪,及句股較乘句二段,句股較冪一段」.因已知c,及d,又令$a=x$,則得

$x^2+dx=\frac{c^2-d^2}{2}$之帶從平方,即二次方程式.

a^2	
ad	d^2
a^2	ad

元·朱世傑撰算學啓蒙三卷,分二十門,立二百五十九問,首總括無卷數,大德己亥(1299)趙城序而梓傳焉.其卷下開方釋鎖門第八問,「今有直田八畝五分五釐,只云長平和得九十二步,問長平各幾何.答曰,平三十八步,長五十四步.」朱世傑註稱「按此以古法演之,和步自乘得八千四百六十四,乃是四段直積,一段較冪也,列積四之,得八千二百八,減之,餘有較冪二百五十六爲實,以一爲廉,平方開之,得較一十六步,加和半之得長,長內減較即平也.」此亦應用周髀弦圖,言$(a+b)^2=4ab+(b-a)^2$,當與楊輝同出於劉益之議古根源.其第八問以下數問,并和用弦圖以爲演段,至朱世傑乃以天元演其細草,故

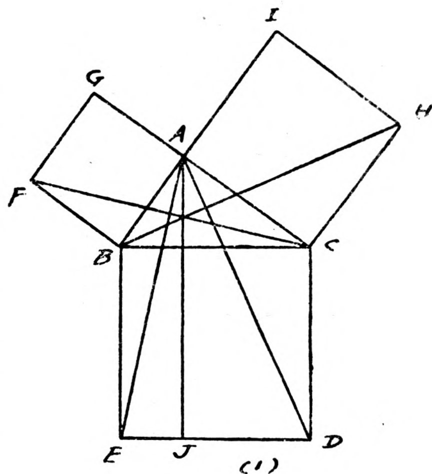
朱世傑又註稱「今以天元演之,明源活法,省功數倍,假立一算於太極之下,如意求之,得方廉隅從正負之段,乃演其虛積,相消相長,而脫其眞積也.予故於逐問備立細草,圖其縱橫,明其正負,使學者粲然易曉也.」其後又著四元玉鑑三卷,分門二十有四,立問二百八十,大德癸卯(1303)臨川莫若序而傳焉.卷前「四元自乘演段之圖」亦立句三,股四,弦五,黃二爲問,卷上「直段求源」,「混積問元」,「和分索隱」,卷中「明積演段」,卷下「兩儀合轍」,「左右逢元」,「三才變通」,雖幷以句股爲問,實已脫前此演段法移補湊合之途徑,進爲純粹之代數解析法矣.

元·納速剌丁(Abû Dscha far Muhammed ibn Hasan al Tûsi, 1201–1274)亦嘗證Pythagoras定理,見Biblioth. Mathem. 1892, pp. 3–4, H. Suter氏論文中,爲Hoffmann及Wipper二氏所未收.

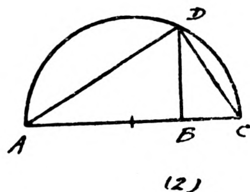
8. 明·清算家之論證上

明代算學頗爲衰廢,明·趙開美校周髀算經,唐順之(1507–1560)唐荊川先生文集卷十一,「數論三篇」內「句股測望論」,顧應祥(1483–1565)句股算術(1533)卷上,周述學神道大編曆宗算會卷三,「句股」,

雖亦論句股,僅引述成言.程大位算法統宗(1593)卷六「長闊相加求和圖」下,「演段解曰;四因積者,乃是四長四闊積,居邊,…… 却以相差,…… 自乘得,…… 補中,得相和積,…… 開方除之,得長闊相和,……」,亦襲宋,元算士舊說.直至明季利瑪竇(Matteo Ricci,1529–1610)來華,與其徒徐光啓(1562–1633)同譯幾何原本前六卷(1607),其卷一第四十七題證Pythagoras定理,如圖(1).又卷六第十三題,「兩直線求別作一線爲連比例之中率」,如圖(2),BD 爲 AB, BC 線之中率,即



(1)



(2)

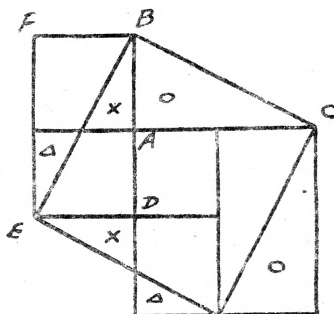
$$\frac{\text{首率}\ BC}{\text{中率}\ BD}=\frac{\text{中率}\ BD}{\text{末率}\ AB}.$$

徐光啓因撰句股義乃圖解句股和較相求等凡十五條,有法有論,頗能應用幾何原本,以盡演段法移補湊合之意.先是崇禎己巳(1629)明廷從徐光啓之請,徵西洋人入京修曆.崇禎四年(1631)進測量全義十卷,卷中有Pythagoras定理證法,如圖正$\triangle ABC$求$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$,先由$A$點垂直於$BC$線,分$\overline{BC}^2$弦方為兩矩形.

因　$\triangle ALB=\triangle FKD$,	又因　$\triangle ALC=\triangle FKE$,
$\therefore$　$\square BK=\square AD$.	$\therefore$　$\square LE=\square AE$.
又　$\triangle FIA=\triangle HDB$,	又　$\triangle AFI=\triangle CEG$,
$\square AD=\square AH$,	$\square LE=\square AG$,
$\therefore$　$\square BK=\overline{AB}^2$.	$\therefore$　$\square LE=\overline{AC}^2$.

$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$$

入清則兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書中句股闡微,首卷係楊作枚補.有Pythagoras定理證法.



如圖證　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

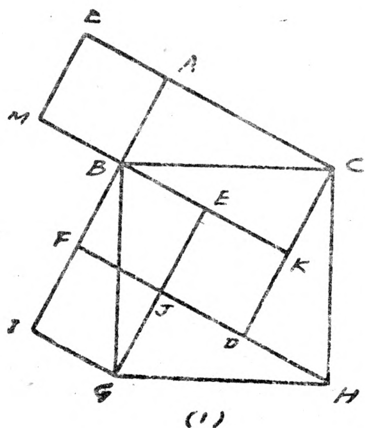
因　$(\triangle BDE-X)+\triangle+X+O+\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\triangle BFE)+\triangle+O+\overline{BC}^2$,

因　$(\triangle BDE)=(\triangle DFE)$,

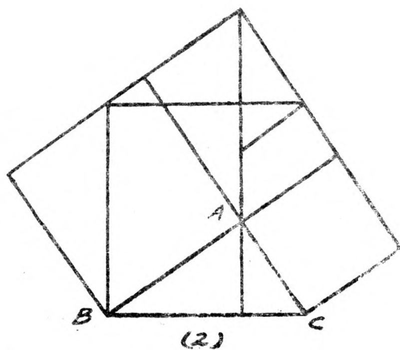
又圖中 $\triangle, X, O$, 彼此相等. $\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

此外又設一圖,則爲相傳之弦圖,茲不具錄.

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書中句股闡微,二卷後則梅文鼎(1633-1721)之書.其卷三有(1),(2),(3)三圖,就中(2)圖出於測量全義,(3)圖本解幾



(1)



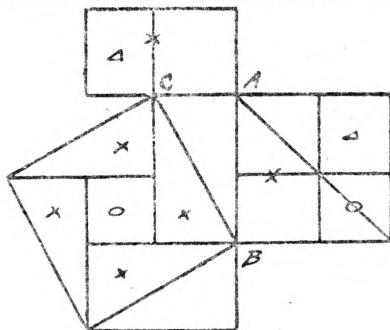
(2)

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2,$$

因　$\triangle CDH=\triangle BIG,$

又　$\triangle HJG=\triangle ABC,$

∴　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2.$

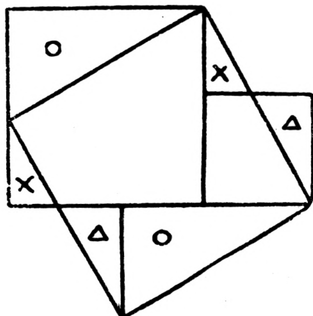


(3)

何二卷第七題,亦可借用以證 Pythagoras 定理.(1),(2),(3)圖又見於梅氏叢書輯要卷十七句股舉隅.

并時著作,如方中通數度衍(1661)卷六「句股」,李子金算法通義(1676)卷一,杜知耕數學鑰(1681)卷六「句股」,陳訏(1650—1732)句股述(1683),屠文漪九章錄要卷十一之二,均無新說.下至戴震(1724-1777)九章算術卷九「訂訛補圖」,尚不免以整數敷衍,補成一圖.其餘若屈曾發九數通考(1772),梅冲句股淺述(1797自序),駱騰鳳(1770—1841)藝游錄(1843刻),許桂林(1778—1821)算牖(1811)之因襲舊說,自無論矣.直至李銳(1768—1817),李潢(—1811),安清翹(1759—1830),項名達(1789—1850),陳杰始各補一圖.李銳句股算術細草(1806自序)細草外,每題有解.篇首設圖以證

Pythagoras 定理.李潢九章算術細草圖說(1820 刻)馮桂芬弧矢算術細草圖解(1839)因之.



安清翹矩線原本(1818)卷二「測量篇上」,如圖

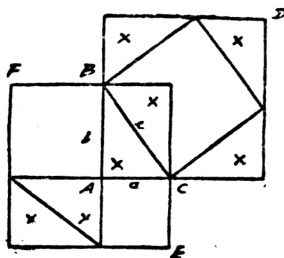
上方 $\square AD=$ 下方 $\square EF$,

因 $(a+b)^2=(a+b)^2$,

又 上方 $\square AD=c^2+4\cdot\frac{ab}{2}$,

下方 $\square EF=a^2+b^2+4\cdot\frac{ab}{2}$,

$\therefore\quad \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$.

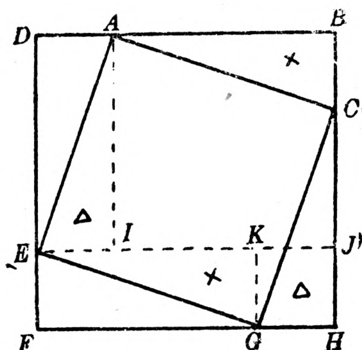


何夢瑤算迪(約 1820)卷二,有下圖:

因 $\overline{AB}^2=\square BI$,

$\overline{GH}^2=\overline{BC}^2=\square KH$,

$\overline{AC}^2=\square AG$.



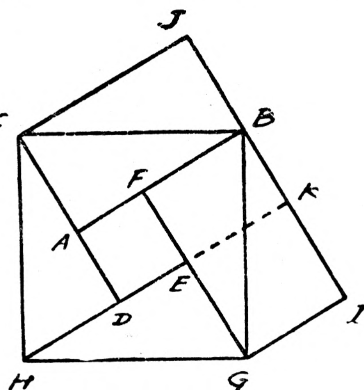
又因 $\triangle ABC=\triangle EGK$,

$\triangle GHC=\triangle AEI$,

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$.

項名達句股六術圖解

(1825)第一術,如圖:



$\square BH+\triangle BJC+$

$\triangle GIB=\square KG+\square DJ$

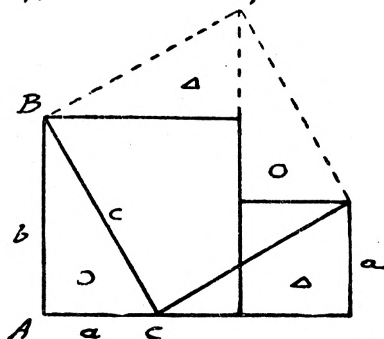
$+\triangle CHD+\triangle HEG$.

因 $\triangle BJC+\triangle GIB=$

$\triangle CHD+\triangle HEG$,

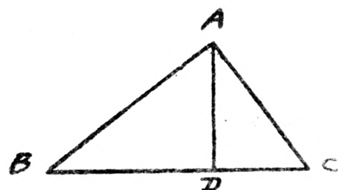
$\therefore \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$.

陳杰算法大成上編(1844金望欣序)卷二,「句股」,如圖 $\triangle+O+a^2+b^2=\triangle+O+c^2$,



$$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2.$$

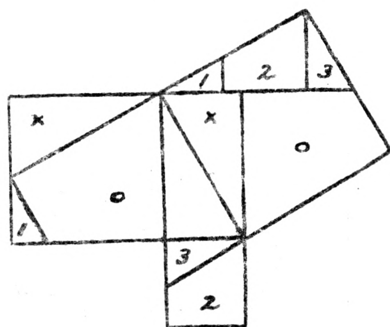
李善蘭(1810－1882,據張鳴珂疑年賡錄卷二)則古昔齋算學(1867刻)第十三,天算或問卷一,如圖,自A作垂直於BC,得D點,則$\triangle ABD$, ADC, ABC為相似,



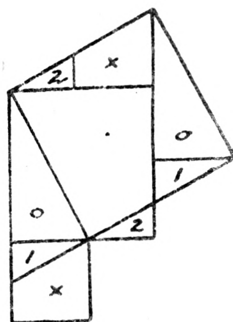
$$\text{即}\quad \frac{\overline{AC}^2}{\triangle ADC}=\frac{\overline{AB}^2}{\triangle ABD}=\frac{\overline{BC}^2}{\triangle ABC},$$

$$\therefore\ \overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2.$$

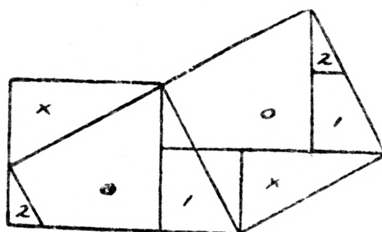
華蘅芳(1830－1902)行素軒算稿內算草叢存四「青朱出入圖說」,設二十二圖如下:



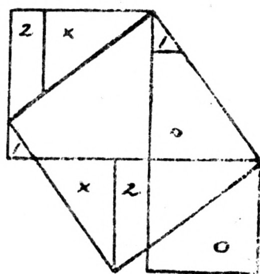
(1)



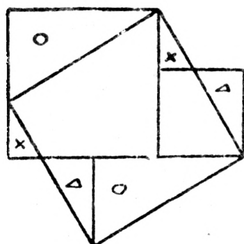
(2)



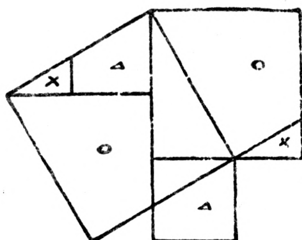
(3)



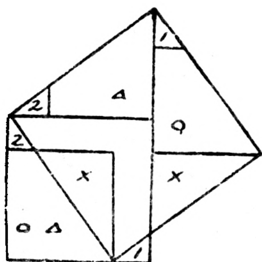
(4)



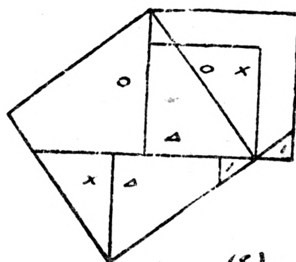
(5)



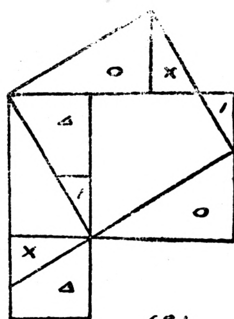
(6)

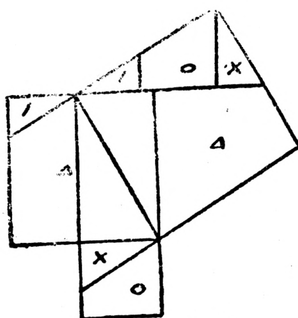


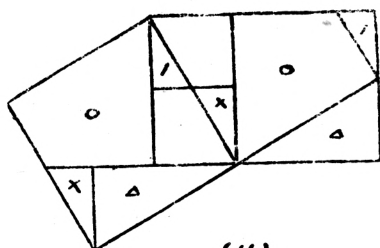
(7)

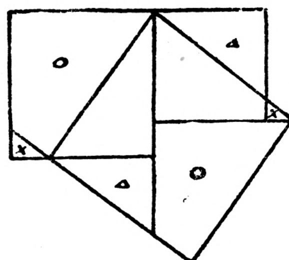


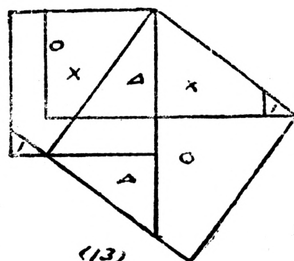
(8)

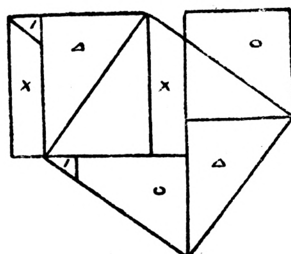

(9)

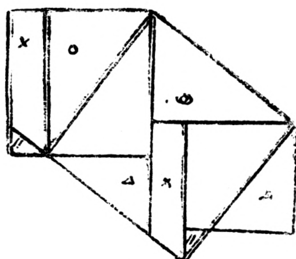

(10)


(11)

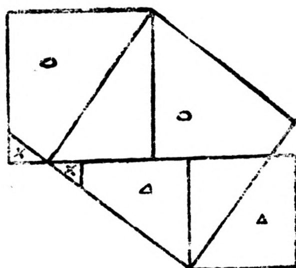

(12)


(13)

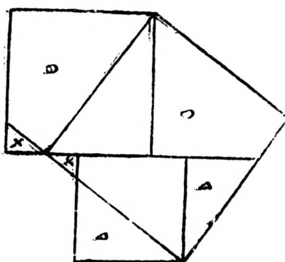

(14)



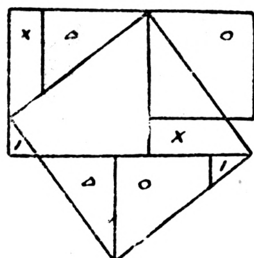
(15)



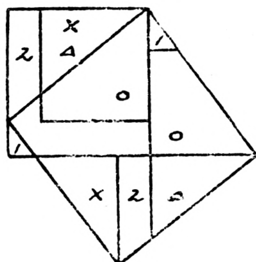
(16)



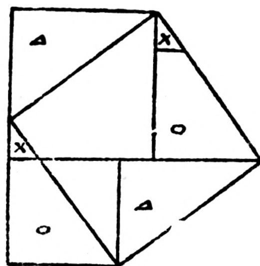
(17)



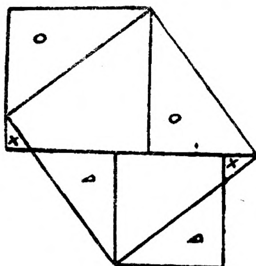
(18)



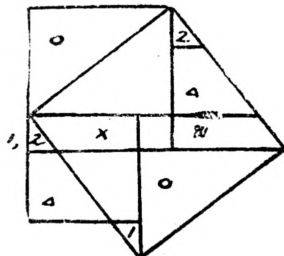
(19)



(20)



(21)



(22)

就中(5)圖與李銳,李潢所補相同.(20)圖與梅文鼎(1)圖及陳杰所補相同.

9. 明,清算家之論證下

求句股形內句股弦爲整數,在西洋有次之各法:

奇整數 n 爲一邊,他一邊爲 $\frac{1}{2}(n^2-1)$,則斜邊 $\frac{1}{2}(n^2+1)$.(Pythagoras).

x, y 俱爲奇數或偶數, xy 爲完全平方數,則斜邊爲 $\frac{1}{2}(x+y)$,他二邊爲 $\frac{1}{2}(x-y)$, $\sqrt{xy}$.(Euclid).

偶整數 m 爲一邊,他一邊爲 $\frac{1}{4}(m^2-1)$,則斜邊爲 $\frac{1}{4}(m^2+1)$.(Plato).

m, n 爲任意二整數,以 $2mn$, m^2-n^2 爲二邊,則

斜邊爲 m^2+n^2 (Moseres).

其在國中論此者亦有數家.如:

數理精蘊卷十二:「定句股弦無零數法」,則本於Euclid.

清·陳杰算法大成上編(1844)卷二句股,「定句股弦三數皆整法」稱「舊法係用三率連比例,…羅(士琳)爲任設兩數求一句股形三數皆整法…(陳杰)又創爲任設一數求無數句股形皆盡之法…」,

數理精蘊(a)舊法第一題, $\frac{\text{首率}\ c-b}{\text{中率}\ a}=\frac{\text{中率}\ a}{\text{末率}\ c+b}$,

$$c=\frac{(c-b)+(c+b)}{2},\quad b=\frac{(c+b)-(c-b)}{2},\ a=a.$$

(b) 舊法第二題, $\frac{\text{首率}\ c-a}{\text{中率}\ b}=\frac{\text{中率}\ b}{\text{末率}\ c+a}$,

$$c=\frac{(c-a)+(c+a)}{2},\quad a=\frac{(c+a)-(c-a)}{2},\quad b=b.$$

(何夢瑤法同)

(c) 羅士琳法: 甲數 $=m$, 乙數 $=n$.

$c=m^2+n^2,\quad a=m^2-n^2,\quad b=\sqrt{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}$.

項名達法: (李銳法同)

$c=m^2+n^2,\quad a=m^2-n^2,\quad b=2mn$.

(d) 羅士琳法:

$c=m^2+n^2,\quad b=m^2-n^2,\quad a=\sqrt{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}.$

項名達法：(李銳法同)。

$c=m^2+n^2,\quad b=m^2-n^2,\quad a=2mn.$ (Moseres).

(e) 陳杰法：奇數 $=m$，遞加減數 $=2m$，令 $m^2=c-b$.

$$a=3m^2-2m,\ \frac{a^2}{c-b}=c+b=\frac{(3m^2-2m)^2}{m^2}=9m^2-12m+4.$$

則 $c=5m^2-6m+2,\ b=4m^2-6m+2,\ a=3m^2-2m.$

(f) 陳杰法：偶數 $=n$，遞加減數 $=4n$，

令 $2n^2=c-b,\quad a=3\times 2n^2-\frac{4n}{2}=6n^2-2n,$

$$\frac{a^2}{c-b}-\frac{(6n^2-2n)^2}{2n^2}=18n^2-12n+2,$$

$c=10n^2-6n+1,\quad b=8n^2-6n+1,\quad a=6n^2-2n.$

李善蘭則古昔齋算學(1867 刻)第十三，天算或問卷一稱；取二數或俱偶，或俱奇。

(a) $mn=$ 大數，$n=$ 小數，

$$b=mn,\quad c=\frac{n(m^2+1)}{2},\quad a=\frac{n(m^2-1)}{2}.$$

(b) $m=$ 大數，$n=$ 小數，

$$b=mn,\ c=\frac{m^2+n^2}{2},\quad a=\frac{m^2-n^2}{2}.$$

同文館算學課藝(1880 丁韙良序)卷四有「造

句股最簡之法」爲貴榮所作.時李善蘭方教授天文館,法當出於李.

(a) 取m一數,奇或偶,

$$a=m,\quad b=\frac{m^2-1}{2},\quad c=\frac{m^2+1}{2}.\qquad \text{(Pythagoras)}$$

(b) 取m, $m+1$二數相連,

$$a=2m+1,\quad b=2m(m+1),\quad c=2(m+1).$$

又 取m, $m+2$二數相間,

$$a=2m+2,\quad b=m(m+2),\quad c=2(m+2).$$

又 取m, n任意二數,

$$a=2mn,\quad b=m^2-n^2,\quad c=m^2+n^2.\qquad \text{(Moseres)}$$

(c) 取m, p, n三數,而$m:p=p:n$,

$$c=\frac{m+n}{2},\quad a=\frac{m-n}{2},\quad b=p.\qquad \text{(Euclid)}$$

上述亦載善化劉鐸所編古今算學叢書「句股六術」後,亦不著撰人姓氏。

光緒戊戌(1898)所印古今算學叢書有光緒丙申(1896)沈善蒸造無零句股表捷法一卷,謂取小正三角形句股弦a_1, b_1, c_1,三數.

因 $a_1^2+b_1^2=c_1^2$, 則 $a=2(a_1+b_1+c_1)-b_1$,

$$b=2(a_1+b_1+c_1)-a_1,$$

$$c=2(a_1+b_1+c_1)+a_1;$$

又因$(-a_1)^2+b^2{}_1=c_1^2$,則 $a=2(-a_1+b_1+c_1)-b_1$,

$$b=2(-a_1+b_1+c_1)+a_1,$$

$$c=2(-a_1+b_1+c_1)+c_1,$$

又因$a_1^2+(-b_1)^2=c_1^2$,則 $a=2(a_1-b_1+c_1)+b_1$,

$$b=2(a_1-b_1+c_1)-a_1,$$

$$c=2(a_1-b_1+c_1)+c_1.$$

「故凡一形可生三形,由一而三,三而九,九而二十七,以至無量,莫不可遞求而得,誠簡法也」,如 $a_1:b_1:c_1=3:4:5$,如上公式可得$a:b:c=20:21:29$,或$8:15:17$,或$5:12:13$三句股形,逐次如是.又如$a_1:b_1:c_1=3:4:5$之句股較 $b_1-a_1=1$,則三數俱正時得 $a:b:c=20:21:29$,亦有句股較$b-a=1$.再以三數俱正得$A:B:C=119:120:169$,亦有句股較$B-A=1$.逐次如是,以至無量.

陳修齡公式演算(1905)卷一,謂從算學題鏡,而略爲變通,得

$$a=2\sqrt{xy},\quad b=x-y,\quad c=x+y.$$

黃宗憲惘笑不計(1906自序),「三角垛堆盤數句股術」,

(a) $c-b=1,\quad b=2m(m+1),\quad c=2m^2+2m+1,$

$a=2m+1.$

(b) $c-b=2,\quad b=m^2+2m,\quad c=m^2+2m+2,$

$a=2(m+1).$

(c) $c-b=8,\quad b=m^2+4m,\quad c=m^2+4m+8,$

$a=4(m+1).$

(d) $c-b=9,\quad b=2m^2+6m,\quad c=2m^2+6m+9,$

$a=3(2m+3).$

此外 $c-b=3$, $c-b=5$, $c-b=7$ 用(a)式之倍數,又 $c-b=4$, $c-b=6$, $c-b=10$ 用(b)式之倍數.

黄宗憲又變通舊法得二術,如

(e) $m>n,\quad n(2m+n)=x,\quad (m+n)(m-n)=y,$

$m^2+n^2+mn=z.$

則 $c=z^2+x^2,\qquad c=z^2+y^2,$

$a=z^2-x^2,\qquad a=z^2-y^2,$

$b=2xz;\qquad b=2yz.$

(f) $m>n,\quad m=x,\quad n=y,\quad m+n=z.$

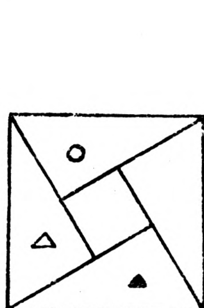
則 $c=(m+n)^2+m^2,\qquad c=(m+n)^2+n^2,$

$a=(m+n)^2-m^2,\qquad a=(m+n)^2-n^2,$

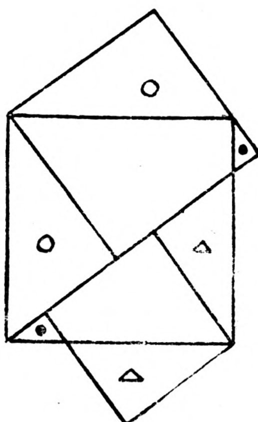
$b=2m(m+n);\qquad b=2n(m+n).$

10. 餘論.

日本算學源於我國.日人所證 Pythagoras 定理,頗有與中算家論證相同者.如礒村吉德增補算法闕疑鈔(貞享元年,1684 自序)三之卷,書眉上有以下二圖.

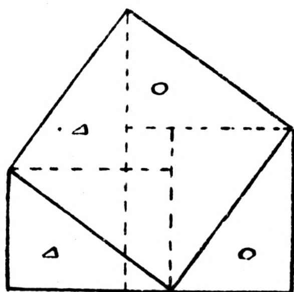


(1)

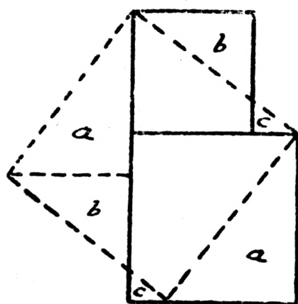


(2)

關孝和(1637 或 1642—1708)關流三部鈔,第一部爲「見題免許」,遠藤利貞疑其出於寬文延寶(1661—1680)間,惜乏明證.今其傳鈔本圖註,頗多異同.林鶴一君於一寫本中發見(3)圖,而遠藤利貞所引則爲(4)圖.其(3)圖與梅文鼎(1)圖,及項名達所補者相似,(4)圖與李銳,李潢所補,完全相同.

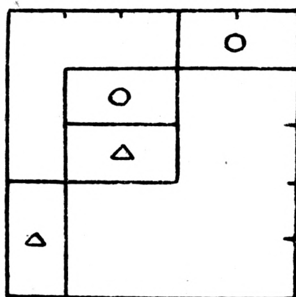


(3)



(4)

川邊信一周髀算經註解(1785)亦有句三股四弦五之圖解如(5)圖.



(5)

重差術源流及其新註

目　次

1. 重差術之始興。

2. 重差術之完成。

3. 重差術新註。

4. 重差術之紹述。

5. 重差術之應用。

6. 重差術之衰廢。

7. 重差術之再興。

1. 重差術之始興.

重差術始興,遠在戰國以前,蓋周髀算經至遲爲戰國前之著作.而周髀算經言:「偃矩以望高,覆矩以測深,臥矩以知遠」.又曰:「望遠,起高之術,而子不能得,則子之於數,未能通類」.後周·甄鸞註曰:「定高遠者立兩表,望懸邈者施累矩」.宋·李籍周髀算經音義於周髀註稱:「周髀算經者以九數句

股重差算日月行度,遠近之數皆得於股表,卽推步蓋天之法也」.於蓋天註稱:「蓋天之說,卽周髀是也.……各依算術,用句股重差」.觀此則重差出於周髀之說,前人已具言之.蓋古代一切測望之術,皆有藉於用矩立表,而周髀算經又爲言用矩立表之第一部書,故謂重差術原於周髀,亦非過言.

其次之言測望者,有九章算術.漢·鄭玄釋周禮地官保氏九數云:「九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,句股」.此言漢時有重差,夕桀,句股各術也.張衡(78—139)所謂「重用句股」(註)是漢法也.劉徽九章注序亦謂:「徽尋九數有重差之名」,則重差之名在魏前已具,可以無疑.九章末章本爲旁要,兩漢屢經刪補,而以句股代旁要.句股亦漢法也.其句股章有測高深望遠七術,已知應用簡單相似三角形爲比例.重差本非離句股別能爲術,故劉徽曰:「輒造重差,綴於句股之下」.

(註)梁·劉昭注補續漢志十,天文志上引張衡靈憲曰「……將覆其數,用重鉤股……」,一本作「用重差鉤股」.按靈憲文開元占經亦引之,作「將覈其數,用重鉤股」.

2. 重差術之完成.

重差術至魏·劉徽始告完成.晉書稱:魏·陳留王景元四年(263)注九章算術.隋書經籍志有劉徽九章重差圖一卷,新舊唐書并記九章重差一卷劉向(?)撰,九章重差圖一卷劉徽撰.徽於九章算術序稱

「……周官大司徒職,夏至日中立八尺之表,其景尺有五寸,謂之地中.說云:南戴日下萬五千里,夫云爾者,以術推之.按九章立四表望遠,及因木望山之術,皆端旁互見,無有超邈若斯之類.則蒼等為術,猶未足以博盡羣數也.徽尋九數有重差之名,原其指趣,乃所以施於此也.凡望極高,測絕深,而兼知其遠者,必用重差句股,則必以重差為率,故曰重差也.立兩表於洛陽之城,令高八尺,南北各盡平地,同日度其正中之時,以景差為法,表高乘表間為實,實如法而一,所得加表高,即日去地也.以南表之景,乘表間為實,實如法而一,即為從南表至南戴日下也.以南戴日下,及日去地,為句股,為之求弦,即日去人也.以徑寸之筩,南望日,日滿筩空,則定筩之長短,以為股率.以筩徑為句率.日去人之數為大股,大股之句,即日徑也.雖天圓穹之象,猶曰可度,又況泰山之高,與江海之廣哉.徽以為今之史籍,且略舉天地之物,考論厥數,載之於志,以闡世術之美.輒造重差,并為注解,

以究古人之意,綴於句股之下。度高者重表,測深者累矩,孤離者三望,離而又旁求者四望。觸類而長之,則雖幽遐詭伏,靡所不入,博物君子詳而覽焉。」

唐·王孝通上緝古算經表稱「徽思極毫芒,觸類增長,乃造重差之法,列於終篇.雖即未爲司南,然亦一時獨步」信不誣也

3. 海島算經新註.

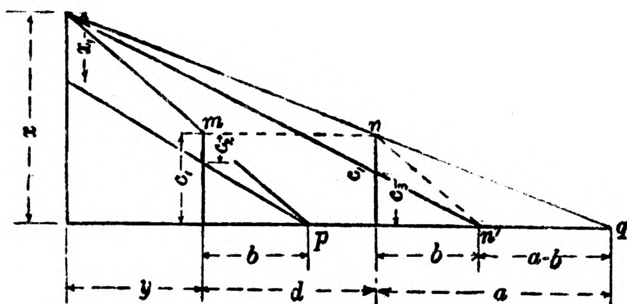
隋唐志之重差圖,宋史藝文志已不復著錄,則其亡已久.清·李潢曾作海島算經細草圖說補入八圖.尚不免有牽強之處,潢亦自言「圖中以四邊形五邊形立說,似與句股不類」茲別作新註於次:

(第一題 「今有望海島,立二表齊高三丈,前後相去千步.令後表與前表參相直.從前表卻行一百二十三步,人目着地,取望島峯,與表末參合,從後表卻行一百二十七步,人目着地,取望島峯亦與表末參合,問島高及去表各幾何

答曰:島高四里五十五步.去表一百二里一百五十步」.

術曰:以表高(c_1)乘表間(d)爲實,相多($a-b$)爲法,除之,所得,加表高(c_1),即得島高(x).求前表去島遠

近(y)者,以前表卻行(b)乘表間爲實,相多爲法,除之,得島去表里數(y)



如圖作nn'平行於mp;因相似三角形比例得:

$$x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1,\ 及\ y=\frac{bd}{a-b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(第二題)「今有望松生山上,不知高下.立兩表齊高二丈,前後相去五十步.令後表與前表參相直,從前表卻行七步四尺,薄地遙望松末,與表端參合.又望松本入表二尺八寸.復從後表卻行八步五尺,薄地遙望松末,亦與表端參合.問松高及山去表各幾何.

答曰:松高十二丈二尺八寸.山去表一里二十八步七分步之四.」

術曰:以入表(c_2)乘表間(d)爲實,相多$(a-b)$爲法,除之,加入表(c_2),卽得松高(x_1).求表去山遠近(y)者,

置表間(d)以前表卻行(b)乘之爲實,相多($a-b$)爲法,除之,得山去表(y).

如前圖,從(1)式,因$\frac{x_1}{c_2}=\frac{y+b}{b}$及$\frac{x_1-c_2}{c_2}=\frac{d}{a-b}$;得

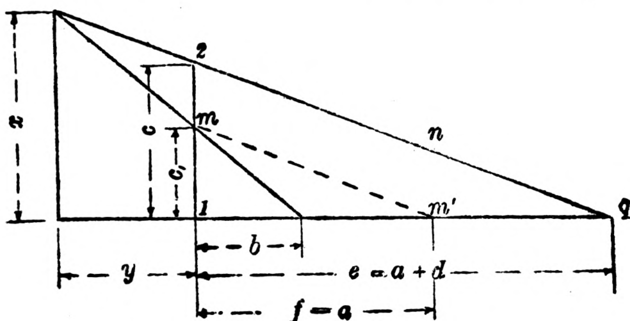
$$x_1=\frac{c_2d}{a-b}+c_2\text{ 及 }y=\frac{bd}{a-b}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(第三題)「今有南望方邑,不知大小.立兩表東西去六丈,齊人目以索連之,令東表與邑東南隅及東北隅,參相直,當東表之北卻行五步,遙望邑西北隅,入索東端二丈二尺六寸半.又卻北行去表十三步二尺,遙望邑西北隅,適與西表相參合.問邑方及邑去表各幾何.

答曰:邑方三里四十三步四分步之三.邑去表四里四十五步.」

術曰:以入索(c_1)乘後去表($e=a+d$),以兩表相去(c)除之,所得爲景差(f).以前去表(b)減之,不盡,以爲法.置後去表(e)以前去表(b)減之,餘以乘入索(c_1)爲實.實如法而一,得邑方(x). 求去表遠近(y)者,置後去表(b)以景差(f)減之,餘以乘前去表(b)爲實.實如法而一,得邑去表(y).

如圖1,2爲兩表.作mm'平行於nq,則$f=a$爲景差.從



(1)式得:

$$x=\frac{c_1(e-b)}{f-b}, 及\ y=\frac{b(e-f)}{f-b}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(第四題) 「今有望深谷,偃矩岸上,令句高六尺,從句端望谷底,入下股九尺一寸.又設重矩於上,其矩間相去三丈.更從句端望谷底,入上股八尺五寸.問谷深幾何.

答曰:(深)四十一丈九尺.」

術曰:置矩間(d)以上股(c_3)乘之爲實上下股(c_3,c_1)相減餘爲法除之.所得以句高(b)減之卽得谷深(y).

於第一題圖,令谷底爲x,則 $\frac{y+b}{b}=\frac{x}{c_1}$　$\frac{y+b+d}{b}=\frac{x}{c_3}$.

卽得

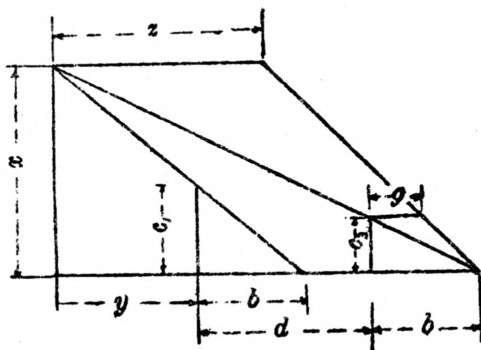
$$y=\frac{c_3d}{c_1-c_3}-b\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(第五題) 「今有登山望樓,樓在平地,偃矩山

上,令句高六尺,從句端斜望樓足,入下股一丈二尺.又設重矩於上,令其間相去三丈.更從句端斜望樓足,入上股一丈一尺四寸.又立小表於入股之會,復從句端斜望樓岑端,入小表八寸,問樓高幾何.

答曰:高八丈.」

術曰:上下股(c_3,c_1)相減,餘爲法,置矩間(d)以下股(c_1)乘之,如句高(b)而一.所得以入小表(g)乘之爲實.實如法而一,即是樓高(z).



如圖從(4)式及$\frac{x}{c_1}=\frac{y+b}{b}$之關係,得$\frac{x}{c_1}=\frac{c_3 d}{c_1-c_3}\cdot\frac{1}{b}$.

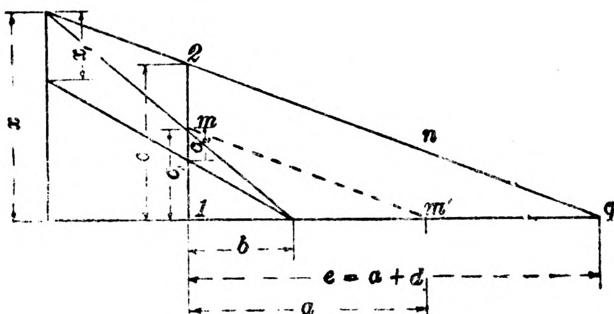
又因$\frac{x}{c_3}=\frac{z}{g}$。即得$z=\frac{g\cdot\frac{c_1 d}{b}}{c_1-c_3}$ ………………………… (5)

(第六題)「今有東南望波口,立兩表,南北相

去九丈.以索薄地連之,當北表之西卻行去表六丈,薄地遙望波口,南岸入索北端四丈二寸.以望北岸,入前所望表裏一丈二尺.又卻後行去表十三丈五尺,薄地遙望波口南岸,與南表參合.問波口廣幾何.

答曰:一里二百步.」

術曰:以後去表(e)乘入索(c_1),以表相去(c)而一.所得以前去表(b)減之,餘以爲法.復以前去表(b)減後去表(e)餘以乘入所望表裏(c_2)爲實.實如法而一,得波口廣(x_1).



如圖1爲北表,2爲南表.從(2)式及$\frac{a}{e}=\frac{c_1}{c}$之關係,得

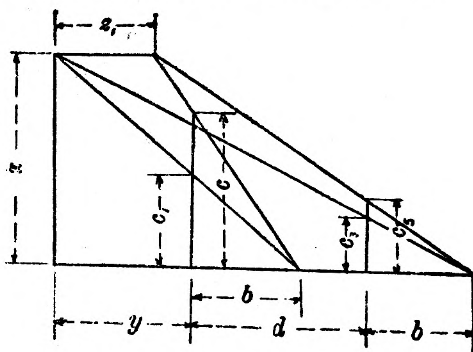
$$x_1=\frac{c_2(e-b)}{\frac{c_1e}{c}-b}\qquad\cdots\cdots(6)$$

(第七題) 「今有望清淵,淵下有白石,偃矩岸

上,令句高三尺,斜望水岸,入下股四尺五寸,望白石入下股二尺四寸.又設重矩於上,其間相去四尺.更從句端斜望水岸入上股四尺,以望白石入上股二尺二寸,問水深幾何.

答曰:(深)一丈二尺.」

術曰:置望水上下股(c_1c_5)相減餘以乘望石上股(c_3)爲上率.又以望石上下股(c_1,c_3)相減餘以乘望水上股(c_5)爲下率.兩率相減餘以乘矩間(d)爲實.以二差相乘爲法.實如法而一,得水深(z_1).



如圖,因
$$\frac{y-z_1}{x-c}=\frac{b}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

$$\frac{y+d-z_1}{x-c_5}=\frac{b}{c_5}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

從(1),(2)消去y,得 $$x=\frac{dcc_5}{b(c-c_5)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

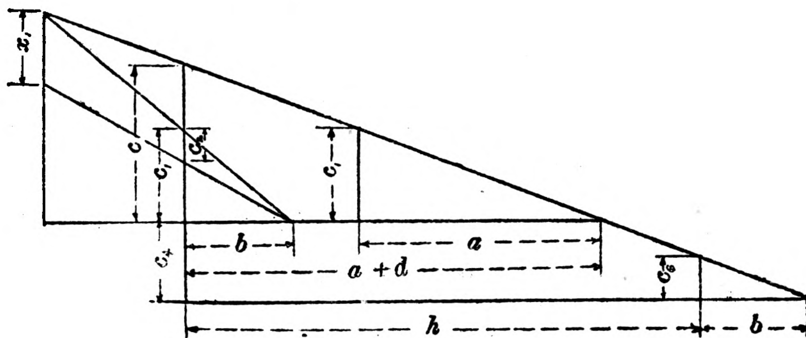
從(A)以(C)之x及(4)式之y代入,得

$$z_1=\frac{d[c_3(c-c_5)-c_5(c_1-c_3)]}{(c_1-c_3)(c-c_5)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

(第八題) 「今有登山望津,津在山南,偃矩山上,令句高一丈二尺,從句端斜望津南岸入下股二丈三尺一寸.又望津北岸入前望股裏一丈八寸.更登高巖,北卻行二十二步,上登五十一步,偃矩山上,更從句端斜望津南岸入上股二丈二尺,問津廣幾何.

答曰:(廣)二里一百二步.」

術曰:以句高(b)乘下股(c_4)如上股(c_6)而一,所得以句高(b)減之,餘爲法.置北行(c_4)以句高(b)乘之,如上股(c_6)而一,所得以減上登(h),餘以乘入股裏(c_2)爲實.實如法而一,即得津廣.



如圖 $\frac{b}{c_6}=\frac{b+h}{c+c_4}=\frac{a+d}{c}=\frac{a}{c_1}$.

從 $\frac{b}{c_6}=\frac{b+h}{c+c_4}=\frac{a+d}{c}$ 得 $a+d-b=h-\frac{bc_4}{c_8}$ ……(A)

從 $\frac{b}{c_8}=\frac{a}{c_1}$ 得 $a=\frac{bc_1}{c_6}$ ……………………………(B)

又從(2)式 $x_1=\frac{c_2d}{a-b}+c_2$, 以(A),(B)式代入,得

$$x_1=\frac{c_2\left(h-\frac{bc_4}{c_6}\right)}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

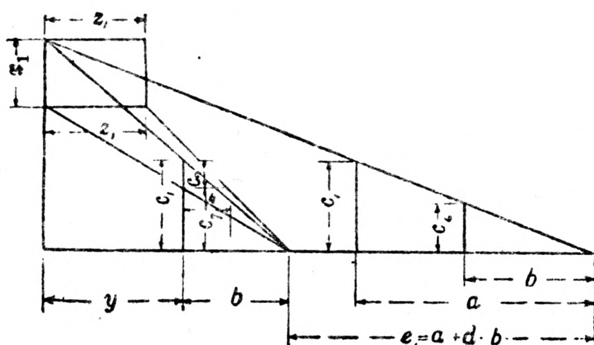
(第九題)「今有登山臨邑,邑在山南,偃矩山上,令句高三尺五寸,令句端與邑東南隅及東北隅參相直,從句端遙望東北隅,入下股一丈二尺又施橫句於入股之會,從立句端望西北隅,入橫句五尺,望東南隅入下股一丈八尺,又設重矩於上,令矩間相去四丈,更從立句端望東南隅,入上股一丈七尺五寸.問邑廣長各幾何.

答曰:南北長一里一百步.

東西廣一里三十三步少半步.」

術曰:以句高(b)乘東南隅入下股(c_1)如上股(c_6)

而一,所得減句高(b),餘爲法.以東北隅下股(c_7)減東南隅下股(c_1)餘以乘矩間(e_1)爲實.實如法而一,得邑南北長也.求邑廣(z_1)以入横句(k)乘矩間(e_1)爲實.實如法而一,卽得邑東西廣(z_1).



如圖從(2)式,得

$$x_1=\frac{e_1(c_1-c_7)}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

又如圖從 $\frac{z_1}{k}=\frac{y+b}{b}=\frac{x_1}{c_2}$ 得 $z_1=\frac{x_1k}{c_2}$ 代入上式,得

$$z_1=\frac{e_1k}{\frac{bc_1}{c_6}-b} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

4. 重差術之紹述

劉徽以後,算經中之言測望者,張丘建算經卷上有「今有木不知遠近」及「今有城不知大小」

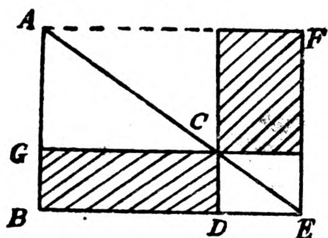
二題.亦應用相似三角形爲計算.梁·祖暅之造圭表,測景驗氣,求日高地中,於重差之術用力甚深.暅之曾以諸法授後魏·信都芳(武定中,543—550卒).都芳因亦注重差句股.至唐,而重差忽被海島之名,唐代選舉:九章,海島共限一歲.李淳風亦注海島算經一卷.宋史有「海島算經一卷,夏翰[一作翺]新重演議海島算經一卷」.其後宋·紹聖二年(1095)吏部令史韓公廉通九章算術及鈎股重差之義,作九章鈎股測驗渾天書一卷.宋·楊輝算法通變本末卷上,稱:「海島題法,隱奥莫得其祕,李淳風雖注祇云下法,亦不曾說其源.(劉益)議古根源元無細草,但依術演算,亦不知其旨」云.

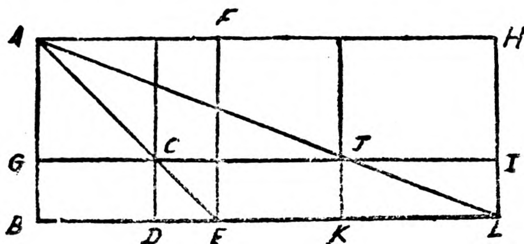
5. 重差術之應用

宋元算士頗言重差術之應用,宋秦九韶數書九章(1247)卷七,測望類「望山高遠」題,術曰「以句股求之,重差入之……」與劉徽海島算經第一題相似.又「陸岸測水」題,術曰「以句股重差求之……」則應用相似三角形底邊之廣與高成比例,劉徽亦常用之,又卷八「表望方城」題,術曰「以句股重差求之……」又「望敵遠近」及「表望浮圖」題,術曰

「以句股求之,重差入之……」幷應用相似三角形.計秦氏數書九章應用重差術凡五題.

宋·楊輝乘除通變算寶(1274)卷上稱「劉徽以旁要之術,變重差,減積,爲海島九問」,續古摘奇算法(1275)卷下有海島題解,引海島算經第一題及九章以表望山術,次又以隔水望木二題爲問,驗重差之術,引用海島第一題.楊輝自謂「嘗置海島小圖於座右,乃見先賢作法之萬一」.其法於 ABE 直角三角形,知 $AB=$ 句,$BE=$ 股,$AE=$ 弦;$CD=$ 餘句,$DE=$ 餘股.而 AE 弦之內外,分二句股;其一,句中容橫,如 CF 長方形,其一,股中容直,如 BC 長方形,二積之數皆同,即 $\square BC=\square CF$,故 $AG=\dfrac{BD\times CD}{DE}$.楊輝又曰「凡句中容橫,股中容直,二





積皆同,古人以題易名,若非釋名,則無以知其源」.於海島第一題,因 $\square BC=\square CF$, 而 $DE=$ 小餘股;又因 $\square BJ=\square JH$, 而 $KL=$ 大餘股. 故 $\square BJ-\square BC=\square JH-\square CF$, 卽 $\square DJ=\square JH-\square CF$, 卽 $CD\times DK=(KL-DE)\times AG$, $\therefore c_1\times d=(a-b)\times AG$, 卽 $AG=\frac{c_1\times d}{a-b}$, 而 $x=\frac{c_1\times d}{a-b}+c_1$ 矣. 明·利瑪竇,徐光啓譯幾何原本, 其第一卷,第四十三題稱「凡方形對角線旁兩餘方形 (Complements of a Parallelogram) 自相等」,輝所取者,蓋此義也.

元·朱世傑四元玉鑑(1303)卷中有句股測望八問,其後五問卽海島算經之第一問至第四及其第七問. 而第四問之求表去城 (y), 第六問之求表去城 (y) 均如重差術. 其餘則以立天元一如積求之,亦得相同之結果.

元·舒天民六藝綱目卷下引劉徽九章算術序文「立兩表於洛陽之城……」以下,稱爲魏·劉徽句股重差術.

6. 重差術之衰廢.

明代舊算事業,頗爲衰廢. 永樂大典雖曾收錄海島算經而流傳不廣. 唐順之 (1507–1560) 荊川文集卷十二「句股測望論」所言亦不詳備. 顧應祥

(1483－1565)句股算術(1533),及周述學曆宗算會(1558)卷三所引海島題問幷脫去第五,第七,二題.而海島第三題,解為 $x=\frac{b(c-c_1)}{f-b}+c,\ y=\frac{b(e-f)}{f-b}$ 則頗明顯.程大位算法統宗(1593)卷八之「海島題解」僅因襲宋·楊輝續古摘奇算法解法,別附歌訣二首而已.至重差術第二題以下圖解,尙無顧應祥,周述學之詳.明季西算輸入中國,利,徐之測量法義第十題「以表測高」,徐光啓之測量異同第四題「以重表兼測無遠之高,無高之遠」,第六題「以重矩兼測無廣之深,無深之廣」,則實用幾何原本以解重差術也。

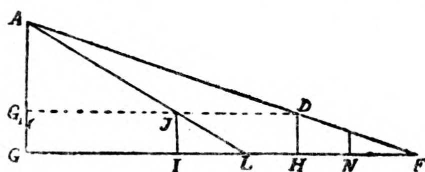
測量法義欲於下圖之 $IJ=HJ=c_1, FH=a, IH=d,$

$LI=b,$

$NH=a-b,$

$FL=$距較,

$GA=x,$



證明 $\frac{NH}{HD}=\frac{FL}{GA}$, 或 $x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1.$

因 $\frac{FH}{FG}=\frac{HD}{GA}$, 又 $\frac{LI}{LG}=\frac{IJ}{GA}$, 令 $FN=LI,$

則 $\frac{FH}{FG}=\frac{LI}{LG}=\frac{FN}{LG},$

$$\frac{FH}{FG}=\frac{NH}{FL}$$（幾何原本,第五卷,第十九題）

因　$\frac{FH}{FG}=\frac{HD}{GA}$，故　$\frac{NH}{HD}=\frac{FL}{GA}$，

即　$\frac{a-b}{c_1}=\frac{a+d-b}{x}$，　$x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1$ 也.

測量異同第四題,則證舊用表間 IH,今用距較 FL,其實理論相同,而 $\frac{HD}{HN}=\frac{G_1A}{IH}$ 爲舊式,$\frac{HD}{HN}=\frac{GA}{FL}$ 爲新式,就中 $\frac{G_1A}{(G_1J)}=\frac{GA}{(GL)}$，又 $\frac{(G_1J)}{IH}=\frac{(GL)}{FL}$,兩式相乘得 $\frac{G_1A}{IH}=\frac{GA}{GL}$，$\therefore\ x=\frac{c_1d}{a-b}+c_1$ 也. 至求 y 之遠,則因 $\triangle AG_1D$, DHF 爲相似三角形,則 HF,G_1D 爲相似邊,又因 $\triangle AG_1J$, JIL 爲相似三角形,則 IL,G_1J 爲相似邊.$\therefore HF:G_1D::IL:G_1J$.

即　$\frac{HF}{IL}=\frac{G_1D}{G_1J}$，或　$\frac{HF-IL}{IL}=\frac{G_1D-G_1J}{G_1J}$，

$\frac{a-b}{b}=\frac{d}{y}$，　$\therefore\ y=\frac{bd}{a-b}$.

而明季由西洋輸入者,又有「矩度」或「象限儀」(Quadran) 測量之說.詳熊三拔之表度說及徐光啓之測量法義卷中,頗爲一時所宗.入清而方中通之

數度衍(1661)卷七「器測」篇,黃百家之句股矩測解原(1679?)梅文鼎之三角法舉要(1684?)卷五「測量」篇,陳訏之句股述(1683)卷二「矩度說」等篇,年希堯之測算刀圭(1718)「三角測高」等篇,陳訏之句股引蒙(1722)「西法矩度測量」篇,莊亨陽之莊氏算學「矩度測量」篇,屠文漪之九章錄要卷十一之三「矩測高」等篇,幷著其說.而重差術第一題,亦有解說,如:方中通之數度衍(1661)卷七「測量」篇,李子金之算法通義(1676)卷一「立表測高之法」篇,杜知耕之數學鑰(1681)卷六「日晷測高」等篇,陳訏之句股述(1683)卷二「立表測高」等篇,毛宗旦之九章蠡測「測望法」篇,楊作枚之句股闡微卷一「句股重測高遠」篇,梅文鼎之句股闡微卷四「測量用影差義疏」篇,陳訏之句股引蒙(1722)「立表測高」等篇,莊亨陽之莊氏算學「句股測量」篇,屠文漪之九章錄要卷十一之三,「表測高」等篇,所論多不出楊輝,程大位之範圍.

7. 重差術之再興.

海島算經散見明永樂大典中,清乾隆間開四庫館,戴震(1724—1777)裒而輯之,仍爲一卷,篇帙無

多,而古法具在,戴震與九章同爲表章.其見於四庫全書者,有提要一首,題乾隆四十年(1775)四月校上.見於孔繼涵(1739–1783)所刻算經十書者,末有乾隆乙未(1775)夏四月休寧戴震跋語一篇,文與提要相同.自此重差術全篇乃見傳於世.顧十書雖再刻於常熟屈氏,而補註考證,尙未追也.鍾祥李潢(?–1811)乃爲之註,并應用同式形兩兩相比,加補圖說.其自序稱「圖中以四邊形五邊形立說,似與句股不類……」書甫寫定,潢卽一病不起,似其證註尙有遺憾也.沈欽裴校正李潢九章算術細草九卷,補演海島算經一卷.駱騰鳳校刋李潢海島算經細草圖說,亦無多改正.其後嘉慶甲戌(1814)紀大奎(1746–1825)筆算便覽卷四「句股重差各訣」則以筆算演海島題問.光緒五年(1879)李鏐於戴輯海島算經九題之外,從六藝綱目所引補入第十題,又以天元一術校衍,都爲一卷,題「海島緯筆」爲衍元海鑑第三種.光緒十八年(1892)江蘇書局校刊顧觀光(1799–1862)遺著九數存古,其卷九引劉徽九章序及其重差術,并錄李潢所補圖說焉.光緒壬寅(1902)張松溪句股題鏡卷二,以形學代數演海島題問.

玆復不揣拙陋,設爲新註,令各題作圖形勢相當,俾可疊相襲用,并避去四邊形,五邊形之說,其第一題則從李潢之舊,設爲平行線,求其相似三角形各邊之比例焉.

大衍求一術之過去與未來

目次

1. 孫子算經關於大衍求一術之問題。

2. 大衍求一術問題之新記法。

3. 宋·周密之鬼谷算。

4. 宋·楊輝之翦管術。

5. 明·嚴恭之管數。

6. 明·周述學之總分。

7. 明·程大位之孫子歌。

8. 宋·秦九韶以外各家學說之源流。

9. 宋·秦九韶大衍求一術。

10. 大衍求一術之起原及其復興。

11. 清·張敦仁之訓解。

12. 清·焦循李銳之論著。

13. 清·駱騰鳳之新法。

14. 清·時曰醇之歌訣。

15. 清·黃宗憲之新解。

16. 大衍求一術與曆法之應用。

17. 大衍求一術在日本之影響。

18. 大衍求一術在世界數學史上之位置。

19. 大衍求一術與連分數。

20. 大衍求一術與百雞術。

21. 大衍求一術與不定方程。

22. 何承天調日法與零約。

23. 晚近關於求一術之論著。

1. 孫子算經關於大衍求一術之問題

孫子算經卷下載「今有物不知其數」(註)一題,爲後世大衍求一術之起原.今錄其題術如下:

「今有物不知其數,三三數之賸二,五五數之賸三,七七數之賸二,問物幾何.

答曰二十三.

術曰,三三數之賸二,置一百四十;五五數之賸三,置六十三;七七數之賸二,置三十;幷之,得二百三十三,以二百一十減之卽得.

凡三三數之賸一,則置七十;五五數之賸一,則置二十一;七七數之賸一,則置十五一百六以上,以一百五減之,卽得」.

(註)本篇凡引用原文者用「……」記號,引用小註者用〔……〕記號.

2. 大衍求一術問題之新記法

上之題問,為便利起見,可書為

$$\left|\frac{N}{3}=2,\quad \left|\frac{N}{5}=3,\quad \left|\frac{N}{7}=2.\right.\right.\right.\quad 或\quad \frac{N}{(3,5,7)}(=2,3,2).$$

應用此記法者,為徐震池.見其所著「商餘求原法」,載在科學第十卷第二期(十四年五月).未有此新記法之前,則借用同餘式(Congruence)之符號表之.如上題可記為 $N\equiv 2\ (\mathrm{mod.}\ 3)\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 5)\equiv 2\ (\mathrm{mod.}\ 7)$ 是也.

3. 宋·周密之鬼谷算

宋·周密,志雅堂雜鈔,卷下,「陰陽算術」條,載:「鬼谷算,一名隔牆算.其法先將錢不拘多少,三數數之,凡遇剩一則下七十,二則下百四十;次五數數之,剩一則下二十一,二則下四十二;次七數數之,剩一則下十五,二則下三十.總計其數,然後退一百五,或多則退二百十.之外餘者,即是見在錢數也.有一詩隱括云:

三歲孩兒七十稀　五留廿一事尤奇

七度上元重相會　寒食清明便可知

「案此法,取相乘之數也.如三則以五七相乘數倍

之,五則以三七相乘之數,七則以三五相乘之數,合之得百零五]」.

4. 宋·楊輝之翦管術

宋·楊輝續古摘奇算法(1275)載:

「物不知總數,只云三三數之剩二,五五數之剩三,七七數之剩二,問本總數幾何.[孫子]

答曰二十三.

解題.[俗名秦王暗點兵,猶覆射之術,或過一百五數,須於題內云知].

(翦管)術曰,三數剩一下七十.[題內剩二,下百四十].五數剩一,下二十一.[題內剩三,下六十三].七數剩一,下十五.[題內剩二,下三十].三位併之,[得二百三十三].滿一百五數去之.減兩個一百五,餘二十三爲答數.今續四問:

(a)用工不知其數,差人支犒,每三人支肉一斤,剩五兩八銖[是三數剩二].每五人支錢一貫,剩零四百[是五數剩三].每七人支酒一瓻,恰攛成瓻[是七數無剩].問總工所支各幾何.

(答曰) 九十八人. 錢一十九貫六百文.

酒十四瓻. 肉三十二斤一十兩十

六銖.

草曰三剩二[下百四十]五剩三[下六十三]七無剩不下.併之,[得二百三].減一百五,餘九十八工.以二百乘工數爲錢數,七除工數爲酒,三除爲肉.

(b) 七數剩一,八數剩二,九數剩三,問本總數幾何.

(答曰) 四百九十八.

術曰,七餘一,下二百八十八.[題內餘一,下二百八十八].八餘一,下四百四十一.[題內餘二,下八百八十二].九餘一,下二百八十.[題內餘三,下八百四十].併之,[二千一十]滿五百四,去之.[去三個五百四]餘[四百九十八]合問.

(c) 十一數餘三,十二數餘二,十三數餘一,問元總數幾何.

(答曰) 一十四.

術曰,十一餘一,下九百三十六.[題內餘三,下二千八百八].十二餘一,下一千五百七十三.[題內餘二,下三千一百四十六].十三餘一,下九百二十四.[題內餘一,下九百二十四].併之,[六千八百七十八].滿總法一千七百一十六,

去之.[去四個一千七百一十六]餘[十四]合問.

(d) 二數餘一,五數餘二,七數餘三,九數餘四,問元總數幾何.

(答曰) 一百五十七.

術曰,二數餘一,下三百十五.[題內餘一,下三百一十五].五數餘一,下一百二十六.[題內餘二,下二百五十二].七數餘一,下五百四十.[題內餘三,下一千六百二十].九數餘一,下二百八十.[題內餘四,下一千一百二十].併之,[三千三百零七].滿總法六百三十,去之.[去五個六百三十]餘[一百五十七]爲答數合問.

5. 明·嚴恭之管數

明初嚴恭通原算法(1372)載:

「今有散錢不知其數,作七十七陌穿之,欠五十湊穿,若作七十八陌穿之,不多不少.問錢數若干.[此係管數卻非不足適足].

答曰二千一百六文.

術曰,列七十八自乘,得六千八十四,又以七十七減欠五十餘二十七,乘頭位得一十六萬四千二百六十八.別以七十八,七十七相乘得六

千六,減除頭位,實不滿法,卻合前問.[若以七十八數有零,當五千九百二十九乘].(註)」

6. 明·周述學之總分

明周述學神道大編,歷宗算會(1558)卷十「總分」條稱:「若非盈不足,而惟各餘率者,或以三,五,七;或以七,八,九參伍之餘,而布例下之數,如滿會數去之,餘爲得所求之總也.若以二,三,四參伍之,而無餘率者,須有一總以求之(下略).」

7. 明·程大位之孫子歌.

明·程大位算法統宗(1593)卷五載:

「物不知總　孫子歌曰[又云韓信點兵也]

三人同行七十稀,　五樹梅花廿一枝,

七子團圓正半月,　除百令五便得知.

今有物不知數,只云三數剩二個,五數剩三個,

(註) 蓋 $\left|\frac{N}{(A=77)}\right.=77-50=27=a,\qquad \left|\frac{N}{(B=78)}\right.=0=b.$

$\left|\frac{Y_1}{A}\right.=\frac{78}{77}$,而 $\left|\frac{78(=\alpha)\times78}{77}\right.=1,\ \left|\frac{Y_2}{B}\right.=\left|\frac{77}{78}\right.,$

而 $\left|\frac{77(=\beta)\times77}{78}\right.=1,\ \theta=77\times78=6006.$

$$a\alpha Y_1=27\times78\times78=164264,\quad b\beta Y_2=0\times77\times77=0.$$

$$N=\Sigma a\alpha Y_1-R\theta=164264-27\times6006=2106.$$

此註可於閱至第9節後再參觀之.

七數剩二個,問共若干.答曰共二十三個.

法曰,列3,5,7維乘,以3乘5得15,又以7乘之,得105爲滿錢數,列法.另以3乘5得15,爲7數剩一之衰.又以3乘7得21,爲5數剩一之衰.又以5乘7得35,倍作70爲3數剩一之衰.其3數剩2者,剩1下70,剩2下140;5數剩3者,剩1下21;剩2下42,剩3下63;7數剩2者,剩1下15,剩2下30.併之得232,內減去滿數105,又減105餘23個合問.」

程氏歌訣,流傳最廣,近則婦孺盡曉,(參觀第12節),遠亦流布東瀛,(參觀第17節).市閭算籍,多樂以歌訣演其題問,如譚文數學尋源(1750)卷四之「太平蓮燈」題,蓋其一例也.梅瑴成(1681—1763)增删算法統宗(1760)因亦未將孫子歌删去,蓋有由也.

8. 宋·秦九韶以外各家學說之源流

觀上所記,知此題術,除秦氏大衍術外,初無統一之專名.宋·楊輝稱翦管術,明·嚴恭稱管數,而孫子有賸一,楊輝有剩一,餘一,總法,周述學有餘率,會數,程大位有剩一之衰,滿數各名詞.蓋大衍術爲秦九韶所發明,不必卽本諸龍受益,王守忠之求一算術.

且宋·沈括(1030—1094)夢淡筆談卷十八云「算術多門,如求一,上驅,搭因,重因之類,皆不離乘除.」楊輝乘除通變算寶(1274)有「求一」代乘除之說.元·賈亨算法全能集卷上歌曰,「求一明教置兩停,二三折半四三因,五之以上二因見,去一除令要定身」.又稱「此法未免重複下算,終不若今人用此歸除法爲捷徑.論之,二法名雖不同,究所用以分之,其實則一.既有歸除,本不用此求一,然古有是法又不容不載,以廣算者之知耳」.沈,楊,賈所稱求一,爲算乘除捷法之一,或龍受益,王守忠亦是論述此種算法.今龍,王書已逸,無可依據,暫置不論.此外宋史卷二百七藝文志第一百六十尚有張祚注法算三平化零歌一卷,龍受益求一算術化零歌一卷,「求一」與「化零」雖有連帶關係,實際亦不得其詳.至於南宋何承天(370—447)調日法用強弱二率以求日法,朔餘.清·李銳(1768—1817)爲作「日法朔餘強弱考」大致或尚相近也.

9. 宋·秦九韶大衍求一術

秦九韶數書九章(1247)共十八卷.第一卷及第二卷屬大衍類,而其

「大衍總數術曰,置諸問數,一曰元數[謂尾位見單零者…]二曰收數[謂尾位見分釐者…],三曰通數[謂諸數各有分子母者,…],四曰復數[謂尾位見十或百及千以上者,…]

秦氏先將有理數,分爲整數(卽元數),小數(卽收數),分數(卽通數),10^n倍整數(卽復數)數種.秦氏又曰:

「元數者,先以兩兩連環求等,約奇弗約偶[或約得五,而彼有十,乃約偶而弗約奇],或元數俱偶,約畢,可存一位見偶,或皆約而猶有類數存,姑置之,俟與其他約徧,而後乃與姑置者求等約之,或諸數皆不可盡類,則以諸元數命曰復數,以復數格入之」.

兩兩連環求等,卽求最小公倍數(L. C. M.),其言約奇弗約偶,蓋欲約後無等,如6, 4,則應作3, 4.又如25, 10,則應作25, 2.不可作6, 2,或5, 10.如連環求等皆得1,則不約,若:

(9)「餘米推數」題之19,17,12約後亦得19,17,12.其可約者,若:

(1)「蓍卦發微」題之1, 2, 3, 4,約之

1, 2, | 3, 4,

約數(2) 3, 2,

得 1, 2, 3, 2.

或 1, 1, 3, 4. 爲定數

(4)「推庫額錢」題之12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 約之

12, 11, 10, 9, 8, 7, | 6,

約數(6) 12, 11, 10, 9, | 8, 7,

約數(2) 1, 11, 5, 9,

得 1, 11, 5, 9, 8, 7, 6.

因9, 8, 6中9與6約6得2; 8又與2約2得1.

故得 1, 11, 5, 9, 8, 7, 1.

(5)「分類推原」題之83, 110, 135,約之

83, 110, | 135,

約數(5) 27,

得83, 110, 27爲定數.

(8)「積尺尋源」題之130,120,110, 100, 60, 50, 25, 20,約之

130,120,110, 100, 60, 50, 25, | 20,

約數(5) 26, 24, 22, 20, 12, 10, | 5,

約數(5) 26, 24, 22, 4, 12, | 2,

約數(2) 13, 12, 11, 2, | 6,

約數(6) 13, 2, 11, | 2,

約數(2) 13, 1, 11,

得 13,1,11,2,6(=3×2),2,5,20(=5×4)

或 13,8,11,1,3,1,25,4.

卽 13,8,11,1,3,1,25,1 爲定數.

秦氏又曰:

「收數者,乃命尾位分釐作單零,以進所問之數,定位訖,用元數格入之.或如意立數爲母,收進分,釐,以從所向,用過數格入之」.

「通數者,置問數通分內子互乘之,皆曰通數,求總等,不約一位,約衆位,得各元位數,用元數格入之,或諸母數繁,就分從省通之者,皆不用元,令母仍求總等.存一位,約衆位,亦各得元位數,亦用元數格入之」.

如其數爲分數,則先通分納子,而後約之,如;

(2)「古曆會積」題之 60, $29\frac{499}{940}$, $365\frac{1}{4}$ 先通分納子

得 225600, 111036, 1373340 約之

225600, | 111036, 1373340,

約數 12×235 　　 487×19, | 487,

約數 487 　　 1,

得 225600, 487×19, 1.

或 225600, 19, 487 爲定數.

秦氏又曰:

「復數者,問數尾位見十以上者.以諸數求總等,存一位,約衆位,始得元數.兩兩連環求等.約奇弗約偶,復乘偶.或約偶弗約奇,復乘奇.或彼此可約,而猶有類存者,又相減以求續等.以續等約彼,則必復乘此,乃得定數.所有元數,收數,通數三格,皆有復乘求定之理,悉可入之」.

例如

(3)「推計土功」題之54, 57, 75, 72有總等3,約之

約數(3) 　　 54, 19, 25, 24, 又反約之

得 　　 9, 19, 25, 24,

或 　　 27, 19, 25, 8 爲定數.

(6)「程行計地」題之300, 240, 180有總等60,約之

約數(60) 　　 300, 4, 3,

或 　　 100, 4, 9,

或　　　　25, 16, 9爲定數.

(7)「程行相反」題之300, 250, 200有總等50,約之

約數(50)　　　　6, 250, 4,

或　　　　3, 250, 8,

或　　　　3, 125, 16爲定數.

秦氏又曰:

「求定數,勿使兩位見偶.勿使見一太多.見一多則借用繁……」.

蓋求定數,欲各問數化爲不可約之定數,故不使兩位見偶,見偶可并之,如

(1)題2之爲4,

(3)題5之爲25,

(3)題9之爲27,

(6)題4, 3之爲16, 9,

(7)題4之爲8爲16是也,但并後之定數,不能大於問數.

勿使見一太多,亦可并之,如

(3)題1之爲8,

(2)題1之爲487是也.但并後之定數,亦不能大於問數.

并後尚有等數,亦可約之,如

(4)題 9, 8, 6 約之得 9, 8, 1,

(8)題 8, 4 約之得 8, 1 是也.

以上爲「求定數」.至「借」之解析,另詳於後」.

秦氏又曰:

「不欲借則任得一,以定相乘爲衍母,以各定約衍母,各得衍數」.

如(9)題衍母 $=19\times17\times12=\theta$

衍數 $=\frac{\theta}{19}, \frac{\theta}{17}, \frac{\theta}{12}$, 或 204, 228, 323.

(1)題衍母 $=1\times1\times3\times4$

衍數 $=12, 12, 4, 3$.

(8)題衍母 $=13\times8\times11\times1\times3\times1\times25\times1=85800=\theta$

衍數 $=6600, 10725, 7800, (85800), 28600, (85800)$,

3432, (85800) 是也.

蓋 $A, B, C, D, \cdots\cdots$ 各「問數」之最小公倍數卽「衍母」爲 θ, 而「定數」$A', B', C', D', \cdots\cdots$ 等連乘積亦爲 θ. 則

$\left|\frac{\theta}{(A', B', C', D', \cdots)}=0\right.$. 其除得之實爲「衍數」,卽

$\frac{\theta}{A'}=(B'C'D'\cdots)=Y_1, \quad \frac{\theta}{B'}=(A'C'D'\cdots)=Y_2, \quad \frac{\theta}{C'}=$

$(A'B'D'\cdots)=Y_3$.

以上為「求衍數」.

秦氏又曰:

「諸衍數$(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,\cdots\cdots)$各滿定母$(A',B',C',D',\cdots\cdots)$去之,不滿曰「奇」$(G_1,G_2,G_3,G_4,\cdots\cdots)$,以「奇」與「定」用大衍求一入之,以求乘率$(\alpha)$.[或奇得一,便為乘率]」.

如上述 $Y_1-t_0'A'=G_1$, $Y_2-t_0''B'=G_2$, $Y_3-t_0'''C'=G_3$.

或 $\left|\frac{Y_1}{A'}\right.=\left|\frac{G_1}{A'}\right.$, $\left|\frac{Y_2}{B'}\right.=\left|\frac{G_2}{B'}\right.$, $\left|\frac{Y_3}{C'}\right.=\left|\frac{G_3}{C'}\right.$.

蓋 $Y_1-t_0'A'$ 或 G_1 以 A' 除之,其餘數相同也.

以上為「求奇數」幷為大衍求一術之引論.秦氏稱為大衍總數術,其中實含若干數之理論.次述「大衍求一術」.

秦氏「大衍求一術云,置「奇」右上,「定」居右下,立「天元一」於左上,先以右下除右上,所得商數與左上一相生,入左下然後以右行上下,以少除多,遞互除之,所得商數,隨卽遞互累乘,歸左行上下,須使右上末後奇一而止乃驗左上所得,以為「乘率」.或「奇」數已見單一者便為乘率」.

依上術意,演例如下: 即 $\left|\frac{65}{83}\right.$ 令 $\left|\frac{\alpha.65}{83}\right.=1$, 求 α, 法

列甲奇數65於右上,甲定母83於右下,立天元一於左上,空其左下,如:

天元 $\alpha_0=1$	奇數 $G_1=65$	(上)(註)
0	定母 $A'=83$	(下)
(左)	(右) $q_1=1$.	

以右上少數(65),除右下多數(83),得1爲商 $(q_1=1)$,以商1乘左上1,得1,$(\alpha_1=q_1\times\alpha_0=q_1)$,歸左下,其右下餘18$(r_1=18)$,如:

$\alpha_0=1$	$G_1=65$
$\alpha'_1=q_1\alpha_0=1$	$r_1=18$
	$q_1=1$

以右下少數定餘(18),除右上多數奇數(65),得3爲商$(q_2=3)$,以商3乘左下歸數1得3,$(\alpha_2=q_2\alpha_1=3)$,加入於左上,得4$(q_2\alpha_1+\alpha_0=4)$其右上餘11$(r_2=11)$,如:

(註)Le Rév. Père Vanhée 作十字號以界之,較見明顯,茲從其例,參讀18節。

	$q_2=3$
$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0=4$	$r_2=11$
$\alpha_1=1$	$r_1=18$

以右上少數奇餘$(r_2=11)$,除右下多數定餘$(r_1=18)$,得1爲商$(q_3=1)$,以商1乘左上4得4 $(q_3\alpha_2=4)$,歸左下得5,$(q_3\alpha_2+\alpha_1=5)$,其右下餘7$(r_3=7)$,如:

$\alpha_2=4$	$r_2=11$
$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1=5$	$r_3=7$
	$q_3=1$

以右下少數定餘$(r_3=7)$除右上多數奇餘$(r_2=11)$得1爲商$(q_4=1)$,以商1乘左下歸數5得5,$(q_4\alpha_3=5)$,加入於左上得9,$(q_4\alpha_3+\alpha_2=9)$,其右上餘4$(r_4=4)$如:

	$q_4=1$
$\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2=9$	$r_4=4$
$\alpha_3=5$	$r_3=7$

以右上少數奇餘$(r_4=4)$除右下多數定餘$(r_3=7)$得1爲商$(q_5=1)$,以商1乘左上歸數9得9,$(q_5\alpha_4=9)$,加入於左下得14$(q_5\alpha_4+\alpha_3=14)$,其右下餘3 $(r_5=3)$如:

$$\begin{array}{r|l} \alpha_4=9 & r_4=4 \\ \hline \alpha_5=q_5\alpha_4+\alpha_3=14 & r_5=3 \\ & \\ & q_5=1 \end{array}$$

以右下少數定餘($r_5=3$)除右上多數奇餘($r_4=4$)得1爲商($q_6=1$),以商1乘左下歸數14得14,($q_6\alpha_5=14$),加入於左上得23($q_6\alpha_5+\alpha_4=23$),其右上餘1($r_6=1$)如:

$$\begin{array}{r|l} & q_6=1 \\ & \\ \alpha_6=q_6\alpha_5+\alpha_4=23 & r_6=1 \\ \hline \alpha_5=14 & r_5=3 \end{array}$$

驗至右上奇餘得1($r_6=1$),只以左上所得23爲甲乘率($\alpha=\alpha_6=23$).以上所得必n爲偶次,秦氏所謂「須使右上末後奇一而止」是也.所求乘率蓋使 $\left|\frac{\alpha G_1}{A'}\right.=1$,如此例 $\left|\frac{23\times 65}{83}\right.=1$, 卽乘率乘奇數以除定母剩餘爲一也.

玆參錢寶琮「求一術源流考」(學藝第三卷第四號十年八月)得次式:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2} & r_n \qquad 而 \left|\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right.=r_n, \qquad q_n=q_n, \\ \alpha_{n-2}=q_{n-2}\alpha_{n-3}+\alpha_{n-4} & r_{n-2} \qquad \left|\frac{r_{n-4}}{r_{n-3}}\right.=r_{n-2}, q_{n-2}=q_{n-2}, \end{array}$$

	（左）	（右）		
	…………………	…………	…………，	…………，
	…………………	…………	…………，	…………，
	$a_6=q_6a_5+a_4$	r_6	$\left\vert\frac{r_4}{r_5}\right.=r_6$，	$q_6=q_6$，
	$a_4=q_4a_3+a_2$	r_4	$\left\vert\frac{r_2}{r_3}\right.=r_4$，	$q_4=q_4$，
	$a_2=q_2a_1+a_0$	r_2	$\left\vert\frac{G}{r_1}\right.=r_2$，	$q_2=q_2$。
天元	$a_0=1$	奇G（上）		
	0	定A（下）		
	$a_1=q_1$	r_1 而	$\left\vert\frac{A}{G}\right.=r_1$，	$q_1=q_1$，
	$a_3=q_3a_2+a_1$	r_3	$\left\vert\frac{r_1}{r_2}\right.=r_3$，	$q_3=q_3$，
	$a_5=q_5a_4+a_3$	r_5	$\left\vert\frac{r_3}{r_4}\right.=r_5$，	$q_5=q_5$，
	…………………	…………	…………，	…………，
	…………………	…………	…………，	…………，
	$a_{n-3}=q_{n-3}a_{n-4}+a_{n-5}$	r_{n-3}	$\left\vert\frac{r_{n-5}}{r_{n-4}}\right.=r_{n-3}$，	$q_{n-3}=q_{n-3}$，
	$a_{n-1}=q_{n-1}a_{n-2}+a_{n-3}$	r_{n-1}	$\left\vert\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}\right.=r_{n-1}$，	$q_{n-1}=q_{n-1}$。
	（左）	（右）		

大衍求一術遞除累乘因得乘率,而奇數可以得一之故,可以代數式證之,下列證法,見(科學第十卷二期).

「更設 $\mu_2=q_2$, $\mu_3=q_3\mu_2+1$, $\mu_4=q_4\mu_3+\mu_2$, …… $\mu_k=q_k\mu_{k-1}+\mu_{k-2}$, …… $\mu_n=q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}$.

依術得 $r_1=A-q_1G=A-\alpha_1G$.

$r_2=G-q_2r_1=G-q_2(A-\alpha_1G)=(q_2\alpha_1=1)G-q_2A=\alpha_2G-\mu_2A$.

$r_3=r_1-q_3r_2=(A-\alpha_1G)-q_3(\alpha_2G-\mu_2A)=\mu_3A-\alpha_3G$.

$r_4=r_2-q_4r_3=(\alpha_2G-\mu_2A)-q_4(\mu_3A-\alpha_3G)=\alpha_4G-\mu_4A$.

……………………………………

$r_{n-1}=\mu_{n-1}A-\alpha_{n-1}G$.

$r_n=\alpha_nG-\mu_nA$.

$\therefore \quad \alpha_nG=\mu_nA+r_n$.

即 $\left|\frac{\alpha_nG}{A}\right.=\left|\frac{\mu_nA+r_n}{A}\right.=r_n$.

若 $r_n=1$, 則 $\left|\frac{\alpha G}{A}\right.=1$, $\left|\frac{\alpha Y}{A}\right.=1$」.

秦氏又曰:

[置各乘率,對乘衍數,得「泛用」.併泛,課衍母多一者,爲正明.或泛多衍母倍數,驗元數奇偶同類者,損其半倍,[或三處同類,以三約衍母,於三處損之]各爲正用數.或定母得一,而衍數同衍母者,爲無用數.當驗元數同類而正用至多處借之;以元數兩位求等,以等約衍母爲借數,以借數損有,以益其無,爲正用.或數處無者,如意立數爲母;約衍母,所得以如意子乘之,均借補之.或欲從省勿借,任之爲空可也.然後其餘各乘正用,爲各總併總,滿衍母去之,不滿爲所求率也」.

如術意

	元數	定母	衍數	乘數	泛用
1	A	A'	Y_1	α	αY_1
2	B	B'	Y_2	β	βY_2
3	C	C'	Y_3	γ	γY_3
4	C	C'	Y_3	γ	γY_3

則 $\left|\dfrac{\Sigma \alpha Y_1}{(A'B'C'\cdots)}=1\right.$ 或 $\left|\dfrac{\Sigma \alpha Y_1}{\theta}=1.\right.$

設(a)$\Sigma\alpha Y_1=m\theta'+1$, 而 $\theta=m\theta'$, $m=1$.

則 $\Sigma\alpha Y_1=\alpha Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3+\cdots\cdots$ 中各數卽爲正用.

(b)$\Sigma\alpha Y_1=m\theta'+1$, 而 $\theta=m\theta'$, $m>1$.

則在 $A,B,C,\cdots\cdots$ 元數,及 $A',B',C'\cdots\cdots$ 定母中,如元數中任兩數,或兩數以上,含有同類數(卽公因數 common factor) m. 則 A', B', $C',\cdots\cdots$ 之連乘積 θ 或 $m\theta'$, 亦必含 m, 而此公因數 m 在 A, B, C, $\cdots\cdots$ 元數中便於察出.既將 m 察出,則以 $m\theta'=m_1\theta'+m_2\theta'+m_3\theta'+\cdots\cdots$ 而 $m=m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots$ 其中 $m_1\theta'$, $m_2\theta'$, $m_3\theta'$, $\cdots\cdots$ 分別於 $\Sigma\alpha Y_1$ 內各數之含有公因數 m 者酌量減去,使

$$\Sigma\alpha Y_1'=m\theta'+1,\ 而\ m=1.$$

則 $\Sigma\alpha Y_1'$ 中各數爲正用.此爲第一段解義.

如定母 $A',B',C',\cdots\cdots$ 中之某數爲1, 則其衍數 Y_k 與衍母 θ 同值,而其數無用數,當於多處借之.其法於元數中求同類數 m, 以 $m_1\theta'$, $m_2\theta'$, $\cdots\cdots$ 爲借數,以之減正用中之多者,而益其無用數者,乃得正用.故秦氏曰:「求定數,……,勿使見一太多,見一多借用繁」也.或不借,任之爲空亦可.

泛用如不減,得數亦無異,遇問數繁多減之可以省算,蓋以

$$\left|\frac{\Sigma\alpha Y_1}{\theta}=1,\right. \text{變為} \left|\frac{\Sigma\alpha Y_1'+m\theta'}{\theta}=1.\right.$$

因 $\left|\frac{m\theta'}{\theta}=0\right.$，故 $\left|\frac{\Sigma\alpha Y_1'}{\theta}=1\right.$，就中 $\Sigma\alpha Y_1'$ 較 $\Sigma\alpha Y_1$ 為省算.

最後再示其應用,例如某數 N 以 $A,B,C,\cdots\cdots$ 各除之,其餘為 $a, b, c, \cdots\cdots$.以其餘乘正用 $\alpha Y_1, \beta Y_2, \gamma Y_3,\cdots\cdots$ 為各總,併總,滿衍母 θ 去之.所餘為得數.

用數為 $\alpha Y_1=\alpha(B'C'\cdots\cdots)$，$\beta Y_2=\beta(A'C'\cdots\cdots)$，$\gamma Y_3=\gamma(A'B'\cdots\cdots)$.

各總為 $a\alpha Y_1=a\alpha(B'C'\cdots\cdots)$,$b\beta Y_2=b\beta(A'C'\cdots\cdots)$,$c\gamma Y_3=c\gamma(A'B'\cdots\cdots)$.

$$R\theta=R(A'B'C'\cdots\cdots).$$

故 $\left|\frac{b\beta Y_2}{A}=0,\right.$ $\left|\frac{c\gamma Y_3}{A}=0,\right.$ $\left|\frac{R\theta}{A}=0,\right.$ $\left|\frac{a\alpha Y_1}{A}=a.\right.$

或 $\left|\frac{N}{A}=\right.\left|\frac{\Sigma a\alpha Y_1-R\theta}{A}=\right.\left|\frac{a\alpha Y_1}{A}=a.\right.$

同理 $\left|\frac{N}{(A,B,C,\cdots)}=\right.\left|\frac{\Sigma(a\alpha Y_1)-R\theta}{(A,B,C,\cdots\cdots)}=(a, b, c,\cdots\cdots)\right.$

10. 大衍求一術之起原及其復興

大衍求一術原於孫子,而秦氏數書九章,卻無隻字提及.宋•淳祐七年(1247)九月其自序稱「今數

術之書,尚三十餘家,天象歷度,謂之綴術,太乙壬甲,謂之三式,皆有內算,言其祕也.九章所載,卽周官九數,繫於方圓者曰㝡術,皆曰外算,對內而言也.其用相通,不可歧二.獨大衍法不載九章,未有能推之者,歷家演法,頗用之以爲方程者誤也.……」.觀此則秦氏蓋以歷家以爲方程,因別立大衍術以解析之也.楊輝雖與秦同時,而題意一本孫子,且號爲翦管術直至其後一紀,嚴恭尚稱爲管數.是在宋代,此術用於算術者爲翦管術,用於歷府者爲大衍術.秦氏著書永樂時納入永樂大典.清·乾隆開四庫館從大典中鈔出.其後李銳(1768−1817)幷爲之校.道光間(1821−1850)沈欽裴曾得李潢(−1811)藏明·趙琦美(1563−1624)鈔本於張敦仁(1754−1834)家.沈,張於此書共加校正.道光二十二年(1842)宋景昌因李兆洛(1769−1841)藏沈校本,及毛嶽生(1790−1831)覆校李銳校本,參酌訂補,別爲札記,由郁松年刋入宜稼堂叢書中.

而張敦仁求一算術三卷(1803),駱騰鳳(1770−1841)藝游錄二卷(1843刋),時曰醇求一術指一卷,黃宗憲求一術通解二卷(1874),幷於此術有所發明.

11. 清·張敦仁之訓解.

張敦仁求一算術上卷分「求等」,「約分」,「再約」,「連環求等」,「連環相乘」,「大衍求一」各步.其「大衍求一」中求乘率(α)列式之序爲

第一數 $\left|\frac{A}{G}\right.=r_1,\quad q_1=q_1,\quad$ 得 $\alpha_0=1,$

第二數 $\left|\frac{G}{r_1}\right.=r_2,\quad q_2=q_2,\quad \alpha_1=q_1\alpha_0=q_1,$

第三數 $\left|\frac{r_1}{r_2}\right.=r_3,\quad q_3=q_3,\quad \alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0,$

第四數 $\left|\frac{r_2}{r_3}\right.=r_4,\quad q_4=q_4,\quad \alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1,$

....

第 n 數 $\left|\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right.=r_n,\quad q_n=q_n,\quad \alpha=\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2},$

而 n 爲偶數, $r_n=1$ 爲止.其列式雖與秦術不同,然頗醒目.其以淺顯之筆寫艱深之術,則誠秦氏之功臣.求正用之法,在張氏廢而不用.直以乘率乘衍數,爲用數,各爲總,幷總,滿衍母去之,餘爲物數,卽, $N=\Sigma a\alpha Y-R\theta$.

張氏幷謂唐麟德術以後,元授時術以前,皆用此術,推求上元積算,卷下舉麟德,大衍,崇天,紀元四術,及授時附演一法爲例,其說別詳第16節.

12. 清·焦循李銳之論著

張敦仁之先，焦循（1763－1820）於天元一釋卷下（1800）亦論大衍術謂「循按大衍之術，卽孫子算經三三五五七七之術也．此術九章所無，而見於孫子．今則婦人孺子，或以爲戲，孫子雖詳其術，而秦氏則闡其微而暢發之．其三三置七十，則大衍求一術也」．并依秦氏式將孫子題列爲

$A,B,C,$	元數卽定母	3,	5,	7,	衍母 $=105$.
	立天元一	1,	1,	1,	
$Y_1,Y_2,Y_3,$	衍數	35,	21,	15,	
$G_1,G_2,G_3,$	奇數	2,	1,	1,	
$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$	乘率	2,	1,	1,	
$\alpha Y_1,\beta Y_2,\gamma Y_3$	乘數	70,	21,	15,	
$a,\ b,\ c,$	分數	2,	3,	2,	
$a\,\alpha Y_1,b\,\beta Y_2,c\,\gamma Y_3,$	用數	140,	63,	30.	

$N=\Sigma\, a\,\alpha Y_1-R\theta=23.$

秦氏大衍術，立天元一法凡兩見．其一爲求衍數法，焦循以爲與張丘建算經蕩杯題右行置一，一，一杯數之意相同．其一爲大衍求一術，焦循謂立天元一於左上者，與右上餘一爲預存倍數也．是時秦書初

出,故焦循所言,多未暢其旨.

同時李銳亦於求等之誼,多所說述,載於焦循之天元一釋.而所著日法朔餘強弱考(1799)解析何承天調日法,尤屬捌解.術曰「視當時測定朔餘,在強率約餘以下,弱率約餘以上者.列強母於右上,強子於右次,一強於右副,右下空.又列弱母於左上,弱子於左次,左副空,一弱於左下.并左右兩行得中行,以中上退除中次爲約餘,約餘多於測定數,卽棄去右行,以中行爲右行,仍前左行.約餘少於測定數,卽棄去左行,以中行爲左行,仍前右行.依前累求約餘,與當時測定數合中上卽日法,中次卽朔餘,中副卽強數,中下卽弱數也」.

如強率 $=\frac{26}{49}$, 弱率 $=\frac{9}{17}$, 測定數 $=\phi=0.53054221$.

(上)	(次)	(副)	(下)		
49	26	1	0	(右行)	約餘 $=\frac{35}{66}=\frac{26\times1+9\times1}{49\times1+17\times1}$
66	35	1	1	(中行)	$=0.5303303<\phi$.
17	9	0	1	(左行)	
49	26	1	0	(右行)	約餘 $=\frac{61}{115}=\frac{26\times2+9\times1}{49\times2+17\times1}$

115	61	2	1 (中行)	$=0.53043478<\phi$.
66	35	1	1 (左行)	

逐次如是

49	26	1	0 (右行)	約餘 $=\frac{165}{311}=\frac{26\times6+\ 9\times1}{49\times6+17\times1}$
311	165	6	1 (中行)	$=0.53054662>\phi$.
262	139	5	1 (左行)	

311	165	6	1 (右行)	約餘 $=\frac{304}{573}=\frac{26\times11+\ 9\times2}{49\times11+17\times2}$
573	304	11	2 (中行)	$=0.53054101<\phi$.
262	139	5	1 (左行)	

311	165	6	1 (右行)	約餘 $=\frac{469}{884}=\frac{26\times17+\ 9\times3}{49\times17+17\times3}$
884	489	17	3 (中行)	$=0.53054298>\phi$.
573	304	11	1 (左行)	

884	469	17	3 (右行)	約餘 $=\frac{773}{1457}=\frac{26\times28+\ 9\times5}{49\times28+17\times5}$
1457	773	28	5 (中行)	$=0.53054221=\phi$.
573	304	11	2 (左行)	

而 日法 $=49\times28+17\times5=1457$. 強數 $=28$.

朔餘 $=26\times28+\ 9\times5=\ 773$. 弱數 $=\ 5$ 矣.

13.　清·駱騰鳳之新法.

駱騰鳳藝游錄卷一之「大衍求一法」及「大衍奇定相求法」各節幷說明大衍求一術也.普通一次無定式曾可約之爲 $bx=ay+s$, 亦可化爲 $ax=my+1$,駱氏於「大衍奇定相求法」中說明此理.

令　$G=G$,　$-A=-A$,　列式爲

$$G+O=\ G\cdots\cdots(x)$$

$$O-A=-A\cdots\cdots(y)$$

則

$$G+O=G$$

以q_1乘(x)式,$\cdots\cdots\cdots\cdots q_1$　而　$\frac{A}{G}=q_1+\frac{r_1}{G}$,

得,　$q_1G+O=q_1G\cdots\cdots(a)$

次列(y)式變其符號, $O+A=+A\cdots\cdots(b)$

$(b)-(a)$得.$(b)_2$, $-\alpha_1G+A=A-\alpha_1G=r_1$　而 $\alpha_1=q_1$,

以q_2乘上式,$\cdots\cdots\cdots\cdots q_2$　　$\frac{G}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1}$.

得,　$-q_2\alpha_1G+q_2A=q_2r_1\cdots\cdots\cdots\cdots(a)_1$.

$$G+O\ \ =G\cdots\cdots\cdots\cdots(b)_1.$$

$(b)_1-(a)_1$得,$(b)_3$, $\alpha_2G-\mu_2A=G-q_2r_1=r_2$　而 $\alpha_2=q_2\alpha_1+1$,

$\mu_2=q_2$

以q_3乘上式,……………………………q_3 $\qquad \frac{r_1}{r_2}=q_3+\frac{r_3}{r_2}$.

得, $$q_3\alpha_2G-q_3\mu_2A=q_3r_2 \cdots\cdots (a)_2$$

$$-\alpha_1G+A \quad =r_1 \cdots\cdots (b)_2$$

$(b)_2-(a)_2$得,$(b)_4$, $-\alpha_3G+\mu_3A=r_1-q_3r_2=r_3$ 而$\alpha_3=q_3\alpha_2+\alpha_1$,

$\mu_3=q_3\mu_2+1$.

……………………q_4 $\qquad \frac{r_2}{r_3}=q_4+\frac{r_4}{r_3}$

$$-q_4\alpha_3G+q_4\mu_3A=q_4r_3 \cdots\cdots (a)_3$$

$$\alpha_2G-\mu_2A \quad =r_2 \cdots\cdots (b)_3$$

$(b)_3-(a)_3$得,$(b)_5$, $\alpha_4G-\mu_4A=r_2-q_4r_3=r_4$ 而 $\alpha_4=q_4\alpha_3+\alpha_2$,

$\mu_4=q_4\mu_3+\mu_2$.

……………………………

……………………………

……………………………

最後得, $\alpha_nG-\mu_nA=r_n$. 而$\alpha_n=q_n\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}$, $\mu_n=q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}$.

$\therefore \quad \alpha_nG=\mu_nA+r_n$ (參觀第9節).

或 $aG=mA+1$.

故駱氏曰:「凡求一者,其左行末數(α_n)爲乘率(a)卽奇(G)之倍數也.其中行末數($\mu_n=m$)卽定(A)之倍數也.其右行末數卽奇一($r_n=1$).

「凡奇數少於定數($G<A$),而定倍數必少於奇倍數($m<a$),以除上位必得1,或徑以定數除之,亦得1」.

即 $\left|\frac{aG}{mA}\right. = \left|\frac{aG}{A}\right. = 1.$

駱氏幷推論如$G<A$,而數有等數,亦可按上法求等,不過依法求至$r_n=0$爲止.如$G=1014000$, $A=6172608$.得$9892G=1625A+0$,即G, A可約爲1625及9892,其等數爲624也.駱氏亦省去求正用,直以乘率乘衍數爲用數.

14. 淸·時曰醇之歌訣

時曰醇求一術指所擬求一歌括,謂:

「列全數爲泛母,約泛母得定母,定母連乘爲衍母,定母各除得衍數.衍數滿定母去之爲奇數,奇數除定母,定餘除奇數.奇餘,定餘,互餘畢;凡幾除數終奇一.天元除數用連乘,遞加前數爲乘率.乘率乘衍數,所得爲用數.用數乘賸數,所得爲總數.各總幷之爲總數.滿定母去得求數」. 其求等約分,時氏立法稍簡.

15. 淸·黃宗憲之通解

黄宗憲求一術通解二卷,前列例言謂:

「一求定母,舊術極繁,至求一術指,稍歸簡捷,而約分之理,仍不易明.今析各泛母爲極小數根,瞭如指掌,遇題有多式者,一索無遺.

「一求乘率,舊術先以奇定相求,得奇一,再立天元累乘累加,亦覺眩目.今以定母衍數對列,輾轉相減,遞求寄數,卽爲乘率,不立天元.

「一舊術有借用數之法,贅設,删之」。

其析數根法以各泛母(卽諸問數 $A, B, C, \cdots$) 自上至下列之,考各位每數爲若干數根(卽素數 2, 3, 5, 7, ⋯ 等)連乘所得,卽析爲若干數根(如 715 析爲 5, 11, 13) 次徧視各同根,取某位最多者用之,凡已用之根旁必作△號爲誌,餘所有棄之不用,兩位等多者隨意用之,以所用數根連乘之,卽得各位定母.如某位可以數根析盡,則定母爲 1, 而其位爲廢位,不立衍數.

其求寄數法,則「列定母於右行,列衍數於左行,[左角上預寄一數],輾轉累減,[凡定母與衍數輾轉累減,則其上所寄數,必輾轉累加], 至衍數餘一卽止,視左角上寄數爲乘率」。

又「按兩數相減,必以少數爲法,多數爲實.其法上無寄數者,不論減若干次,減餘上仍以一爲寄數.其實上無寄數者,減餘數上,以所減次數爲寄數,其法上實上俱有寄數者,視累減若干次,以法上寄數亦累加若干次於實上寄數中,卽得減餘數上之寄數矣」.

列題: 通解題云:「今有數不知總.以五累減之無賸,以七百十五累減之賸十,以二百四十七累減之賸一百四十,以三百九十一累減之賸二百四十五,以一百八十七累減之賸一百零九.問總數若干.

答曰一萬零零二十」.

解法: 置各泛母,依法得定母,衍母,衍數,如下表:

	泛母	析母	定母	衍母	衍數
1	$A=5$	$=5$	$A'=1$	$\theta=5311735$	Y_1 廢位
2	$B=715$	$=5\triangle\times11\triangle\times13$	$B'=55$		$Y_2=96577$
3	$C=247$	$=13\triangle\times19\triangle$	$C'=247$		$Y_3=21505$
4	$D=391$	$=17\triangle\times23\triangle$	$D'=391$		$Y_4=13585$
5	$E=187$	$=11\times17$	$E'=1$		Y_5 廢位

旣得各定母,衍數,兩兩對列,以求一術入之,如次:

$$Y_2 \qquad B'$$

$$96577 \qquad 55$$

$$\alpha_0=1 \quad \frac{96525}{52=r_0} \quad 55$$

$$\alpha_0 \quad \frac{q_1\times r_0=52}{52 \quad r_1=3} \quad \alpha_1=q_1=1$$

$$\alpha_2=q_2\alpha_1+\alpha_0=18 \quad \frac{51=q_2r_1}{1=r_2}$$

$$\therefore \quad \alpha=\underline{18}.$$

$$Y_3 \qquad C'$$

$$21505 \qquad 247$$

$$\beta_0=1 \quad \frac{21489}{16=r_0} \quad 247$$

$$\beta_0 \quad \frac{q_1\times r_0=2\dot{4}0}{16 \quad r_1=7} \quad \beta_1=q_1=15$$

$$\beta_2=q_2\beta_1+\beta_0=31 \quad \frac{14=q_2r_1}{2=r_2} \quad \frac{\beta_1}{7}$$

$$\beta_2 \quad \frac{q_3\times r_2=6}{2 \quad r_3=1} \quad \beta_3=q_3\beta_2+\beta_1=108$$

$$\beta_4 = q_4\beta_3 + \beta_2 \qquad \frac{1 = q_4 r_3}{1 = r_4}$$
$$= 139$$

$$\therefore \quad \beta = \underline{\underline{139}}.$$

Y_4	D'
13585	391

$$\gamma_0 = 1 \quad \frac{13294}{291 = r_0} \qquad 391$$

$$\gamma_0 \qquad 291 \quad \frac{q_1 \times r_0 = 291}{r_1 = 100} \quad \gamma_1 = q_1 = 1$$

$$\gamma_2 = q_2\gamma_1 + \gamma_0 \quad \frac{200 = q_2 r_1}{91} \qquad 100 \quad \gamma_1$$
$$= 3$$

$$\gamma_2 \qquad 91 \quad \frac{q_3 \times r_2 = \ \ 91}{r_3 = \ \ 9} \quad \gamma_3 = q_3\gamma_2 + \gamma_1$$
$$= 4$$

$$\gamma_4 = q_4\gamma_3 + \gamma_2 \quad \frac{90 = q_4 r_3}{1 = r_4}$$
$$= 43$$

$$\therefore \quad \gamma = \underline{\underline{43}}.$$

秦氏以奇居右上,須使右上末後奇一而止,黃氏以奇居左下,故須使左下末後奇一而止,其理實相一致,卽使 $r_n = 1$, 而 n 爲偶數也.其列式則較駱氏尤爲簡明.

黃氏又謂求一者,是求衍數(Y)中之一,所以寄

數$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$祇記衍數之次數.其首層餘$r_0$,是以若干定母減一個衍數之所餘也.(卽$r_0=Y-t_0A$)故餘數上角寄$(\alpha_0)$一數.第二層餘$r_1$,是以$\alpha_1$個衍數減若干定母之所餘也.(卽$r_1=t_1A-\alpha_1Y$)故餘數上角寄$\alpha_1$數.第三層餘$r_2$,是以若干定母減$\alpha_2$個衍數之所餘也.(卽$r_2=\alpha_2Y-t_2A$)故餘數上角寄$\alpha_2$數.同理第四層餘$r_3=t_3A-\alpha_3Y$,第五層餘$r_4=\alpha_4Y-t_4A$.至第$n$層餘1,是以若干定母減$\alpha_n$個衍數之所餘也.$(r_n=\alpha_nY-t_nA)$故餘數上角寄$\alpha_n$.其衍數至此已得1,故以$\alpha=\alpha_n$爲乘率也.

今以代數法記之.

$$r_0=Y-t_0A.$$

$$r_1=A-\alpha_1r_0=A-\alpha_1(Y-t_0A)$$

$$=t_1A-\alpha_1Y.\qquad 而\ t_1=t_0+1$$

$$r_2=r_0-q_2r_1=(Y-t_0A)-(q_2t_1A-q_2\alpha_1Y)$$

$$=\alpha_2Y-t_2A.\qquad 而\ t_2=q_2t_1+t_0$$

$$r_3=r_1-q_3r_2=(t_1A-\alpha_1Y)-(q_3\alpha_2Y-q_3t_2A)$$

$$=t_3A-\alpha_3Y.\qquad 而\ t_3=q_3t_2+t_1$$

$$r_4=r_2-q_4r_3=(\alpha_2Y-t_2A)-(q_4t_3A-q_4\alpha_3Y)$$

$$=\alpha_4Y-t_4A.\qquad 而\ t_4=q_4t_3+t_2$$

……………… ……………………………

$\therefore\ r_n=a_nY-t_nA,$ 而 $t_n=q_nt_{n-1}+t_{n-2},$

$a_n=q_na_{n-1}+a_{n-2}.$

卽 $a_nY=Z_nA+r_n.$

$\left|\frac{a_nY}{A}=\left|\frac{t_nA+r_n}{A}=r_n.\right.\right.$ 或 $\left|\frac{aY}{A}=1.\right.$

如上例， $Y=13585,\quad A=391,$

則 $a_0=1,\quad r_0=291,\quad t_0=34,$

$a_1=1,\quad r_1=100,\quad t_1=35,$

$a_2=3,\quad r_2=91,\quad t_2=104,$

$a_3=4,\quad r_3=9,\quad t_3=139,$

$a_4=43,\quad r_4=1,\quad t_4=1494.$

既得各乘率後,以衍數乘之,又以賸數乘之,併得所求率,如下表:

衍數	乘數	用數	賸數	各總
$Y_2=96577$	$\alpha=18$	$\alpha Y_2=1738386$	$a=10$	$a\alpha Y_2=17383860$
$Y_3=21505$	$\beta=139$	$\beta Y_3=2989195$	$b=140$	$b\beta Y_3=418487300$
$Y_4=13585$	$\gamma=43$	$\gamma Y_4=584155$	$c=245$	$c\gamma Y_4=143117975$

所求率 $=578989136$

$-)\quad 109\times5311735=578979115$

得，所求總 $=\quad 10020$

16. 大衍求一術與曆法之應用

秦氏嘗言，大衍法曆家演法頗用之，以爲方程者誤也．張敦仁以爲「推步家謂之方程，周琮明天術議略所謂以方程約而齊之，鮑澣之論統天術所謂虛廢方程之算者是也．然其布算行列迴與方程不同，則名之爲方程者非也．(中略) 求一術之於步天，其用尤爲切要．何者，氣朔交轉之策，卽各數也．氣朔交轉之應，卽不滿各數之殘也．上元以來距所求年之積分，卽未以各數除去之數也．是故由唐麟德術以下迄於宋元諸家演撰，皆依賴是而成，五代曹士蔿始變古法，不復推上古爲元，然世謂之小術，祇行於民間．元郭守敬造授時術，斷取近距，不用積年日法，而李謙議仍有附演積數三法，以釋惑者之疑．蓋臺官師說相傳，罔敢失墜，求一術之見重當時如此．明用大統，一切皆仍授時之舊，鄭世子朱載堉所進萬年術，亦依郭法截算，不立積年．上元之法，久不行世」玆舉秦氏以後各家之所推算，以明求一術在曆法上之應用．

秦九韶數書九章第一卷第二題「古曆會積」題問不合，沈欽裴用四分術，開禧術推之，以正其誤，法

最詳盡, 另詳次節. 同書第三卷第一, 二, 三題均言天時, 而各有錯誤. 茲為便利起見, 先述第三卷第三題「治歷演紀」如下:

「問開禧歷積年 7848183, 欲知推演之原調日法, 求朔餘, 朔率, 斗分, 歲率, 歲閏, 入元歲, 入閏, 朔定骨, 閏泛骨, 閏縮, 紀率, 氣元率, 元閏, 元數及氣等率, 因率, 蔀率, 朔等數, 因數, 蔀數, 朔積年, 二十三事各幾何」.

按朔餘, 日法為陰歷每月日數之小數部份.

宋何承天調日法用強弱二率, 強率 $=\frac{26}{49}$, 弱率 $=\frac{9}{17}$.

因宋鮑澣之開禧術測定朔餘 $\phi=0.5305917159$.

如第 15 節求得

日法 = 16900, 強數 = 339,

朔餘 = 8967, 弱數 = 17.

朔率 = 16900(日法)×29(朔策)+8967(朔餘) = 499067.

斗泛分 = 16900(日法)×0.2431 (歲斗分, 此係統天歷所測每歲冬至周日下 24 刻 31 分) = 4108.3900.

斗定分 = 斗分 = 4108.

以大衍入之

$$\left|\frac{4108(\text{斗分})}{16900(\text{日法})}\right. = \left|\frac{52(\text{等數})\times 79}{52(\text{等數})\times 325(\text{蔀率})}\right.$$

故 $\frac{144(\text{因率})\times 52\times 79}{52\times 325}=1.$

因率 = 144.

蔀率 = 325.

氣泛骨 = 16900(日法)×11.446154(歲氣骨,嘉泰甲子歲天正冬至氣骨) = 193440.0026.

氣定骨 = 氣骨分 = 193440.

約率 = 60(紀法)×52(等數) = 3120.

$$\frac{193440\,(\text{氣定骨})}{60\,(\text{紀法})\times 52\,(\text{等數})}\times\frac{144\,(\text{因率})}{325\,(\text{蔀率})}=27\frac{153}{325}.$$

入元歲 = 153×60(紀法) = 9180.

因歲日 = 365.

歲率 = 16900(日法)×365(歲日)+4108(斗分) = 6172608.

歲閏 = 6172608(歲率) − 12(歲月)×499067(朔率)

= 183804.

$$\frac{183804\,(\text{歲閏})\times 9180\,(\text{入元歲})}{499067\,(\text{朔率})}=338\frac{474260\,(\text{入閏})}{499067\,(\text{朔率})}.$$

入閏 = 474260.

朔泛骨 = 16900(日法)×1.755562(歲朔骨) = 29668.997800.

朔定骨 = 朔骨分 29669.

閏泛骨 = 193440(氣定骨) − 29669(朔定骨) = 163771.

$$\frac{16900\ (\text{日法})}{200\ (\text{約法})} = 84.5\ (\text{半刻法}).$$

閏骨策 = 11.446154 (歲氣骨) −1.755562 (歲朔骨)

= 9 日 69 刻 05 分 92 秒.

閏差或閏贏 = 474260(入閏)−163771(閏泛骨) = 310489.

閏縮 = 163771(閏泛骨) + 499067(朔率) − 474260(入閏).

= 188578.

紀率 = 60 (紀法) × 16900 (日法) = 1014000.

氣元率 $\frac{1014000\ (\text{紀率})}{52\ (\text{等數})} = 19500.$

$$\frac{183804\ (\text{歲閏}) \times 19500\ (\text{氣元率})}{499067\ (\text{朔率})} = 7181\frac{377873\ (\text{元閏})}{499067\ (\text{朔率})}.$$

元閏 = 377873.

又虛置一億(10⁸)減入元歲,餘爲實,元率除之,得乘限,宋景昌按「此蓋恐積年過於一億,運算繁多,故設乘限,以爲元數之限,假使歷過元數,大於乘限,則日法,朔餘,便須改設,并蔀數亦改求矣.唐宋演撰家相沿如此,未可廢也」.

$$\text{乘元限數} = \frac{100,000,000 - 9180\ (\text{入元歲})}{19500\ (\text{氣元率})} = 5127+.$$

因 $\left|\frac{377873\ (\text{元閏})}{499067\ (\text{朔率})}\right.$

而 $\frac{457999(\text{因數})\times 377873(\text{元閏})\times 1(\text{朔等數})}{499067(\text{蔀數})}=1.$

即 朔等數 = 1,

因數 = 457999,

蔀數 = 499067.

$$\frac{188578(\text{閏縮})\times 457999(\text{因數})}{1(\text{等數})\times 499067(\text{蔀數})}=49967\frac{402}{599067}.$$

朔積年 = 402×19500 (元率) = 7839000.

本歷積年 = 7839000 (朔積年) +9180 (入元歲)

+3 (成歷年) = 7848183.

阮元 (1764–1849) 疇人傳 (1799) 卷二十二秦九韶傳:

「論曰,自元郭守敬授時術截用當時爲元.迄今五百年來,疇官術士,無復有知演紀之法者.獨數學九章猶存其術.嗜古之士,得以考見古人推演積年日法之故,蓋猶告朔之餼羊矣」.

沈欽裴改正秦九韶「古歷會積」題如下:

「問四分術,冬至 $365\frac{1}{4}$ 日,朔策 $29\frac{499}{940}$ 日,甲子 60 日,各爲一周,假令天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日,冬至丁酉日 $\frac{3}{4}$ 日,欲求氣朔甲子一會,積年,積月,積日,及歷過未至年數各幾何.答曰 (1) 一會積年 1512, (2) 積月 18800, (3) 積日 555180, (4) 歷過年 1115, (5) 未至年 405」.

如題 $365\frac{1}{4}$(冬至)，$20\frac{499}{940}$(朔策)，60(甲子).

如第8節通分內子，得共母3760. 及

A. 487(甲定母)，19(乙定母)，225600(丙定母).

θ, 衍母 = 487×19×225600 = 2087476800.

Y., 4286400(甲衍數)，109867200(乙衍數)，9253(丙衍數).

G., 313(甲奇數)，4(乙奇數)，9253(丙奇數).

以求一術入之列式如

$$\left|\frac{313}{487}\right., \quad \left|\frac{4}{19}\right., \quad \left|\frac{9253}{225600}\right..$$

即 $\left|\frac{473\,(\text{甲乘率})\times 313}{487}\right. = 1$, $\left|\frac{5\,(\text{乙乘率})\times 4}{19}\right. = 1$,

$\left|\frac{172717\,(\text{丙乘率})\times 9253}{225600}\right. = 1.$

$\alpha Y_1 = 2027467200$ (甲泛用)

$\beta Y_2 = 549336000$ (乙泛用) 而 $\theta = 2087476800 =$ 衍母

$\gamma Y_3 = \underline{1598150401}$ (丙泛用)

$\Sigma\alpha Y_1 = 4174953601$

簡之

$\alpha Y_1 - \frac{\theta}{2} = 983728000$ (甲正用)

$\beta Y_2 \qquad = 549336000$ (乙正用) 而 $\frac{\theta}{2} = 1043738400.$

$\gamma Y_3 - \frac{\theta}{2} = 554412001$ (丙正用)

次置天正朔甲戌日 $\frac{410}{940}$ 日，上距甲子 $10\frac{410}{940}$

$$=\frac{39240\ (\text{朔骨})}{3760\ (\text{日法})}$$

冬至丁酉日 $\frac{3}{4}$ 日，上距甲子 $33\frac{3}{4}=\frac{126900\ (\text{氣骨})}{3760\ \ (\text{日法})}$

b, 乙賸數 = 閏骨 = 126900 (氣骨) − 39240 (朔骨).

c, 丙賸數 = 氣骨 = 126900.

$$b\beta Y_2+c(\gamma Y_3-\frac{\theta}{2})-R\theta = 1531274100.$$

(4) $\frac{1531274100}{1373340\ (\text{氣分數})} = 1115$ (歷過年),

而 $1373340 = 940\times(365\times4+1)$

(1) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{1373340\ (\text{氣分數})} = 1520$ (一會積年).

(2) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{111036\ (\text{朔分數})} = 18800$ (一會積月).

而 $111036 = 4\times(29\times940+499)$.

(3) $\frac{2087476800\ (\text{衍母})}{225600\ (\text{紀分數})}\times60$ (甲子) = 555180 (一會積日).

而 $225600 = 4\times940\times60$.

(5) 1520(一會積年) − 1115(歷過年) = 405(未至年數).

張敦仁求一算術卷下，舉麟德，大衍，崇天，紀元四術及授時曆，以明用此術推求上元積算.

(1)「今有唐麟德術,日法1340,歲實489428,朔實39571.

實測到麟德元年甲子歲天正十一月甲子夜半合朔,冬至為上元.問上元距麟德元年歲積幾何.答曰積269880算」.

$$489428(\text{歲實}) \div 1340(\text{日法}) = 365\frac{328(\text{斗分})}{1340(\text{日法})}$$

以大衍術入之,列式如 $\left|\frac{328(\text{斗分})}{1340(\text{日法})}\right. = \left|\frac{4(\text{等率}) \times 82(\text{奇率})}{4(\text{等率}) \times 335(\text{蔀率})}\right.$

即 $\left|\frac{4 \times 143(\text{因率}) \times 82}{4 \times 335}\right. = 1.$

氣應 $= 240$, 約率 $= 60(\text{紀法}) \times 4(\text{等率}) = 240.$

入元歲 $= 60(\text{紀法}) \times \frac{240(\text{氣應})}{240(\text{約率})} \times 143(\text{因率}) = 8580.$

$$\text{而} \quad \frac{240}{240} \times 143 < 325(\text{蔀率}),$$

氣元率 $= 60(\text{紀法}) \times 335(\text{蔀率}) = 30100.$

歲閏 $= 489428(\text{歲實,秦作歲率}) - 12(\text{歲月}) \times 39571(\text{朔實})$

$= 14576.$

$$\frac{14576(\text{歲閏}) \times 8580(\text{入元歲})}{39571(\text{朔實})} = 136\frac{17720(\text{入閏})}{39571(\text{朔實})}$$

閏縮 $= 17770(\text{閏餘或閏應}) - 17720(\text{入閏}) = 50.$

$$\frac{14576(\text{歲閏}) \times 20100(\text{氣元率})}{39571(\text{朔實})} = 743\frac{33487(\text{元閏})}{39571(\text{朔實})}$$

以大衍術入之,列式如 $\left|\dfrac{33487(\text{元閏})}{39571(\text{朔實})}\right.=\left|\dfrac{1(\text{等數})\times 33487(\text{奇數})}{1(\text{等數})\times 39571(\text{蓏數})}\right.$

即 $\left|\dfrac{1\times 37197(\text{因數})\times 33487}{39571}\right.\times 1.$

$$\frac{50(\text{閏縮})\times 37197(\text{因數})}{1(\text{等數})\times 39571(\text{蓏數})}=47\frac{13(\text{乘元限數})}{39571}$$

朔積年 $=13(\text{乘元限數})\times 20100(\text{氣元率})=261300.$

積算 $=261300(\text{朔積年})+8580(\text{入元歲})=269880.$

(2)「今有唐大衍術,日法3040,歲實1110343,朔實89773,實測到開元十二年甲子歲天正冬至日辰戊寅小餘2260,閏餘49107,欲以甲子歲天正十一月甲子夜半合朔冬至爲上元,問上元距開元十二年積算幾何. 答曰積96961740算」.

$1110343(\text{歲實})\div 3040(\text{日法})=365\dfrac{743(\text{斗分})}{3040(\text{日法})}$

以大衍術入之,列式如 $\left|\dfrac{743(\text{斗分})}{3040(\text{日法})}\right.=\left|\dfrac{1(\text{等率})\times 743(\text{奇率})}{1(\text{等率})\times 3040(\text{蓏率})}\right.$.

即 $\left|\dfrac{1\times 1207(\text{因率})\times 743}{1\times 3040}\right.=1.$

乃視天正冬至日辰戊寅,今欲令上元起甲子日則爲大餘14.開元十二年甲子氣應 $=14\times 3040+2260=44820.$

約率 $=60(\text{紀法})\times 1(\text{等率})=60.$

$$\text{入元歲}=\frac{60\,(\text{紀法})\times 44820\,(\text{氣應})}{3040\,(\text{蔀率})\times 60\,(\text{約率})}\times 1207\,(\text{因率})$$

$$=107340.$$

$$\text{而}\quad \frac{44820}{60}\times 1207>3040\,(\text{蔀率}),$$

$$\text{氣元率}=60\,(\text{紀法})\times 3040\,(\text{蔀率})=182400.$$

$$\text{歲閏}=1110343\,(\text{歲實})-12\times 89773\,(\text{朔實})=33067.$$

$$\frac{33067\,(\text{歲閏})\times 117340\,(\text{入元歲})}{89773\,(\text{朔實})}=39537\,\frac{56679\,(\text{入閏})}{89773\,(\text{朔實})}.$$

$$\text{閏縮}=49107\,(\text{閏餘})+89773\,(\text{朔實})-56679\,(\text{入閏})=82201.$$

$$\frac{33067\,(\text{歲閏})\times 18240\,(\text{氣元率})}{89773\,(\text{朔實})}=67185\,\frac{21795\,(\text{元閏})}{89773\,(\text{朔實})}.$$

以大衍術入之,列式如 $\Big|\frac{21795(\text{元閏})}{89773(\text{朔實})}=\Big|\frac{1(\text{等數})\times 21795(\text{奇數})}{1(\text{等數})\times 89773(\text{蔀數})}.$

$$\text{即}\quad \Big|\frac{1\times 55948\,(\text{因數})\times 21795}{1\times 89773}=1.$$

$$\frac{82201\,(\text{閏縮})\times 55948\,(\text{因數})}{1\,(\text{等數})\times 89773\,(\text{蔀數})}=51229\,\frac{531\,(\text{乘元限數})}{89773\,(\text{蔀數})}$$

$$\text{朔積年}=531\,(\text{乘元限數})\times 182400\,(\text{氣元率})=96854400.$$

$$\text{積算}=96854400\,(\text{朔積年})+107340\,(\text{入元歲})$$

$$=96961740.$$

17. 大衍求一術在日本之影響

大衍求一術,在日本亦得相當之影響,關孝和(1642—1708)研幾算法序謂其翦管術出於唐穆宗之宣明歷.其遺編括要算法爲荒木村英檢閱,大高由昌校訂,寶永己丑(1709)出版.卷亨論諸約之法,分爲互約,逐約,齊約,遍約,增約,損約,零約,遍通,剩一,翦管,各條.今逐條錄擧其例,以見其與中法之異同焉.

「互約.

今有36個,48個,問互約之各幾何.

答曰36爲9,48爲16.

術曰36與48互減得等數12,以約36爲3,3與48互減得等數3,以因3爲9,約48爲16.

又術曰48與36互減得等數12,以約48爲4,4與36互減得等數4,以4因4爲16,約36爲9合問」.

「逐約.

今有105個,112個,126個,問逐約之各幾何.

答曰105爲5,112爲16,126爲63.

術曰105與112依互約術105爲15,112不約.

15與126依互約術,15爲5,126不約.

112與126依互約術,112爲16,126爲63合問」.

「齊約.

今有6個8個問齊約之幾何.

答曰24.

術曰6與8互減得等數2,以約6得3,3與8相因得24合問」.

「遍約.

今有8個10個問遍約之各幾何.

答曰8爲4,10爲5.

術曰8與10互減得等數2爲約數,以遍約之8爲4,10爲5合問」.

「增約.

今有原10個逐增6分,問極數幾何.

答曰極數25個.

術曰置1內減6分,餘4分爲法,以原10個爲實,實如法而一,得極數,合問」.

按極數 $25=10+6+3.6+2.16+1.296+0.7776+0.46656+0.279936+\cdots\cdots$

「損約.

今有原12個,逐損4分,問極數幾何.

答曰極數4個.

術曰置1內減4分，餘6分爲法，置4分倍之得8分，以減1餘2分乘原12個得2個4分爲實，實如法而一，得極數合問」.

按極數 $4=12-4.8-1.92-0.768-0.3072-0.12288$

$$-0.049152-0.0196608-\cdots$$

「零約.

今有方1尺，斜1.41421尺強，問零約之，內外親疎方斜率各幾何.

答曰					
	內疎	方率	5,	斜率	7.
	外疎	方率	7,	斜率	10.
	內親	方率	29,	斜率	41.
	外親	方率	41,	斜率	58.

術曰斜率1，方率1爲初，以斜率爲實，以方率爲法，實如法而一，得數[一位定尺]少於原斜者，斜率2，方率1；多於原斜者斜率1，方率1. 各累加之，得內外親疎方斜率. [右外雖有最親者，方斜率繁多，故略之，以此術可準知也] 合問」.

按所得少於原斜 $\sqrt{2}=1.41421$ 時方斜率爲 $\frac{1}{1}$ (*A*).

所得多於原斜 $\sqrt{2}=1.41421$ 時方斜率爲 $\frac{2}{1}$ (*B*).

先合 $\dfrac{2+1}{1+1}=\dfrac{3}{2}(=1.5)>\sqrt{2}$

$$\frac{3+1}{2+1}=\frac{4}{3}(=1.33)<\sqrt{2}$$

$$\frac{4+2}{3+1}=\frac{6}{4}(=1.5)>\sqrt{2}$$

$$\frac{6+1}{4+1}=\frac{7}{5}(=1.4)<\sqrt{2}$$ 爲第一答.

又 $$\frac{7+2}{5+1}=\frac{9}{6}(=1.5)>\sqrt{2}$$

$$\frac{9+1}{6+1}=\frac{10}{7}(=1.42\cdots)>\sqrt{2}$$ 爲第二答.

同理得$\frac{11}{8}$少, $\frac{13}{9}$多, $\frac{14}{10}$少, $\frac{16}{11}$多, $\frac{17}{12}$多,……

遂得第三答$\frac{41}{29}$, 及第四答$\frac{58}{41}$.

零約術頗與李銳之日法朔餘強弱考所述相類.

「遍通.

今有$\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$問遍通之各幾何.

答曰$\frac{5}{6}$爲$\frac{20}{24}$, $\frac{3}{8}$爲$\frac{9}{24}$.

術曰分母6與分母8, 依齊約術得24爲同分母, 以各分子乘之, 以各分子約之, 得合問」.

「剩一.

今有以左19累加之, 得數以右27累減之剩一, 問左總數幾何.

答曰左總數190.

術曰以左 19 除右 27 得商 1, 不盡 8 爲甲.

以甲不盡 8 除 19 得商 2, 不盡 3 爲乙.

以乙不盡 3 除甲不盡 8 得商 2, 不盡 2 爲丙.

以丙不盡 2 除乙不盡 3 得商 1,不盡 1 爲丁[乃餘左一而止].

甲商與乙商相因, 加定 1 得 3 爲子.

子與丙商相因, 加甲商得 7 爲丑.

丑與丁商相因,加子得 10, [是左段數]以左 19 乘之,得左總數 190 合問」.

此方法與秦九韶大衍求一術全相一致.

「翦管術解.

算法統宗物不知總數 孫子歌曰.

三人同時七十稀, 五樹梅花廿一枝,

七子團圓正半月, 除百令五便得知.

今有物不知總數, 只云三除餘二個, 五除餘一個,七除餘五個,問總數幾河. 答曰總數 26 個.

術曰 3 除餘以 70 乘之得[144 個], 5 除餘以 21 乘之得 [21 個], 7 除餘以 15 乘之得 [75 個], 三位相併共得 [236 個] 滿 105 去之餘 26 爲總數,合問.

解曰,[依逐約術 3, 5, 7 皆不約]. 5, 7 相因得 35 爲

左, 以 3 爲右, 依剩一術得 70 爲 3 除法. 3, 7 相因得 21 爲左,以 5 爲右, 依剩一術得 21 爲 5 除法. 3, 5 相因得 15 爲左, 以 7 爲右, 依剩一術得 15 爲 7 除法. 3, 5, 7 相乘得 105 爲去法」.

上列各條,除增約, 損約外均與大衍求一術有關, 而翦管術語出於楊輝, 孫子題問錄自程氏, 則尤顯而易見也.

18. 大衍求一術在世界數學史上之位置

代數「當中國六朝時,希臘有丟番都 (Diophantus) 者傳其法,但用數不用記號, 而天竺已先有之, 且精於丟氏, 能推一次二次, 并有求一法, 甚賅備, 幾與秦九韶大衍術相埒.」(註) 孫子若視爲六朝時人, 則較希臘 Diophantus 稍後,而在印度 Mahāvīracārya 之前. 直至 Euler (1707—1783), Lagrange (1736—1813), Gauss (1777—1855) 之徒出, 此項問題方得深切之研究, 而 Gauss 在 Disquisitions 內所述之解法,尤與中法相類.

Matthiesen 於 1874 之 Zeitschrift f. math. und naturw. Unterricht, VII. pp. 73—81 首先以中國,印度之解析法互相較論, 旣在 1876 之 Zeitschrift Math. Phys. XIX. pp.

(註) 語見咸豐九年 (1859) 偉烈亞力代數學序.

270—271 復於大衍術作詳細之解說.厥後德之 Cartor, 日之三上義夫幷於大衍術爲鄭重之介紹.比教士 Le Rév. Père Vanhée 於通報 T'oung-pao, Vol. XIV. pp. 11–26, Leide, 1913 上著 Les cent volailles ou Analyse indéterminée en Chine. 則所介紹更爲詳細焉.

19. 大衍求一術與連分數

任何分數可化爲連分數.即分數 $\frac{G}{A}$ 可以 $q_0+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{q_n}+\frac{r_n}{r_{n-1}}$ 之連分數表之.就中 n 常爲偶數, $r_n=1$, $G<A$, $q_0=0$. 其逐次之漸近分數爲

$$\frac{q_0}{1}=\frac{\mu_0}{a_0},\ \frac{q_1q_0+1}{q_1}=\frac{\mu_1}{a_1},\ \frac{q_2\mu_1+\mu_0}{q_2a_1+a_0}=\frac{\mu_2}{a_2},\ \frac{q_3\mu_2+\mu_1}{q_3a_2+a_1}=\frac{\mu_3}{a_3},\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\mu_n}{a_n}=\frac{q_n\mu_{n-1}+\mu_{n-2}}{q_na_{n-1}+a_{n-2}}.$$

而 $\frac{\mu_n}{a_n}$ 爲直在 $\frac{G}{A}$ 前之漸近分數,因 n 爲偶數,依連分數定理,則

$$Ga_n-A\mu_n=(-1)^n=1.\quad 即$$

$$a_nG\times\mu_nA+1,\qquad \therefore\ \left|\frac{aG}{A}=1.\right.$$

大衍求一術所求乘率 a_n, 卽求直在 $\frac{G}{A}$ 前漸近分數之分母,如

$$\frac{52}{55}=0+\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{3}\overset{(r_2)}{}\,,\quad \alpha=18$$
$$(q_0)\ (q_1)\ (q_2)\quad (r_1)$$

$$\frac{87}{247}=0+\frac{1}{15}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\overset{(r_4)}{}\,,\quad \beta=139$$ 是也.
$$(q_0)\ (q_1)\ (q_2)\ (q_3)\ (q_4)\quad (r_3)$$

20. 大衍求一術與百雞術

百雞題問見於張丘建算經卷末，一問數答，爲他舊算書所未有.駱騰鳳藝游錄以大衍求一術解之，盡合題意.時曰醇別作百雞術衍并附求一術解法，以補駱氏之不足.錢寶琮別有「百雞術源流考」刊入學藝三卷三號(十年七月)，可參觀焉.

21. 大衍求一術與不定方程

孫子題問曾紀鴻(1848–1877)以代數式解之，附載求一術通解卷下，如

$$\left|\frac{N}{(3,5,7)}=(2,3,2).\ N=3x+2=5y+3.\right.$$ 或 $3x=5y+1$,

$$x=y+\frac{2y+1}{3}=y+\alpha.\quad y=\frac{3\alpha-1}{2}=\alpha+\frac{\alpha-1}{2}=\alpha+\beta,\ \alpha=2\beta+1.$$

故　$\alpha=2\beta+1,\quad y=3\beta+1,\quad x=5\beta+2.$

而 $N=3x+2=15\beta+8.$

又 $N=7x+2=15\beta+8$, 或 $7x=15\beta+6$, $x=2\beta+\frac{\beta+6}{7}=2\beta+\gamma.$

故 $\beta=7\gamma-6$, $x=15\gamma-12.$

而 $N=7x+2=105\gamma-82.$

令 $\gamma=1$, 則 $N=23.$

陳志堅求一得齊算學(1904)演無定式,謂孫子算經物不知數題,及張丘建雞翁雞母題,以無定方程馭之,則兩術不難貫爲一條,并謂

$$\frac{N}{(3,5,7,13)}=(2,3,2,9),$$ 題之答數1283,其答數無窮.

22. 何承天調日法與零約

宋何承天調日法,用強弱二率,齊祖冲之求圓周立約密二率,錢寶琮以爲皆似得之於求一術.說見學藝三卷四號(十年八月).惟調日法及綴術今都失傳,不得斷定.而李銳之日法朔餘強弱考與日本關孝和之零約則有相同之點,可較論焉.

括要算法第四卷(1709)用零約求周徑率,以「周率三徑率一爲初,以周率爲實,以徑率爲法,實如法而一,得數少於定周者,周率四徑率一,多於定周者,周率三徑率一,各累加之」即

$$\frac{3}{1} > 周,\quad \frac{4}{1} > 周$$

$$\frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}(=3.5) \qquad > 周.$$

$$\frac{7+3}{2+1} = \frac{10}{3}(=3.33\cdots) \quad > 周.$$

$$\frac{10+3}{3+1} = \frac{13}{4}(=3.25) \qquad > 周.$$

逐次得 $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{29}{9}$, $\frac{32}{10}$, $\frac{35}{11}$, $\frac{38}{12}$,

$\frac{41}{13}$, $\frac{44}{14}$, $\frac{47}{15}$, $\frac{51}{16}$, $\frac{54}{17}$, $\frac{57}{18}$, $\frac{60}{19}$, $\frac{63}{20}$, $\frac{66}{21}$, $\frac{69}{22}$, $\frac{73}{23}$, $\frac{76}{24}$,

$\frac{79}{25}$, $\frac{82}{26}$, $\frac{85}{27}$, $\frac{88}{28}$, $\frac{91}{29}$, $\frac{95}{30}$, $\frac{98}{31}$, $\frac{101}{32}$, $\frac{104}{33}$, $\frac{107}{34}$,

$\frac{110}{35}$, $\frac{113}{36}$, $\frac{117}{37}$, $\frac{120}{38}$, $\frac{123}{39}$, $\frac{126}{40}$, $\frac{129}{41}$, $\frac{132}{42}$,

$\frac{135}{43}$, $\frac{139}{44}$, $\frac{142}{45}$, $\frac{145}{46}$, $\frac{148}{47}$, $\frac{151}{48}$, $\frac{154}{49}$, $\frac{157}{50}$,

$\frac{161}{51}$, ..., $\frac{355}{133}$.

若依李銳之法,則收斂可以較速,卽

$$\frac{3}{1} < 周,\quad \frac{4}{1} < 周.$$

逐次得 $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{19}{6}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{47}{15}$, ..., $\frac{157}{50}$,

......, $\frac{333}{106}$, ..., $\frac{355}{113}$ 是也.

且就李銳之法以$\frac{22}{7}$爲強率,$\frac{157}{50}$爲弱率,因之求得

$\pi=\frac{355}{113}$,而強數爲9,弱數爲1.

即 $\pi=\frac{355}{113}=\frac{22\times9+157\times1}{7\times9+50\times1}$.

23. 晚近關於求一術之論著

秦九韶數書九章以宜稼堂叢書本流傳爲最廣.勞乃宣籌算考釋續編(1900)卷五.六論求一,卷七論求一方程,亦與學者不少之興會.光緒丁酉(1897)劉彝程弟子龔傑著求一捷法設爲四例以代大衍術.

「一例.凡題中約數僅有一項,如云以7約之餘6,則可見最小數爲13,或云以8約之餘3,則可見最小數爲11.

二例.凡題中約數,設有二例,則約數必一大一小,當由約數之大者求之,如云以7約之餘6,以3約之餘2,可求得7約之最小數爲13,其倍數爲7,此數3約之,未必餘2,故以倍數遞加之,至3約餘2爲止.

三例.設約數有多項,仍依前例,求得最大兩個約數之最小數,以兩約數相乘爲倍數,仍如前法,以求第三數.

四例. 約數多一項,則求法亦多一次].

設題如 $\left|\dfrac{N}{(17,13,11,9,7)}\right.=(7,3,1,8,4.)$

則 $\dfrac{N}{17}=7$, N 之最小數爲 24, 其倍數爲 17.

依例得 $(24+17m)-13n=3$. 求得 $m=11$.

則 $\left|\dfrac{24+17m}{16\times13}\right.=(7,3)$ 時 N 之最小數爲 211.

其倍數 $221=17\times13$.

又得 $(211+221m)-11n=1$. 求得 $m=10$.

則 $\left|\dfrac{211+221m}{17\times13\times11}\right.=(7,3,1)$ 時 N 之最小數爲 2421.

其倍數 $2431=17\times13\times11$.

又得 $(2421+2431m)-9n=8$. 求得 $m=8$.

則 $\left|\dfrac{2421+2431m}{17\times13\times11\times9}\right.=(7,3,1,8)$ 時 N 之最小數爲 21869.

其倍數 $21879=17\times13\times11\times9$.

因 $\left|\dfrac{21869}{7}\right.=4$, 故此題 $N=21869$.

近則傅種孫之大衍術載於北高數理雜誌第一期.錢寶琮之求一術源流考載於學藝三卷四號(十年八月),徐震池之商餘求原法載於科學十卷二期(十四年五月),皆論述此問題也.錢氏於求一術得三簡

法,而徐氏則未閱中法,亦能得相同之結果,尤爲難能.然大衍求一術與他算法尚多關聯,正有廣大地域,爲學者考究之餘地,因不憚詳述古今關於此術已研得之結果,并與他算法關係之大略,深望將來發揚光大爲中算增光,此則標題「大衍求一術之過去與未來」之微意也.

十四年九月於靈寶.

敦煌石室算書

敦煌石室「算書」現藏法國巴黎圖書館，爲伯希和氏敦煌將來目錄之第二六六七號。伯希和君影攝見贈。此卷除首尾殘鈌外，有十二題可讀，爲吾國現存寫本算書之最古者。校讎既畢，錄載於此，用公同好。 李儼識

今有馬七萬八千九百八十五疋。三萬二千三百二十三疋上馬，日給粟五升。二萬四千三百卌一疋中馬，日給粟四升。二萬二千三百廿一疋下馬，日給粟三升。問前件三等馬一日，十日，一月，一年之食粟各幾何？曰一日合食粟三萬二千五百九十四㪷二升，十日合食卅二萬五千九百卌二㪷二升，一月食九十七萬七千八百廿六㪷，一年食一千一百七十三萬三千九百一十二㪷。術曰，置上馬三萬二千三百廿三疋，以五升乘之，退一等，得上馬一日食粟一萬六千一百六十一㪷五升，置於上方。次置中馬二萬四千三百卌一疋，以四升乘之，退一等，得中馬一日食粟九千七百卅六㪷四升，亦置上方。次置下

馬二萬二千三百廿一疋,以三升乘之,退位一等,得下馬一日食粟六千六百九十六斛三升.惣併三位得都合一日食粟三萬二千五百九十四斛二升,上十之,得十日都食卅二萬五千九百卌二斛,又以三因之,得一月都合食粟九十七萬七千八百廿六斛,又以十二乘之,得一年都合食粟一千一百七十三萬三千九百十二斛.

營造部第七,

今有塹廣八尺,下無廣,深八尺,長七百卅五尺,問千尺爲一方,凡得幾何方.曰廿三方,不盡五百二十尺.術曰,先張長七百卅尺,深次,廣八尺,半之得四尺,以四尺乘之,得二千九百卌尺,深八尺乘之,得二萬三千五百廿,以一千尺於下除之,卽得.

今有堤下廣五丈,上廣三丈,高二丈,長六十尺,限用一千二百人,一日人二尺.問凡用幾何日得了.曰二十日得了.術曰,置上廣卅尺,下廣五十尺併之得八十尺,半之得卌尺,以高廿尺乘之得八百尺,復以其長六十尺乘之,得四萬八千尺於上.次列一千二百尺一日二尺乘之,得二千四百尺,以二千四百尺除上位,卽得.

今有屋東西長六丈,廣三丈,尺用瓦二枚.問總得幾何瓦.曰三千六百枚.術曰,以廣卅尺乘長六十尺得積尺一千八百尺,以瓦二枚乘得三千六百枚.

今有城周廻十七里二十五步,欲豎鹿角梆,三尺立一根.問凡幾何根.曰用四千二百五十根.術曰,城七里,以三百步乘之,內廿五,得二千一百廿五,以六尺因之得積尺,得一萬二千七百五十尺,以三尺除之,卽得根數四千二百五十根.

今有綿七千二百廿六斤,欲造袍,領別用綿八斤.問物合着綿得幾領.曰九百三領余二斤.術曰,先張綿七千二百二十六斤於上,以八斤於上除之,卽得袍九百三領,余二斤.

今欲造袍一千八百九十二領,凡別用紫,帛各三丈五尺.問惣紫,帛幾何.曰合用二千三百一十一疋,一千六百五十五疋二丈紫,一千六百五十五疋二丈帛.

今有城周迴十八里,四面有門,門有二樓;又四角,角有一大樓,一十五小樓.廿步置一弩,卅步置一方梁,六十步置一石車,五步置一鈎.一大樓上着卅人,一小樓着廿人,弩着三人,一方梁着八,石車置廿

人,一鈎置二人,又欲一步着戰士一人.問凡用兵幾何.曰一十二大樓用人四百八十個,小樓用人一千二百,二百七十張弩,用人八百一十.一百卅五方梁,用人一千八十人,九十個石車,用人一千八百人,一千八十枚鈎,用人二千一百六十人,五千四百步,用人五千四百.術曰,先張大樓十二以卌乘之得四百八十人.次張小樓十五以四乘之得小樓六十,以二十乘之,得一千二百人.次張城十八里以三百步乘之,得積步五千四百,次以廿除之,得弩二百七十張,以三人因之得八百一十人.次更置積步五千四百,以卌步除之得方梁一百卅五,以八因之,得一千八十人.次置積步五千四百,六十步除之得石車九十,以廿人乘之,得一千八百人.次更置積步五千四百以五步除之得鈎一千八十枚,以二人乘之,得二千一百六十人.次更置積步五千四百以一人因之得一,乘步長,遂得五千四百人卽是.欲得都數併之得一萬二千九百卅人.

今有四王各領九軍出征,一軍有儀同,欲使二人共駛,三駛共火,四火共帥,五帥共將,六將共一都督,七都督共一營主,八營主共一儀同.問合得幾何.

曰四王,卅六儀同,二百八十八營主,二千一十六都督,一萬二千九十六將,二萬四百八十帥,二十四萬一千九百二十火,七十二萬五千七百六十駃,一百三十五萬一千五百二十人正身.術曰,先張四王以九因之,得儀同之數卅六人.次以八因之,得營主之數二百八十八人.次以七因之,得都督之數二千一十六人.次以六因之,得大將之數一萬二千九十六人.次以五因之,得帥之數六萬四百八十人.次以四因之,得火之數廿四萬一千九百廿火.次以三因之,得駃之數七十二萬五千七百六十.次以二因之,得正身數一百卌五萬一千五百廿人,即得.

□□部第九.

今有木方三尺,高三尺,欲方五寸,作枕一枚.問惣得幾何.曰二百一十六枚.術曰,以方三尺乘之,得九尺,以高三尺乘之,得廿七尺,又以八因之,即得枕數.

今有蠟方三尺高三尺,欲一日燃方寸,問得幾日燃.曰得七十五年燃.術曰,方三尺自相乘得九尺,復以高三尺乘之,得廿七尺,遷上十作寸,得二萬七千寸,以三百六十日除之,即得.

今有木廣三尺,長三尺,高三尺,欲方三寸,作枕一枚,問㯝得枕幾何.曰一千枚.術曰,廣長自相乘得九尺,復以高三尺乘之得二十七尺,遷十作寸,得二萬七千寸.次方三寸自相乘得九寸,復以高三寸乘之,得二十七寸,以二十七寸除之,即得枕數.

明代算學書志

嚴恭通原算法一卷，明洪武五年(1372)嚴恭撰.

李儼所藏鈔本諸家算法中有嚴恭通原算法最題及序文.書爲莫友芝(1811—1871)子繩孫舊藏.

李儼所藏影攝本永樂大典卷一六三四三之一六三四四，十翰，算法十四之十五，亦有嚴恭通原算法最題.原書藏英劍橋大學.按諸家算法亦錄自永樂大典.

洪武壬子(1372)迎夏日朝列大夫潮州府趙瑀序稱「……姑蘇嚴君恭幼讀之，以明其理，長試吏術，其緒餘乃及於數學，而益致其精.一日袖書一卷示予，名曰通原算法.自言以兵亂失故傳，此特其默集者爾，欲鋟諸梓，以廣其傳，屬予引其端，……」

鈔本諸家算法最題中有大衍求一術題問，李儼大衍求一術之過去與未來(註1)文中，曾引及之.

(註1) 李儼大衍求一術之過去與未來第四頁學藝雜誌七第

裘沖曼中國算學書目彙編載有通原算法二册(註 2).

九章通明算法□卷, 永樂二十二年 (1424) 劉仕隆撰.

「永樂二十二年 (1424) 臨江劉仕隆作九章而無乘除等法. 後作難題三十三款」見程大位算法統宗 (1593) 卷十三, 第十三頁. (註 3) 又見梅穀成 (1681—1763) 增删算法統宗卷首「古今算學書目」. (註 4) 算法統宗卷首又稱「夫難題昉於永樂四年 (1406) 臨江劉仕隆公偕內閣諸君預修大典退公之暇, 編成雜法, 附於九章通明之後……」

指明算法二卷, 正統四年 (1439) 夏源澤撰.

「正統己未 (1439) 江寧夏源澤作, 九章不全」, 見算法統宗卷十三, 及增删算法統宗卷首.

卷第二號, 中華學藝社, 民國十四年 (1925) 上海.

(註 2) 清華學報第三卷, 第一期, 北京清華學校學報社民國十五年 (1926) 六月.

(註 3) 古今圖書集成, 歷象彙編, 歷法典, 第一二五卷, 算法部彙考十七.

(註 4) 光緒戊戌 (1898) 江蘇書局刊本.

按明高儒百川書志(1540)卷十一第五頁有「指明算法二卷,不知作者,二十四則」(註5)再續百川學海癸集作二卷.

九章比類算法十卷(?),景泰九年(1450)吳信民撰.

「景泰庚午(1450)錢塘吳信民作,共八本,有乘除,分九章,每章後有難題.其書章類紊亂,差訛者多」,見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.又「錢塘吳信民九章比類與諸家算法中詩詞歌括口號總集,名曰難題.」見算法統宗卷首.

按明周述學神道大編曆宗算會稱;吳敬詳註九章.天一閣藏明刋本吳敬編算法大全十卷,一作八本.(註6)清初武林清來堂書目載有明吳敬比類算法大全.明趙琦美脈望館書目有九章算法比類大全八本,又算法大全四本.(註7)疑敬卽信民,未知是否.

古今捷法□卷,乘除秘訣□卷,日用便覽□卷.

(註5) 民國乙卯(1915)長沙葉氏觀古堂刻本.

(註6) 玉簡齋叢書二集本.

(註7) 趙琦美脈望館書目第二册第四十二頁,涵芬樓秘笈第六集,上海商務印書館印本,民國七年(1918)十月.

以上三書見譚文數學尋源卷之一(乾隆十五年1750自序),置於九章通明及九章比類算法間,疑亦明人著作.譚文自稱「其未經目見者,不敢妄載,」則各書當時必具在也.

算學通衍□卷成化八年(1472)劉洪撰.

「成化壬辰(1472)京兆劉洪作」見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

九章詳註算法九卷,成化十四年(1478)許榮撰.

「成化戊戌(1478)金陵許榮作,採取吳氏法」見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

按明高儒百川書志(註8)卷十一第六頁有「九章算法詳註九卷,金陵許榮孟仁重編」.

九章詳通算法□卷,成化十九年(1483)余進撰.

「成化癸卯(1482)鄱陽余進作,採取詳明,通明法」見算法統宗卷十三,及增删算法統宗卷首.

按算法統宗卷十三稱;「詳明算法元儒安止齊,何平子作,有乘除而無九章.」李儼所藏諸家算法載其序文及最題,作二卷.李儼所藏永樂大典卷一六

(註8) 民國乙卯(1915)長沙葉氏觀古堂刻本.明嘉靖庚子(1540)自序.

三四三之一六三四四，十翰，算法十四之十五，其中收錄詳明算法最題，有爲諸家算法所未收者．又通明卽劉仕隆之通明算法．

啟蒙發明算法□卷，嘉靖五年(1526)鄭高昇撰．

「嘉靖丙戌(1526)福山鄭高昇作」，見算法統宗卷十三，及增删算法統宗卷首．

按明朱睦㮮萬卷堂書目(明隆慶庚午，1570，自序)卷三第九頁(註9)有「啟蒙算法四册」當卽此書．

改正算法口卷，嘉靖五年(1526)馬傑撰．

「河間吳橋人，嘉靖丙戌(1526)作，而無乘除，只改錢塘吳信民法，反正爲邪數款，今予辯明，圖釋參校，免誤後學」見圖書集成本算法統宗卷十三，而增删算法統宗卷首題「戊戌(1538)作」．

又算法統宗卷三稱；「孤峯馬傑斷曰；錢塘算師吳信民，編集比類仕罕聞，孤峯裁改崔坡校，錢田之法有差爭．」…「據傑用方束之法．反正爲邪，共免有左，殊不知束積皆是論個論隻之物，無零，宜當除根，不辯明矣．束法具載第六卷，少廣章．」

按吳橋屬河間府景州，在州東．見明史卷四十．

(註9) 光緒癸卯(1903)長沙葉氏刻本．

句股算術二卷，嘉靖十二年(1533)顧應祥撰.

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻本句股算術上下卷，前有顧應祥(1483－1565)自序稱:「…應祥自幼性好數學，然無師傳，每得諸家算書，輒中夜思索，至於不寐，久之，若有神告之者，遂盡得其術.既而又得周髀及四元玉鑑諸書，於是所謂句股弦和較黃中之說，開闔折變，悉得古人立法之旨，….」末題「歲嘉靖癸巳(1533)夏四月朔，吳興箬溪道人顧應祥書於滇南巡撫行臺.」

正明算法□卷，嘉靖十八年(1539)張爵撰.

「嘉靖己亥(1539)金臺張爵作」見算法統宗卷十三，及增删算法統宗卷首.

算理明解□卷，嘉靖二十年(1540)陳必智撰.

「嘉靖庚子(1540)江西甯都陳必智作」見算法統宗卷十三，及增删算法統宗卷首.

按寧都屬江西贛州府，在府東北.見明史卷四十二.

重明算法□卷，嘉靖二十年(1540)林高撰.

訂正算法□卷，嘉靖二十年(1540)林高撰.

「嘉靖庚子(1540)浙東會稽林高作，詳解定位.」

見算法統宗卷十三.

測圓海鏡分類釋術十卷,嘉靖二十九年(1550)顧應祥撰.

按趙魏竹崦盦傳鈔書目載有「測圓海鏡分類釋術十卷,明顧應祥撰,二百三十一(頁)」.(註10)

浙江圖書館藏有明嘉靖庚戌(1550)刻本顧應祥撰測圓海鏡分類釋術十卷.

弧矢算術無卷數,嘉靖三十一年(1552)顧應祥撰.

「嘉靖壬子(1552)顧若溪作,無乘除」.見算法統宗卷十三.

涵芬樓秘笈第六集本脈望館書目第二册第四十三頁,載「弧矢算術,方圓術,黃鍾術,句股術共一本」.(註11)

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻弧矢算術一本.卷前序稱;「弧矢一術,古今算法所載者絕少.錢塘吳信民九章算法止載一條,四元玉鑑所載數條,皆不言其所以然之故,沈存中夢溪筆談有割

(註10) 長沙葉氏觀古堂刻本.

(註11) 上海商務印書館,民國七年(1918)印本.

圓之法,雖自謂造微,然止於徑矢求弦.而於弦背求矢,截積求矢諸法,俱未備,予每病之.南曹訟牒頗暇,乃取諸家算書,間附己意,各立一法,名曰弧矢算術,藏諸篋笥,俟高明之士取正焉.未敢謂盡得其閫奧也」.「嘉靖壬子(1552)春三月吉吳興顧應祥識」.又有方圓術,黃鍾算附載卷後.

測圓算術四卷,嘉靖三十二年(1553)顧應祥撰.

涵芬樓秘笈第六集本脈望館書目第二册第四十三頁載有「測圓算術一本」.

浙江圖書館藏有明嘉靖癸丑(1553)刻本測圓算術,前有序稱;「句股求容圓之徑,古有其法,未有若元翰林學士欒城李先生之精且密也.其所箸測圓海鏡,設爲天,地,日,月,山,川,東,西,南,北,乾,坤,艮,巽,名號.而以通句股,邊句股,底句股等錯綜而求之,極爲明備.但每條細草,止以天元一立算,而漫無下手之處.應祥已爲之類釋.既而思之,猶有未當於心者…於是別出己見,復爲編次其難曉者,….」「嘉靖癸丑(1553)夏四月望吳興顧應祥志.」又有後序一篇,題「嘉靖癸丑(1553)夏六月望前二日,屬下郎中龐嵩頓首謹書」.

神道大編歷宗算會十五卷,嘉靖三十七年(1558)周述學撰.

此書題山陰雲淵周述學繼志輯撰,凡十五卷.篇首有一序,僅存;

「嘉靖戊午仲夏天中節.

賜進士第朝列大夫國子祭酒前春坊.

太子中允翰林修撰.

經筵國史六峯周文燭撰」.

四行.

此書梅文鼎曾見及.梅氏少廣拾遺及勿菴歷算書目幷題此書.黃宗羲南雷文約爲周述學作傳,則末舉之.阮元疇人傳僅稱「周述學…撰補弧矢.則此書湮沒將三百年矣」.

江南圖書館藏有歷宗算會八册.第一册卷一入算,卷二子母分法.第二册卷三句股.第三册卷四開方,卷五立方,卷六平圓.第四册卷七弧矢經補上,卷八弧矢經補下.第五册卷九分法互分.第六册卷十總分,卷十一各分.第七册卷十二積法.第八册卷十三立積,卷十四隙積,算會聖賢姓氏,卷十五歌訣.

算林拔萃□卷,隆慶六年(1572)楊溥撰.

「隆慶壬申(1572)宛陵太邑楊溥作」.見算法統宗卷十三.

數學通軌□卷,萬歷六年(1578),柯尙遷撰.

按柯尙遷明長樂人,字喬可,自號陽石山人,嘉靖中由貢生官邢臺縣丞.所著數學通軌,論述算盤,事在程大位算法統宗前.

一鴻算法□卷,萬曆十二年(1584)余楷撰.

「萬曆甲申(1589)銀邑余楷撰」.見算法統宗卷十三.

庸章算法□卷,萬曆十六年(1588)朱元濬撰.

「萬曆戊子(1588)新安朱元濬作」.見算法統宗卷十三;及增删算法統宗卷首.

算海詳說□卷,李長茂撰.

見算法統宗及勿菴曆算書目.

算法統宗十三卷,萬曆二十一年(1593)程大位撰.

「程大位字汝思,號賓渠,新安人,少遊吳楚,舉生平師友之所講求,咨詢之所獨得者,箸算法統宗十三卷.以古九章爲目,後以難題附之.萬歷癸巳(1593)漸江(卽浙江)吳繼授爲之序.

幾何原本前六卷，萬歷三十五年(1607)利瑪竇徐光啓共譯.

萬歷八年(1581)利瑪竇(Ricci, Matteo, 1529－1610)始汎海九萬里，抵廣州之香山澳」. 見明史第三二六卷.「利瑪竇由澳門轉入八閩至金陵，出其渾天儀，量天尺，句股舉要算法，留都臺省」. 見澳門記略卷下.(註12) 萬歷三十一年(1603)利瑪竇與徐光啓(1562－1634)計議譯幾何原本. 至三十四年(1606)秋始實行，三十五年(1607)春譯成，并在北京出版.(註13)

圜容較義無卷數，萬歷三十七年(1609)利瑪竇李之藻演.

圜容較義前有萬歷四十二年(1614)李之藻(…1631)序，稱戊申(1609)十一月畢圜容較義一書.

錢曾也是園藏書目卷第五作利瑪竇圜容較義一卷.

同文算指前編二卷，通編八卷，利瑪竇授.李之藻譯.

(註12) 印光任，張汝霖澳門記略卷下第四十五頁，光緒庚辰(1880)江寧藩署重刻.

(註13) 利瑪竇幾何原本序，并徐光啓題幾何原本再校本.

前編有萬歷癸丑(1613)李之藻序,及萬歷甲寅(1614)徐光啟序.按利瑪竇卒於萬歷三十八年(1610)四月.(註 14)

則此書爲卒去前所授矣.

邵亭書目姚若有鈔本.後多一卷.

測量法義無卷數,利瑪竇譯,徐光啟受.

按利瑪竇卒於萬歷三十八年(1610)四月,則此書爲卒去前所譯矣.

也是園藏書目卷第五作利瑪竇測量法義一卷.

測量異同無卷數,徐光啟撰.

李之藻刻測量異同於天學初函中.之藻以崇禎四年(1631)卒,則此書成於崇禎初年矣.

幾何體論一卷,三十五葉,幾何用法一卷,四十八葉,孫元化撰.

豐順丁氏持靜齋書目有幾何體論一卷,卷後有慶餘心齋諸印.又有幾何用法一卷,卷後題道光己酉春,烏程程慶餘校讀一過.又有慶餘疇人子弟

(註 14) 明史卷三二六,外國七.

諸印.

「孫元化嘉定人,字初陽,天啟舉人.從徐光啟游.得西洋火器法.崇禎初起兵部員外郎.以孔有德變,棄市.」見中國人名辭典第七五〇頁.

按徐光啟句股義稱;「句股自相乘,以至容方,容圓,各和,各較相求者,舊九章中亦有之,第能言其法,不能言其義也.所立諸法,蕪陋不堪讀,門人孫初陽氏删爲正法十五條,稍簡明矣.余因爲論譔其義.」是孫元化曾立句股正法十五條,而徐光啟爲之論撰成句股義也.

泰西算要一卷,孫元化撰

見曾遠榮中國算學書目彙編增補.(註15)

句股義無卷數,徐光啟撰.

李之藻刻句股義於天學初函中.之藻以崇禎四年(1632)卒,則此書成於崇禎初年矣.

度測三卷,附開方號一卷,度算解一卷,陳藎謨撰.

陳藎謨字獻可,號嘯庵,嘉興人,所著書大抵以西

(註15) 清華學報第三卷第一期.

人之說,傅合古義,其太極率令 $\pi=3.15205$, 語見阮元疇人傳卷三十三.

中西數學圖說十卷,崇禎四年(1631)?,李篤培撰.

民國十一年(1922)山東歷史博物展覽會報告書載該會展覽品,有鈔本中西數學圖說十二册,爲明季李篤培所撰.李字汝植號仁宇,山東招遠人,萬歷己酉(1609)亞魁,庚戌(1610)會魁,任工部主事,生於萬歷三年(1575)十月,卒崇禎四年(1631)十一月.(註16)據報告書云「明季西人利瑪竇來華,帶有西國算書,李氏閱之,悉以中法演出,所有一切方法,分類納之九章之中.其所用之法,并有中西所無者,推類以充其極,著之各章之中,世徒知有徐光啟輩,而先生反湮沒不彰,豈非有幸有不幸歟」.(註17)

按原書十二册;卷一方田,形積相求補.卷二方田,畝法,卷三粟布,分;單准,雙准,變准,重准,成立法,斤兩法,年月法,盤查法八篇.卷四衰分,分;合率衰分,等率衰分,照本衰分,貴賤衰分,子母衰分,匿價衰分,雜和衰分,借徵法八篇卷五少廣,分六篇.卷六商功,分;

(註16) 據山東招遠縣李氏家乘,及招遠縣志,「人物別傳」.

(註17) 山東歷史博物展覽會報告書第二編第五十六頁.

修築,高廣變法,開濬;課工,料計,推步,歷法,聲律,八篇.卷七均輸,分;定賦役,計蹤里,均法,加法四篇.卷八盈朒,分盈不足,兩盈兩不足,盈足朒足,開方盈朒,子母盈朒,借徵盈朒六篇.卷九方程,分二種方程,多種方程正負方程,子母方程,較方程,等方程六篇.卷十句股,分;句股相求,句股和較,句股容,句股測,鏡測法,尺測法,知方之術七篇.篤培卒於崇禎四年,而書中有崇禎三年之語,則此書蓋其絕筆也.

算集□卷,廣西全州宋卿陳邦備撰.

見曾遠榮中國算學書目彙編增補.

以上所記,大抵已知撰人姓氏及其時代者,其未記時代或撰人姓氏者.有,

算法大全□卷,都察院刻.

算法□卷,南京國子監刻.

九章算法□卷,南京國子監刻.

見明黃弘祖古今書刻.(註 18) 按弘祖,明嘉靖三十八年(1559)進士.

算法二卷.

(註 18) 光緒丙午(1906)長沙葉氏觀古堂刻本.

見重刻明南雍經籍攷卷下.(註19)

金蟬脫殼,縱橫算法一卷,不知作者.

見明高儒百川書志第十一卷第五頁,葉氏觀古堂刻本.

按程大位算法統宗卷十三,有金蟬脫殼及縱橫算法,則此書之出,在萬曆二十一年(1593)前矣.

算法通纂一本.

百家纂證一本.

九章詳註比類均輸算法大全六本.

見脈望館書目第二册第四十二頁,涵芬樓秘笈第六集本.按玉簡齋叢書二集本脈望館書目作算法通纂一本,百家算譜一本,九章詳解比類均輸算法大全六本.

開平方訣一本.

見四明天一閣藏書目錄律字號廚,第五十二頁,玉簡齋叢書二集本.按明刻本周髀算經附有開平方訣一頁,未知是否出於此書.

句股索隱□卷.

(註19) 光緒壬寅(1902)長沙葉氏校刊本卷下,第三十二頁.

明崇禎曆書本測量全義一卷二十四頁稱:「又問設兩邊總之較,問各邊若干.此測量不常用,見句股索隱」.未知此書世有傳本否.

此外之見於叢書者,明初有永樂大典.清人戴震(1724–1777)曾於此中集出或校補下列各算經:

周髀算經二卷,音義二卷.據大典本補正.

九章算術九卷.大典本.

孫子算經三卷.據大典本校正.

海島算經一卷.大典本.

五曹算經五卷.據大典本校補.

夏侯陽算經三卷.大典本.

五經算術五卷.大典本.

由武英殿聚珍版印行.(註20)其採輯而未印行者,又有

益古演段三卷,元李治撰.

原本革象新書五卷,元趙友欽撰.

數學九章十八卷,宋秦九韶撰.

此書又有趙琦美,萬歷四十五年(1617)傳鈔本

(註20) 彙刻書目第五册第五頁,翻刻光緒十二年(1886)本,或朱記榮行素堂目睹書錄一編,第五十二頁,光緒甲申(1884)家刻本.

一種.(註 21)

永樂大典遺篇尙有流傳海外者. 英劍橋大學藏卷一六三四三之一六三四四, 十翰, 算法十四之十五. 爲「異乘同除」,「少廣」兩節. 其所引算書有; 九章算經, 孫子算經, 五經算術, 五曹算經, 夏侯陽算經, 秦九韶數學九章, 楊輝摘奇算法, 楊輝詳解算法, 楊輝日用算法, 楊輝纂類, 透簾細草, 錦囊啓蒙, 丁巨算法, 賈通金能集, 詳明算法, 嚴恭通原算法.

明末所修崇禎曆書, 關於算法者, 又有

割圜八線立成長表四卷.

大測二卷, 崇禎四年(1631)正月徐光啟等進呈.

割圜八線表六卷, 崇禎四年正月徐光啟等進呈.

測量全義十卷, 崇禎四年八月徐光啟等進呈.

比例規解一卷, 崇禎四年八月徐光啟等進呈.

其附見於個人集部者, 則

句股測望論, 句股容方圓論, 弧矢論, 分法論, 六分論, 無卷數, 唐順之撰.

(註 21) 數書九章跋及札記序, 宜稼堂叢書本.

見於荊川文集.按唐順之(1507—1560)字應得,號荊川,武進人.其所論箸,幷爲周述學,程大位所引用.

算學新說上下二卷,附周徑篇,朱載堉撰.

見於樂律全書.

周髀算經圖解一卷,朱載堉撰.

見於嘉量算經.

按朱載堉(1536—?)字伯勤,號句曲山人,鄭恭王厚烷世子.明神宗十九年(1589)恭王薨,讓爵於孟津王之子見滛.載堉明曉天算,神宗二十三年(1595)進樂律全書,及聖壽萬年歷.以 $\pi=\frac{\sqrt{2}}{0,45}$.萬歷庚戌(1610)成嘉量算經三卷.見明史「諸王傳」,樂律全書,人海記,及阮元四庫未收書目提要.

明清之際西算輸入中國年表

目　次

1. 通論

2. 年表

1. 通論

明初因授時歷而作大統歷,行之二百年,違天失時,其事漸著.邢雲路,魏文魁,宋仲福,朱載堉之徒,類能言之.顧其時算數之術,亦不昌明,宋元諸子,所遺之天元一術,已無人或曉,以是雖屬有志,而改作無由.利瑪竇則適於萬歷辛巳(1581)來華,初亦不為人重,及舉示其歷算學說,始為世崇,幷獲入都覲見.在野則與徐光啟譯幾何原本前六卷(1606),是為西算輸入中國之初步.前後幷授李之藻,徐光啟以算術;計有同文算指,圜容較義,測量法義,而徐光啟因亦有測量異同,句股義之作.此外傳其法者,尚大有人.至利瑪竇萬曆庚戌(1610)卒去後,西士來者漸衆,如艾儒略,

龐迪我,熊三拔,陽瑪諾等,幷通歷算,且各有譯述.迄萬曆壬子(1612)以降,周子愚,李之藻輩,幷以舊歷不合,議請設局修改未果,直至崇禎己巳(1629)始實行以徐光啟督修歷法,西洋人入局者,有龍華民,鄧玉函.翌年(1630)鄧玉函卒,繼入者爲湯若望,羅雅各.如是辛未(1631)進歷書二次;第一次二十四卷,第二次二十卷幷一摺.壬申(1632)三次進書三十卷.次年徐光啟卒去,遺摺舉李天經自代.時則歷書大體已具,而算學中之割圜術,三角術及三角函數表,幾何畫法,比例規,籌算,幷從歷書中附帶輸入矣.李天經繼任後,於甲戌(1634)進歷書二次;第四次二十九卷一架,第五次三十二卷,前後五次共一百三十七卷.自後逐年進七政經緯新歷,其監局官生與其事者五六十人,可謂盛矣.而舊派中冷守中,魏文魁則於徐光啟未卒時已倡言反對,光啟卒後,其勢更張,卒以魏文魁爲東局,與新法之西局,幷大統,回回爲四家.其後雖新法測驗獨合,明廷亦加禮西局修歷官生,而新法迄明亡(1644)終未實行也.

明亡後,湯若望卽與清廷接洽修歷,頗爲清世祖所重,遂以湯若望掌管欽天監印信,順治乙酉(1645)

修補歷書得一百卷.其時待遇之隆,爲前此所未有,如是者十有五年.同時穆尼閣居南京,以對數之說授薛鳳祚,是爲對數輸入中國之始.至順治末年(1659-61)楊光先肆力反對新法.清聖祖初即位,便興大獄,廢新法,囚教徒,殺官生五人,以楊光先繼湯若望.康熙丙午(1666)湯若望卒後,南懷仁起劾舊法之誤,於是復行新歷,繼起反對,若楊燝者,幷得罪而去.而南懷仁新法,由監局官生肄習,永遠遵行焉.顧此時朝野亦知算數之宜重,故杜知耕,李子金,梅文鼎(1633-1721),陳訏(1650-1732),黃百家,梅瑴成(1681-1761)輩,幷以整理西算爲志.聖祖亦留心歷算,其先後入宮教授者,西洋人有南懷仁,張誠,Thomas,白晉,巴多明,杜德美等,故聖祖亦深明算數,有律歷淵源(1723刻)之作.而代數學,及割圜術中解析術,幷於此時輸入焉.明末西人之入華者,向受限制,厥後此禁雖時申時弛,而歷算之借重也如故.及康熙乙酉(1705)羅馬教王遣使來華,宣教師自起內訌,其勢始衰.繼起之戴進賢尚修有歷象攷成後編十卷(1742成書),而後此則無聞人.雖乾隆己丑(1769)尚有服官欽天監者,亦碌碌無所建樹矣.

2. 年表

明萬曆九年辛巳(1581)「萬曆九年,利瑪竇(Ricci, Matteo, 意大利人, 1552—1610) 始汎海九萬里, 抵廣州之香山澳.」〔見明史卷三二六,「外國七」.〕

「利瑪竇入中國, 係萬曆九年.」〔見不得巳辯.〕(註 1)

「萬曆九年, 利瑪竇始汎海九萬里, 抵廣州之香山澳, 漸入南京, 倡行天主教.」〔見清印光任, 張汝霖; 澳門記略, 卷下, 第一五頁.〕(註 2)

「利瑪竇生於馬塞拉台 (Macerata) 時在 March of Amona, 1552 年. 以 1571 年進耶穌會 (Jusuit society), 其後至印度, 1578 年至臥亞, 轉至澳門, 1610 年西五月十一日卒.」〔見 Biog. universalle 內 Remusat 條.〕

利瑪竇來華之年, 明史, 不得巳辯, 澳門記略, 幷稱萬曆九年 (1581) 來華. 而 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 304 (1923) 據 Pietro Tacchi Venturi, S. J., L'Apostolato del p. Matteo Ricci, 2d ed , Rome, 1910. 則

(註 1) 此書題利類思 (Buglio, Louis, 意大利人,—— 1684) 著, 同會安文思 (Magalhaes Gabriel. de 葡萄牙人, —— 1677), 南懷仁 (Verbiest, Ferdinand, 比利時人, 1623—1688) 訂.

(註 2) 光緒庚辰 (1880), 江寧藩署重刻本.

謂利瑪竇以萬曆六年戊寅(1578)至廣東.又次條謂「西一千五百八十二年來華」.又增訂徐文定集卷首下第九頁「利子碑記」謂「萬曆庚辰(1580)航海九萬里觀光中國」幷屬誤記.

按利瑪竇於萬曆二十八年十二月二十四日(1601)上疏明廷謂(由1578至1581)航海而來時歷三年(由1581至1596);淹留肇慶,韶州二府十五年(由1596至1601),越(庾)嶺由江西至南京又淹留五年.〔見增訂徐文定公集卷首下行,實第七頁,上海慈母堂宣統元年(1909)印.〕由上利瑪竇上疏之文逆推,蓋當以萬曆九年(1581)來華爲可信.

萬曆十年壬午(1582)「西1582年,卽明萬曆十年天主教皇各里各里第十三欲傳教中華,乃派駐印度神父意大里人改轍來華;一名羅其里,一名利瑪竇,習學華語華文.初至粵無與居者,久謀不獲,轉之廈,亦多艱苦,設法久耐,居華之路始開.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編第五年,冬季册,西歷1890年,冬季出版.〕

「利瑪竇由澳門轉入八閩,至金陵,出其渾天儀,量天尺,句股舉重算法,留都臺省.」〔見澳門記略卷

下,第四五頁.〕

萬曆二十二年甲午(1594) 明朱仲福撰折衷歷法十三卷.〔見四庫全書總目卷一〇七.〕

萬曆二十三年己未(1595) 明朱載堉進聖壽萬年歷八卷,附律歷融通四卷.疏稱:「授時,大統二歷,攷古則氣差三日,推今則特差九刻,……」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆二十五年丁酉(1597) 是年楊光先生.按楊光先字長公,歙縣人,康熙三年(1664)上請誅邪教狀,時年六十八歲,著不得已上下卷.〔見不得已,李儼藏傳鈔本.〕

是年徐光啓至南京遇利瑪竇〔見增訂徐文定公集卷首下行實第三頁.〕

萬曆二十八年庚子(1600) 「庚子(利瑪)竇因貢獻,僑邸燕臺.」〔見利瑪竇幾何原本序.〕

萬曆二十八年十二月二十四日利瑪竇上奏疏.〔見增訂徐文定公集卷首下行實第八頁.〕

萬曆二十九年辛丑(1601) 「利瑪竇……二十九年入京師,中官馬堂以其方物進獻,自稱大西洋人.」〔見明史卷三二六,「外國七」.〕

「(利)西泰同龐子迪我號順陽者…迺越黃河,抵臨清,督稅宮官馬堂持其貢表恭獻闕廷.」〔見增訂徐文定公集卷首下行實第十頁.〕

「利瑪竇…至二十九年入京師,獻方物,自稱大西洋人,…而帝嘉其遠來,假館授粲,給賜優厚,利瑪竇安之,遂留居不去.」〔見澳門記略下卷第一六頁.〕

萬曆三十年壬寅(1602)「接踵而至者…福州府,艾儒略(Aleri, Jules, 意大利人,——1649),壬寅.」〔見不得已辯.〕

明史艾儒略作艾如略.〔見明史卷三二六.〕

是年利瑪竇成世界坤輿全圖六幅,有李之藻,祁光宗等跋語.(註3)

萬曆三十一年癸卯(1603)「癸卯秋徐光啓至南京由羅如望爲行洗禮,加名保祿.」〔見增訂徐文定公集卷首下行實第六頁.〕

「癸卯冬則吳下徐太史(光啓)先生來,先生既自精心長於文筆,與旅人輩交遊頗久,私計得對譯(幾何原本)成書,不難於時以計偕至,及春薦南宮選爲

(註3) 見史地學報第二卷第五期內「史地界消息」,第八頁.

廣常,然方讀中秘書,時得晤言,多咨論天主大道,以修身昭事爲急,未遑此土苴之業也.」〔見利瑪竇:幾何原本序.」

萬曆三十四年丙午(1606) 是年秋利瑪竇與徐光啓共譯幾何原本前六卷,明年春獲卒業.〔見利瑪竇:幾何原本序.〕

萬曆三十五年丁未(1607) 是年春利瑪竇與徐光啓共譯成幾何原本前六卷,并在京出板,板留京師.〔見利瑪竇:幾何原本序,并徐光啓題幾何原本再校本.〕

萬曆三十六年戊申(1608) 徐光啓題幾何原本,再校本稱:「戊申春利先生以校正本見寄,令南方有好事者重刻之,累年來竟無有,校本留置家塾.」

利瑪竇在幾何原本譯成之前後.嘗自著乾坤體義二卷,下卷言數:「以邊線,面積,平圜,橢圜互相容較.」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕其授於李之藻,徐光啓者;圜容較義題利瑪竇授,李之藻演.測量法義題利瑪竇口譯,徐光啓筆受.又同文算指前篇二卷,通編八卷,題利瑪竇授李之藻演.

明邢雲路撰戊申立春攷證一卷.〔見四庫全書

總目卷一〇七.〕按雲路,萬曆庚辰(1580)進士,曾撰古今律歷攷七十二卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕魏文魁實助成之.

萬曆三十八年庚戌(1610)是年徐光啓北上,利瑪竇已沒.〔見徐光啓題幾何原本再校本.〕

利瑪竇於是年四月卒於京,葬西郭外.其年十一月朔日食,歷官推算多謬,朝議將修改.〔見明史卷三二六「外國七」.〕

「三十八年四月卒於京,賜葬西郭外,今阜城門外有利泰西墓云.」〔見澳門記略卷下第一六頁.〕

「(利瑪竇)賜葬燕中,仍詔聽其同學二三君子依止焚脩.」〔見簡平儀;徐光啓序.〕

是年三月十八日利瑪竇卒.〔見增訂徐文定公集卷首下行實第九頁.〕

利瑪竇以1552年西曆十月六日生於馬塞拉台(Macerata),1610年西曆五月八日(或十一日)卒於北京.〔見 Bosmans, H., Revue des Quest. Scient., January, 1921.〕

「查利瑪竇優卹原疏係萬曆三十八年四月二十三日本(禮)部署部事左侍郎吳道南,主客司郎中林茂槐等題給葬地.奉旨是隨經署府事府丞黃吉士

査給阜城門外二里溝,籍沒私刱佛寺三十八間,地基二十畝,付竇塋葬.」〔見西洋新法歷書「奏疏」第三〇七,三〇八頁.(註4) 及增訂徐文定公集卷首下行實第十頁.〕

「(利瑪竇)徒龐迪我 (Pantoja, Diego de, 西班牙人, ?–1618)等咨送入京,不果用,而利瑪竇卒.」〔見澳門記略卷下,第四五頁.〕

明史稱龐迪我,依西把尼亞人.〔見明史卷三二六.〕

萬曆三十九年辛亥(1611) 是年都中方爭論歷法,徐光啓與龐迪我,熊三拔 (Ursis, Sabtthinus de, 意大利人,?—1620)重閱利瑪竇校正本幾何原本.〔見徐光啓題幾何原本再校本.〕

是年周子愚言大西洋歸化人龐迪我,熊三拔等深明歷法,其所携書有中國載籍所未及者,當令譯上,以資採擇.」〔見明史卷三二六.〕

明史稱;熊三拔,意大里亞國人.〔見明史卷三二六.〕

(註4) 北京大學圖書部藏明刻清修本.下同.

萬曆四十年壬子(1612) 萬曆四十年監正周子愚建議參用西法修歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一六頁.〕

萬曆四十年十一月朔日食,欽天監推算得未正一刻初虧,而兵部員外部范守己候得申初一刻,則是先天四刻,禮部於十二月議請改歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一一及一二頁.〕

是年王英明撰歷體略三卷.「英明字子晦,開州人,萬曆丙午(1606)舉人,是編成於萬曆壬午,……其上中二卷,所講中法,亦皆與西法相脗合,蓋是時徐光啓新法算書尙未出,而利瑪竇先至中國,業有傳其說者,故英明陰用之耳.……」〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十一年癸丑(1613) 是年李之藻序同文算指又序圜容較義.

是年熊三拔箸簡平儀.

萬曆四十一年正月十五日月食不合,禮部又覆請改歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第一〇頁.〕

是年李之藻奏上西洋天文學說十四事,又請亟開館局,繙譯西法.〔見明史紀事本末第七三卷.〕

萬曆四十二年甲寅(1614) 是年徐光啓序同文算指.

是年熊三拔撰表度說一卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十三年乙卯(1615) 是年西洋人陽瑪諾(Diaz, Emmanuel jeune, 葡萄牙人,?…… 1659) 撰天問略一卷.〔見四庫全書總目卷一〇六.〕

萬曆四十四年丙辰(1616) 徐如珂與晏文輝合疏請逐天主教徒,至十二月令王豐肅 (Vagnoni, Alfonso, 意大利人 ?—1640), 龐迪我等俱赴廣東,令下未行,所司亦不爲督發.〔見明史卷三二六,及明紀第四卷.〕

萬曆四十六年戊午(1618) 是年龐迪我上表乞寬假,不報,怏怏而去,而南都之行教如故.〔見明史卷三二六.〕

崇禎元年戊辰(1628) 是年王錫闡生.〔見陸心源:三續疑年錄,第八卷補遺.〕

崇禎二年己巳(1629) 崇禎二年五月初一日日食,禮部於四月二十九日揭三家豫算日食.三家者:大統歷,回回歷,新法也.至期驗之,光啓推算爲合.〔見

西洋新法歷書「開題」第三頁,「揭貼」第四及五頁.〕

「崇禎二年五月乙酉朔日食,禮部侍郎徐光啓依西法推分數,與大統,回回所推互異,已而光啓法驗,餘皆疎.禮部侍郎翁正春因請倣洪武初設回回科之例,令(龐)迪我等同測驗,從之.開局於首善書院,以光啓督之.光啓因舉李之藻,西洋人龍華民(Longobardi, Nicolas, 意大利人, 1565–1654),鄧玉函(Terenz, Jean, 日耳曼人, ?--1630).」〔見澳門記略卷下,第四六頁.〕

崇禎二年七月十一日禮部題疏稱四十等年原疏推舉五人,爲:史臣徐光啓,臬臣邢雲路,部臣范守己崔儒秀,李之藻.今徐光啓在禮部,李之藻以南京太僕寺少卿丁憂服滿在籍.同月十四日如議修改歷法,以徐光啓督修一切,幷起用李之藻.〔見西洋新法歷書「題疏」第一四及一九頁.〕

是年七月二十一日禮部請頒「督修歷法關防」許之.〔見西洋新法歷書「題疏」第二〇及二一頁.〕

是年七月二十六日徐光啓上書陳修歷急要事宜四款,分三十三條,計歷法修正十條,修歷用人三條內舉龍華民,鄧玉函,急用儀象十條,度數旁通十條.〔見西洋新法歷書「奏疏」,第二八…三七頁.〕

「崇禎二年七月徐光啓薦鄧玉函同修歷法，鄧玉函者，德國之干司但司人也.…由澳門入華，因精醫，人皆敬之，既入局，翻譯諸術表草稿八卷.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」，格致彙編第五年，冬季册，西歷一八九〇年，冬季出版.〕

明史稱鄧玉函，熱而瑪尼亞國人.〔見明史卷三二六.〕

崇禎二年九月勑諭徐光啓修歷法.〔見西洋新法歷書「勑諭」，第二頁.〕

湯若望(Schall Von Bell, Johann-Adam, 日耳曼人，1591-1666)，自言崇禎二年己巳入北京.〔見王先謙：東華錄「順治二」及西洋新法歷書「新法表異」卷上，第三二頁.〕惟據後條，則以崇禎三年入京爲可信也.「湯若望者日耳曼之哥倫人也.精歷法，通格致.明崇禎二年入中國習華文.時禮部奏請開局修改歷法，徵若望供事數年，勤勞局事.著交食諸書數種，經徐光啓，李天經前後進呈，名聞於朝.」〔見「利瑪竇湯若望二君傳略」，格致彙編第五年，冬季册.西歷一八九〇年，冬季出版.〕

崇禎三年庚午(1630) 是年三月十一日徐光啓

上言論四川得資縣生員冷守中論曆之誤.〔見西洋新法歷書,「學歷小辯」第二五…二七頁.〕

崇禎三年四月初二日鄧玉函卒.五月十六日徐光啓薦湯若望.羅雅谷(Rho, Giacomo,意大利人, 1593–1638)入京修歷.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四五頁.〕

「(鄧)玉函卒又徵西洋人湯若望,羅雅谷譯書演算.」〔見明史卷三一,「志第七」,及澳門記略卷下,第四六頁.〕

是年七月初二羅雅谷由河南開封府來京,同月初六日入局.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四七及三一七頁.〕

是年仲秋羅雅谷自識所著比例規解,謂昔在上海,曾爲徐宗伯造其尺,而未暇譯書.〔見西洋新法歷書,「比例規解」.〕

是年秋李之藻卒.〔見西洋新法歷書「題疏」,第五七頁.〕

是年十二月湯若望以徐光啓薦由陝西西安府來京,同月初二日入局.〔見西洋新法歷書「題疏」,第四七及三一七頁.〕

崇禎四年辛未(1631) 崇禎四年春正月二十八

日徐光啓第一次進曆書一套共六卷,內曆書總目一卷,日躔曆指一卷,測天約說二卷,大測二卷.曆表一套共一十八卷,內:日躔表二卷,割圓八線表六卷,黃道升度表七卷,黃赤道距度表一卷,通率表一卷.前後共二十四卷.(註5)〔見西洋新法曆書「題疏」第五八及五九頁.〕

「先是明季壬戌(1622)年開局改曆法,閱十年而湯若望自陝西西安府天主堂行教,以崇禎四年辛未(1631)欽取進京.」〔見不得已辯.〕與前記庚午入京之說互異.

崇禎四年辛未仲春,陸安鄭洪猷序幾何要法四卷,書題泰西艾儒略口述,海虞瞿式穀筆受,古閩葉益蕃參校,吳淞陳于階,陸安鄭洪猷,山陰陳應登同校梓.

是年保定府滿城縣玉山布衣魏文魁遣子象乾上曆元,六月初一日又咨禮部陳前事,幷上曆測,曆元二書,辯論曆法.〔見西洋新法曆書,「學曆小辯」.〕

是年八月初一日徐光啟第二次進測量全義十

(註5) 明史卷三一,及明史稿第九册幷作二十四卷,明史紀事本末作二十二卷誤.

卷,恆星歷指三卷,恆星歷表四卷,恆星總圖一摺,恆星圖像一卷,揆日解訂訛一卷,比例規解一卷,共二十卷并一摺.(註 6)〔見西洋新法歷書,「題疏」第六一及六二頁.〕

是年八月二十八日冷守中勘四月十五日月食不合.〔見西洋新法歷書,「學歷小辯」第二八……三〇頁.〕

是年十一月二十二日李篤培卒.篤培字汝植,招遠人,箸中西數學圖說十二册多介紹西說.

崇禎五年壬申(1632) 是年四月初四日徐光啟第三次進月離歷指四卷,月離歷表六卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食歷指四卷,交食歷表二卷,(已上係湯若望譯譔),南北高弧表一十二卷,諸方半晝分表一卷,諸方晨昏分表一卷,(已上係羅雅谷,湯若望指授,監局官生推算),共為三十卷.(註 7)〔見西洋新法歷書,「題疏」第八〇及八一頁.〕

(註 6) 明史卷三一及續文獻通攷第二〇〇卷并稱二十一卷,蓋一摺亦稱卷也.

(註 7) 關於梅文鼎事蹟,參看李儼:「梅文鼎年譜」,見清華學報第二卷第二期,民國一四年一二月,北京清華學校出版.

是年十月十一日徐光啟疏薦山東巡撫朱大典,陝西按察使李天經,原任監察御史金聲,原任大理寺評事王應遴,通曆法.〔見西洋新法曆書,「題疏」第九八及九九頁.〕

崇禎六年癸酉(1633) 是年二月初七日梅文鼎生.

是年徐光啟卒,年七十二.〔見錢大昕:疑年錄,第三卷.〕

「六年十月光啟卒,以山東參政李天經代之.」〔見澳門記略卷下第四六頁.〕

「徐光啟生嘉靖壬戌三月二十一日,卒崇禎癸酉十月初七日.」〔見增訂徐文定公集卷首上年譜第六頁.〕

「所纂曆書將百卷.」〔見明史紀事本末第七三卷.〕

崇禎七年甲戌(1634) 是年七月十九日李天經第四次進五緯總論一卷,日躔增一卷,五星圖一卷,日躔表一卷,火木土二百恆年表幷周歲時刻表共三卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食曆指三卷,交食諸表用法二卷,交食表四卷,(已上係湯若望譯譔),黃平象限表共七卷,木土加減表二卷,交食簡法表二卷,方根

表二卷,(已上係羅雅谷,湯若望指授,監局官生推算),恆星屏障一架(係湯若望製),共二十九卷一架.(註8)〔見西洋新法歷書,「奏疏」第一二六頁.〕

是年十二月李天經第五次進五緯曆指共八卷,五緯用法一卷,日躔攷共二卷,夜中測時一卷,(已上係羅雅谷譯譔),交食蒙求一卷,古今交食攷一卷,恆星出沒表共二卷,(已上係湯若望譯譔),高弧表五卷,五緯諸表共九卷,甲戌乙亥日躔細行二卷,(已上係羅雅谷湯若望指授,監局官生推算),共三十二卷,(註9)前後五次所進共一百三十七卷,(內有一摺一架亦稱卷,故云),崇禎曆書至是告成.〔見西洋新法歷書,「題疏」第一五七,一五八頁.〕

是時幷將所修曆書付梓,今明刻本題有「明工部虞衡淸吏司郎中楊惟一梓」是也.

是年魏文魁上言曆官所推交食節氣皆非是,於是命魏文魁入京測驗,立西洋爲西局,文魁爲東局,

(註8) 明史卷三一,明史稿第九册,澳門記略卷下,幷作二十九卷,明史紀事本末第三七卷作二十七卷誤.

(註9) 明史卷三一,作三十二卷,明史稿第九册,作三十卷誤.

合大統回回凡四家.〔見明史卷三一.〕

崇禎八年乙亥(1635) 八年李天經又上曆法條議二十六則,是時西法書器俱完.〔見明史卷三一.〕

是年四年李天經進乙亥丙子七政行度四册,又參訂曆法條議二十六則.〔見西洋新法歷書,「題疏」第一七四……一八五頁.〕

崇禎九年丙子(1636)「九年正月十五日辛酉曉望月食,天經及大統,回回,東局,各預推虧,圓,食,甚,分秒時刻.…… 其日天經與羅雅谷,湯若望,大理評事王應遴,禮臣李焻,及監局守登文魁等赴臺測驗,惟天經所推獨合.」〔見明史卷三一,澳門記略卷下第四七頁.〕

是年四月二十八日李天經進渾儀書四卷一套,運重圖說一册,渾天儀一具并盞,星球一具并盞,牙晷二具各有盞,運重一具.〔見西洋新法歷書,「題疏」第二四四頁.〕

渾天儀說四卷,題湯若望譔,龍華民,羅雅谷訂,前有李天經序文.

崇禎十年丁丑(1637)「十年正月辛丑朔日食,各局預推如前食時,亦惟天經爲密.」〔見澳門記略卷下

第四七頁.〕

是年十二月進崇禎戊寅年七政經緯新曆各一冊.〔見西洋新法歷書,「題疏」第二九三頁.〕

崇禎十一年戊寅(1638)「是年正月詔仍行大統曆,旁求參考西法,與回回科并存.」〔見明史卷三一,澳門記略,卷下第四七頁.〕

是年三月十三日羅雅谷卒.(註10)〔見西洋新法歷書,「題疏」第三〇四頁.〕

是年八月進李天經光祿寺卿,仍管曆務.〔見明史卷三一.〕

是年十一月監局官生:楊之華,黃宏憲,朱國壽,祝懋元,王應遴,張寀臣,朱光大,朱光燦,周士昌,朱廷樞,王觀曉,各進敍有差.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三二二…三二六頁〕

是年十二月進崇禎己卯年七政經緯新曆一套.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三三〇頁.〕

崇禎十二年己卯(1639)是年十一月李天經進黃赤全儀用法一冊.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三四

(註10)「利瑪竇湯若望二君傳略」,格致彙編(一八九〇)稱:「崇禎九年三月(羅雅谷)卒,歷法全歸(湯)若望推步」者誤.

四頁.〕

是年十二月李天經進庚辰年七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書,「奏疏」第三四七頁.〕

崇禎十三年庚辰(1640) 是年十二月李天經進辛巳七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書「奏疏」第三五七…三五九頁.〕

是年禁西洋人入廣東省.(註 11)

崇禎十四年辛巳(1641) 是年十二月李天經進壬午七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書「奏疏」第三九五…三九七頁.〕

是年李天經上言大統置閏之誤.〔見明史卷三一.〕

崇禎十五年壬午(1642) 是年十二月李天經進癸未七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書「奏疏」第三九九頁.〕

明崇禎十六年癸未(1643)「十六年三月乙丑朔日食,測又獨驗.八月詔西法果密,卽改大統曆法,通行天下,未幾國變.〔見明史卷三一及澳門記略卷下,第四六頁.〕

(註 11) 參看順治四年條.

是年十月以禮部奏疏，加給湯若望酒飯卓面半張，并優䘏王應遴，其欽天監秋官正劉有慶，中官正賈良琦，曆局供事；光祿寺署正黃宏憲，上林苑監丞陳亮采，經曆朱光大，博士朱光樞，王觀曉，周士昌，朱光顯，宋發各以原官加一級.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四〇八…四一一頁.〕

清順治元年甲申(1644) 是年正月明思宗賜湯若望「旌忠」，「崇義」扁額各一方.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四一二頁.〕

是年正月李天經進甲申七政經緯新曆各一册.〔見西洋新法歷書，「奏疏」第四一四頁.〕是年三月明社亡.

是年六月(註 12)「修正曆法西洋人湯若望啓言臣於明崇禎二年(?)來京，曾用西洋新法釐正舊歷，製有測量明晷定時考驗諸器，盡進內廷，用以推測，屢屢密合，近聞諸器盡遭賊毀，臣擬另擬進呈，……」〔見東華錄，「順治三」，及「利瑪竇湯若望二君傳略」，格致彙編.(1809)〕

(註 12) 格致彙編作「順治二年六月」誤，茲據東華錄正.

是年七月清廷決自明歲順治二年爲始，卽用新歷頒行天下.〔見東華錄,「順治三」.〕

同月「湯若望製就渾天星球一座，地平日晷窺遠鏡各一具，幷輿地屏圖.」〔見東華錄,「順治三」.〕

是年(註13)「八月丙辰朔,日有食之,令大學士馮銓,同湯若望……測驗……惟西洋新法,一一吻合,大統回回兩法,俱差時刻云.」〔見東華錄,「順治三」.〕

湯若望著新法表異亦稱「本(元)年八月一日驗日食時刻分秒方位無差，奉有新法盡善盡美之旨，遂用新法造時憲歷頒行天下.」〔見西洋新法歷書.〕

是年「十月初頒時憲書.」〔見東華錄,「順治三」.〕

是年(註14)「十一月將欽天監印信著湯若望掌管.所屬該監官員，嗣後一切進歷占候選擇等項，悉聽掌印官舉行.」〔見東華錄,「順治三」.〕

「順治元年甲申十二月初四日戊午，修政歷法遠臣湯若望奏；臣於十一月十五日奏爲恭報月食一疏，奉有欽天監印信著湯若望掌管之旨.臣切念

(註13) 格致彙編(1890)作「順治二年」者誤.

(註14) 但燾譯日人稻葉君山:清朝全史(漢譯本)第一六五頁作「順治二年」者誤.中華書局,民國三年十二月初版.

歷象授時厥任匪輕,臣何人斯,敢叨斯任乎?伏乞皇上別選賢能管理,庶於大典有光.奉聖旨湯若望著遵旨任事不准辭,該(禮)部知道.」〔見禮曹章奏日錄第一頁.(註15)〕「……初七日修政歷法遠臣湯若望奏:臣奉有欽天監印信著湯若望掌管之旨,隨具疏控辭,奉聖旨湯若望著遵旨任事不准辭,禮部知道欽此.遵臣卽當竭蹶料理印務.然臣終有不安於心者,合無請給臣督理欽天監關防壹顆,或復古太史院敕諭一道,暫爲料理,而該監印信,繳部收貯.庶治歷之責,學道之志,可以幷行而不悖矣.奉聖旨湯若望著遵旨率屬精修歷法,整頓監視,所屬有怠玩侵紊的,卽行參奏,敕印不必另給.該(禮)部知道.」〔見禮曹章奏日錄第二及三頁.〕

同月二十一日修政歷法遠臣湯若望奏民歷七政二歷,從來一時幷行,惟今歲適當開國之初,價造不及,以致民歷先頒,七政留後.又因外解歷日錢糧不到,今欲布散,紙張缺乏,合無請旨出示,凡民間用歷者,悉聽該監印刷,每一郡縣,許印百餘本,俟至次年仍聽各省歷日錢糧解部之日給付,本監照例同民

(註15) 見史料叢刻初編,甲子歲東方學會印行,

歷一齊頒布,永爲定規.奉聖旨七政歷著速頒行,禮部知道.」〔見禮曹章奏日錄第八及九頁.〕

同月二十六日修政歷法遠臣湯若望題順治二年乙酉歲所有御覽上吉七政諸種新歷,例應隨本捧進滿洲七政經緯歷一部,七政經緯歷一部,上吉日十三幅,月五星凌犯歷一部,壬遁歷一部.奉旨這歷日留覽,禮部知道.」〔見禮曹章奏日錄第一一頁.〕

「同月二十六日修政歷法遠臣湯若望等題順治二年正月初七日立春.例該差官二員;春官正潘國祥,漏刻博士趙應麒前往順天府,公同該府候驗節氣,謹具題知.奉聖旨知道了,禮部知道.」〔見禮曹章奏日錄第一一頁.〕

「順治元年命用西洋歷法,澳中精於推算者,時時檄取入監.」〔見澳門記略卷下,第一六……一七頁.〕

順治二年乙酉(1645) 是年十一月欽天監監正湯若望,以修補新歷全書告成,恭呈御覽.〔見東華錄「順治五」.〕

「順治元年以西洋新法推算精密,詔用之,二年書成.」〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕.四庫全書著錄作一百卷是也.新法歷書內有籌算一卷,題羅雅谷撰,

湯若望訂.籌算指一卷.題湯若望撰.此所謂籌算,即訥白爾 (Napier, 1550–1617) 之訥白爾籌 (Napier's Rod),非宋元之籌算也.

新法歷書之成,監局官生與其事者五六十人,計有吳淞.陳于階,燕閔.朱光大,錢塘.黃宏憲,山陰.陳應登,海虞.瞿式穀,陸安.鄭洪猷,古閩.葉益蕃,慈水.周子愚,武林.卓爾康,孫嗣烈,衞斗樞,朱廷樞,掌乘,張寀臣,董思定,焦應旭,祝懋元,周士萃,周士泰,周士昌,陳士蘭,殷鎧,劉有慶,左允和,魏邦綸,鄔明著,賈良琦,潘國祥,楊士華,陳士諫,程廷瑞,李遇春,戈繼文,孫有本,劉蘊德,掌有篆,武之彥,宋可立,戈承科,朱國壽,李華,賈良棟,楊之華,李次虨,王應遴,孟履吉,周胤,鮑英齊,陸昌鑲,徐瑛,朱光燦,李祖白,宋可成,宋發,朱光顯,劉有泰等是也.

順治四年丁亥(1647) 兩廣總督佟養甲奏佛朗西人寓居濠鏡澳……應仍照明.崇禎十三年禁其入省之例,止令商人載貨下澳貿易從之.〔見東華錄「順治九」.〕

順治六年己丑(1649) 艾儒略卒.

順治九年壬辰(1652) 是年七月欽天監監正湯

若望進渾天星球地平日晷等儀器,賜朝衣,涼朝帽韡襪.〔見東華錄,「順治一〇」.〕

順治十年癸巳(1653)是年三月「賜太常寺卿,管欽天監事湯若望,號通微教師,加俸一倍.」〔見東華錄,「順治二〇」.〕

是年薛鳳祚譯穆尼閣(西名未詳)之比例對數表,是爲對數輸入中國之始.梅文鼎稱:「比例數表者西算之別傳也,……前此無知者,本朝順治間西士穆尼閣以授薛儀甫始有譯本.」是也.〔見比例對數表,及梅文鼎:勿菴歷算書目.〕

順治十一年甲午(1654)是年龍華民卒.

順治十四年丁酉(1657)是年四月,七月革職欽天監回回科秋官正吳明烜疏言湯若望所推天象之謬,幷上是年回回歷,推算天象之書.請立回回科,以存絕學.同年十二月經實測,明烜所指皆妄.禮部議其罪,援赦獲免.〔見東華錄,「順治二八」,「順治二九」,及清文獻通攷第二五六卷.〕

順治十六年己亥(1659)是年江南徽州府新安衞官生楊光先(1597—?)作「闢邪論上」,反對天主教.是年五月又作「摘謬十論」幷見,不得已上卷.

是年湯若望疏薦同會友蘇納.白乃心通歷法.〔見西洋新法歷書「奏疏」,清補頁.〕

順治十七年庚子(1660) 順治十七年十二月初三日,楊光先呈禮部正國禮,未准〔見不得已上卷〕

康熙三年甲辰(1664) 是年薛鳳祚自序天學會通中「舊中法選要」.〔見陸耀:切問齋文鈔,第二四卷,第一五…一六頁〕(註 16)

一是年三月二十五日欽人楊光先上書許青嶼侍郎反對天主教.七月二十六日楊光先上請誅邪教狀於禮部.八月初六日會審湯若望等一日.八月初七日,放楊光先寧家.〔見不得已上卷.〕利類思不得已辯(1665)自序稱:「甲辰冬,楊光先著不得已等書,余時方羈絏待罪」.

「康照三年後用舊法,已因舊法不密,用回回法.」〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕

康熙四年乙巳(1665) 是年三月因楊光先叩閽進摘謬論具言湯若望新法十謬,又選擇議一篇,摘湯若望選擇之誤.部擬將湯若望,杜如預,楊宏量,李

(註 16) 乾隆四〇年(1775)自序刻本.

祖白,宋可成,宋發,朱光顯,劉有泰,凌遲處死;劉必遠,賈文郁,宋哲,李實,潘盡孝(湯若望義子)斬立決.得旨湯,杜,楊,免死.四月李祖白,宋可成,宋發,朱光顯,劉有泰處斬,其餘議流徙,又赦免.〔見東華錄,「康熙五」.〕

「是年三月大赦,利類思等得離西曹法署.」〔見不得已辯自敘.〕

是年四月楊光先授爲欽天監右監辭職,不准.五月到監供事,同月再辭.六月三辭,同月又辭.始終不准.七月又將張其淳降級爲左監,楊光先補爲監正.李光顯爲右監.八月又有五叩閽辭疏.九月十三日吏部議得已經奉旨楊光先着爲監正,其辭職緣由,相應不准,十四日奉旨,楊光先因知天文衙門一切事務,授爲監正,着卽受職辦事,不得瀆辭.〔見不得已下卷.〕

是年利類思自序不得已辯.此書題極西士利類思著,仝會安文思,南懷仁訂

康熙五年丙午(1666)是年二月欽天監正楊光先奏請採宜陽金門山竹管,上黨羊頭山秬黍,河內葭莩,備制器測候,從之.〔見東華錄,「康熙五」.〕

是年湯若望客死京師.〔見清朝全史引.〕順治十七年,及康熙十七年卒去之說皆失之.

湯若望死後,喪儀甚盛.〔見 A. H. Savage-Landor: China and the Allies, vol. II., p. 196, London, 1901.〕

康熙七年戊申(1668) 是年「二月乙酉詔訪求精通天文占候者.」〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年八月禮部奏監副吳明烜之七政歷,與天象相近,得旨著吳將康熙八年歷日,七政歷日推算進覽.〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年十月由江南取到元郭守敬儀器.〔見東華錄,「康熙八」.〕

是年十二月治理歷法南懷仁劾監副吳明烜推算歷日種種差誤.〔見東華錄,「康熙八」.〕

「七年命大臣傳集西洋人與監官質辯,測驗正午日影.」〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕時楊光先尙任監正.〔見東華錄,「康熙八」.〕

康熙八年己酉(1669) 是年二月命大臣二十員赴觀象臺測驗,南懷仁所言逐款皆符,吳明烜所言逐款皆錯.監正馬祜,監副宜哈喇,胡振鉞,李光顯,亦言楊光先所指摘西法之不當.得旨楊光先革職.〔見

東華錄,「康熙九」.〕

八年遣大臣赴觀象臺測驗.遂令西洋人治歷.初書面載「欽天監依西洋新法」字,及是去之.〔見澳門記略卷下,第四九頁.〕蓋是時復行西洋新法也.〔見清文獻通攷第二五六卷.〕

是年「三月授西洋人南懷仁爲欽天監監副.」〔見東華錄,「康熙九」.〕

是年六月「令改造觀象臺儀器,從欽天監監副南懷仁請也.」〔見東華錄,「康熙九」,及清通志,第二三卷.〕

六月部擬吳明烜流徙,得旨免流徙.〔見東華錄,「康熙九」.〕

是年八月欽天監正馬祐遷爲江蘇巡撫.康親王,傑書等議覆南懷仁,李光宏等告楊光先援引吳明烜誣告湯若望,致李祖白等正法呈狀;擬斬楊光先,妻子流徙寧古塔,復湯若望通微教師之名,賜卹,還給建堂基地,許續曾等復職,西洋人栗安黨等由督撫驛送來京,卹李祖白等,流徙子弟取回,有職者復職.李光宏,黃昌,司爾珪,潘盡孝(湯若望義子)復職.得旨以楊(光先)年老并妻子免流徙,栗安黨等二

十五人不必來京，天主教則除南懷仁自行外，其餘各省禁立堂入教，餘依議.〔見東華錄,「康熙九」及康熙九九」.〕不久楊光先卒.〔見不得已,錢琦跋.〕

是年八月「追賜原任掌欽天監事,通政使湯若望祭葬」.〔見東華錄,「康熙九」.〕

以李祖白,宋可成,宋發,朱光顯,劉有泰死非其罪,各照原品級給祭銀.〔見東華錄,「康熙九」.〕

是年胡亶撰中星譜一卷,胡在長安,與監中西洋專家反覆辨論,羣皆嘆服.〔見四庫全書總目,卷一〇六.〕

康熙十一年壬子(1672) 是年八月南懷仁,楊燝南互相參告,楊燝南又造眞歷言一書,大學士圖海等以楊不諳飛灰候氣之法,無從測驗.楊交刑部治罪.〔見東華錄,「康熙一二」.〕

是年冬梅文鼎成方程論六卷.〔見李儼:梅文鼎年譜,第六一七頁.〕

康熙十三年甲寅(1674)「十三年新儀成,凡六:曰黃道經緯儀,曰赤道經緯儀,曰地平經儀,曰地平緯儀,曰紀限儀,曰天體儀.」〔見澳門記略卷下,第四九及五〇頁.〕

是年「二月丁酉欽天監奏欽造儀象告成,進呈靈臺儀象誌.上留覽,加南懷仁太常寺卿銜,仍治理歷法」.〔見東華錄,「康熙一四」.〕

康熙十五年丙辰(1676) 是年五月欽天監治理歷法南懷仁上書論濛氣.〔見東華錄,「康熙一七」.〕

是年李子金成算法通義五卷(1676).其後續成幾何易簡集(1679),天弧象限表(1683).

「李子金原名之鉉,以字行,鹿邑人,柘邑增廣生.……尤精算數.……有隱山鄙事十二種.」〔見蔣炳歸德府志,第二五卷,第一四……一五頁.(註 17)〕

康熙十七年戊午(1678) 是年八月禮部議,欽天監治理歷法南懷仁進康熙永年歷,係接推湯若望所推歷法,應交翰林院,仍著該監官生肄習,永遠遵行,從之.〔見東華錄,「康熙二二」.〕

是年梅文鼎自序所著籌算二卷.〔見梅文鼎年譜,第六二〇頁.〕

康熙二十年辛酉(1681) 是年二月增欽天監滿監副一.〔見東華錄,「康熙二七」.〕

(註 17) 乾隆甲戌(1754)官修刻本.

是年杜知耕成數學鑰六卷(1681).其後續成幾何論約七卷(1700).「杜知耕字端甫,康熙丁卯(1687)舉人.……好讀書,尤精數學,著有數學鑰六卷李子金序而傳之」.〔見何熠柘城縣志第一〇卷,第一〇……一一頁.(註18)〕

康熙二十一年壬戌(1682) 是年王錫闡卒.

康熙二十三年甲子(1684) 是年梅文鼎自序弧三角舉要五卷.

梅文鼎稱:「三角之用,莫妙於弧度.求弧度之法,亦莫良於三角.故測量全義第七,第八,第九卷耑明此理,而舉例不全,且多錯謬.其散見諸曆指者,僅存用數,無從得其端倪.天學會通圈線三角法,作圖草率,往往不與法相應,缺誤處竟若殘碑斷碣,弧三角遂成秘密藏矣……」.〔見勿菴歷算書目,第四八頁.〕梅氏蓋整理當日輸入之西算,陸續著成各書,以便初學.

康熙二十四年乙丑(1685) 是年法皇魯意第十四(Louis XIV)送白晉(Bouvet, Joachim, 1656-1730),張

(註18) 乾隆三八年(1773)官修刻本.

誠 (Gerbillon, Jean Frangois, 1654—1707) 及 Le Comte, de Visdelou, de Fontaney (漢名未詳) 等五人來華.〔見北京政聞報, 第一二五〇頁, (1926). (註 19) 〕魯意第十四又贈清聖祖以地平緯儀. (註 20)

是年西八月七號, 比人 Thomas (漢名未詳, Thomas, Antoine, 1644—1706) 來京, 以南懷仁等之提携, 入宮授帝以實用算術, 幾何, 及儀器用法.〔見北京政聞報, 第一〇一七—一〇一八頁, (1926). (註 21) 〕

康熙二十七年戊辰(1688) 南懷仁卒. 繼南懷仁者有張誠. 張誠曾襄尼布楚條約之成. 約成回京, 與教士白晉逐日入宮, 將幾何原本, 應用幾何, 并西方哲學, 譯成滿文, 用以授帝.〔見北京政聞報, 第四八一—四八二頁. (註 22) 〕

(註 19) Coriolis: Esquises jaunes—3—Le 12 Février 1704 à Pékin, La politique de Pékin, No. 48—28, Nov. 1926. Pékin.

(註 20) 見科學第三卷第十期(民國六年十月)插圖. 圖原本見 Mrs Archibald Little: The Land of Blue Gowr. 第七頁, 1902. 年出版.

(註 21) Coriolis: B—42—Un Belge à la cour de Kang-hi, au 18e siecle, La politique de Pékin, No. 40—3, Oct. 1926. Pékin.

(註 22) Coriolis: B—27—Gerbillon (1644—1707), La politique de Pékin, No. 20—16 Mai, 1926. Pékin.

今清宮尚藏有滿文譯本幾何原本.

康熙二十八年己巳(1689) 是年二月聖祖幸觀星臺,與李光地談天文.〔見東華錄,「康熙四三」.〕

康熙三十一年壬申(1692) 是年正月聖祖御乾清門與羣臣論算數.〔見東華錄,「康熙四九」.〕

康熙三十二年癸酉(1693) 梅文鼎自序筆算五卷.

康熙三十四年乙亥(1695) 是年黃宗羲卒.

康熙三十七年戊寅(1698) 是年聖祖使白晉與法皇魯意第十四通使,并贈書四十九册.歸途與巴多明(Parrein, 1665–1741)同來.巴善科學,在京不久亦通華語.并用幾何,天文學,解剖學在宮教授.〔見北京政聞報,第六一五頁,及六四一頁(1926)(註23)〕

康熙三十九年庚辰(1700) 是年西一月張誠請於宮中賜與餘地用建天主堂許之.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註24)〕

(註23) Coriolis: B—31—Testament de l'Empereur Kanghi (1653–1722), La Politique de Pékin, No. 25–20 juin, 1926. Pékin. 又 Coriolis: B—32—Dominique Parrenin (1665–1741), La Politique de Pékin, No. 26–27 juin, 1926. Pékin.

(註24) Coriolis: B—27—Gerbillon (1644–1707).

梅文鼎自序環中黍尺五卷.

康熙四十二年癸未(1703) 是年張誠請建之天主堂落成.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註25)〕

康熙四十三年甲申(1704) 是年常額爲欽天監滿監正,常以算日食不合請罪.〔見東華錄,「康熙七二」.〕

是年杜德美(Pierre, Jartoux,法國人,1668-1720)在北京.〔見北京政聞報,第一二四九等頁(1926).(註26)〕割圜術中之杜術,即出於杜德美.〔見梅穀成赤水遺珍.〕

康熙四十四年乙酉(1705) 是年羅馬教王克列門(Clement XI)遣使鐸羅(Tournon, 1668-1710)來通使,幷商天主教儀,以西十二月三十一日入宮覲見.〔見清朝全史第三八章上四,及北京政聞報,第八四八……八四九頁,及八七三……八七五頁(1926).(註27)〕

(註25) 同24.

(註26) Coriolis: Esquises jaunes—3—Le 12 Fevrier 1704 à Pékin.

(註27) Coriolis: B—37—Mémorial sur la Légation à Pékin du patriarche de Tournon (1702-1706). La Politique de Pékin, No. 34-22 Aôut et No. 35-29 Aôut, 1926. Pékin.

康熙四十五年丙戌(1706) 鐸羅到京後宣教師便起內訌,繼則鐸羅被逐,以康熙四十九年(1710)卒於澳門.〔見前書.〕

康熙四十六年丁亥(1707) 是年西三月二十二日張誠卒.〔見北京政聞報,第四八二頁(1926).(註28)〕

康熙五十年辛卯(1711) 是年聖祖與直隸巡撫趙宏燮論算數謂:「算法之理,皆出於易經.即西洋算法亦善.原係中國算法,彼稱爲阿爾朱巴爾.阿爾朱巴爾者,傳自東方之謂也」.〔見東華錄,「康熙八九」.〕是爲代數學輸入中國之始.按阿爾朱巴爾,數理精蘊(1723刻)內西洋借根法作阿爾熱巴拉,梅㲄成:赤水遺珍作阿爾熱八達.㲄成以康熙五十一年供奉內廷後,蒙聖祖授以借根方法,因作「天元一卽借根方解」,載於赤水遺珍內.〔見數理精蘊,赤水遺珍,梅文鼎年譜.〕

康熙五十二年癸巳(1713) 是年聖祖始編律呂算法等書.〔見東華續錄,「乾隆一四」.〕

是年聖祖命和碩莊親王(允祿)等,率同儒臣於

(註28) Corioils: B—27—Gerbillon (1644–1707).

暢春園蒙養齋,開局測太陽高度.得黃赤大距爲二十三度二十九分三十秒.〔見歷象攷成後編,卷一,第五頁.(註29)〕

康熙五十三年甲午(1714) 是年始擬以律呂歷法,算法三書共爲一部,名曰律歷淵源.〔見東華錄,「康熙九四」,東華續錄,「乾隆一四」.〕

是年十一月分遣修理歷法何國棟等於廣東,雲南,四川,陝西,河南,江西,浙江,測量北極高度及日晷.〔見東華錄,「康熙九四」.〕

康熙五十五年丙申(1716) 是年明圖爲欽天監滿監正.〔見東華錄,「康熙九七」.〕

康熙五十六年丁酉(1717) 重申天主教禁令.〔見東華錄,「康熙九九」.〕

康熙五十七年戊戌(1718) 是年仲秋年希堯自序測算刀圭三卷於石城官舍.計分三卷;一曰,三角法摘要,一曰,八線算數表,一曰,八線假數表.〔見測算刀圭.〕

康熙五十九年庚子(1720) 是年羅馬教王克列

(註29) 光緒丙申,勵志書屋重刻本.

門復遣使馬薩巴巴 (Mazzabarba) 來.〔見北京政聞報,第五〇八頁 (1926).(註 30)〕

是年杜德美卒.

康熙六十年辛丑(1721) 是年梅文鼎卒.〔見梅文鼎年譜.〕

康熙六十一年壬寅(1722) 是年六月數理精蘊,曆象攷成皆告成.〔見東華續錄,「乾隆一四」.〕

雍正元年癸卯(1723) 是年柏卿魏荔彤刻兼濟堂纂刻梅勿菴先生歷算全書.

是年冬十月律曆淵源一百卷刻成.分三部:一曰歷象考成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊.〔見東華錄,「雍正三.」〕主其事者爲何國宗,梅瑴成,而明安圖,顧陳垿(1678–1747)亦在攷測之列.歷象攷成上編卷二,卷三「論弧三角形」,數理精蘊下編卷十五割圓篇以內容外切多邊形證測量全義所謂周徑相與之率,「今士之法,其差甚微,子母之數,積至二十一位」.

(註 30) Coriolis: B—27—Ambassades et Ambassadeurs auprès des Fils du Ciel 2637—av. J. C.—1820 ap. J. C., La Politique de Pékin, No. 21–23 Mai, 1926 Pékin.

雍正二年甲辰(1724)　是年以浙江制府滿公上言,諭禁(天主教).〔見梁章鉅:梁氏筆記.〕

雍正三年乙巳(1725)　是年命內閣學士何國宗將「算法館」行走明白測量人員,帶去測量河道.〔見東華錄,「雍正七」.〕

是年羅馬教王伯納地哆(Benoît XIII)來通使.〔見東華錄,「雍正七」.〕

是年羅馬教王伯納地哆遣兩教士(Carmes, Gothard 及 Ildephonse (漢名未詳)來修好.是年終并遣使賫來地球儀等,以爲覲儀,世宗作書報之.〔見北京政聞報,第五〇八頁(1926).(註31)〕

雍正六年戊申(1728)　是年添設欽天監西洋人監副一人.〔見東華錄,「雍正一三」.〕

雍正八年庚戌(1730)　是年欽天監監正;滿人爲明圖,西洋人爲戴進賢(Kogler, Ignace 日耳曼人,生卒年未詳),監副爲西洋人徐懋德(原名未詳).

是年六月明圖上書請重修歷法.因修得日躔

(註31)　Coriolis: B—27—Ambassades et Ambassadeurs auprès des Fils du Ciel 2637 av. J. C.—1820 ap. J. C.

月離表以補律歷淵源之缺. 是表原係戴進賢所作, 因無解說并推算之法, 當時惟徐懋德, 明安圖能用此表. 〔見歷象考成後編, 「奏議」第一, 二, 五, 六頁.〕

雍正十三年乙卯(1735) 是年五月年希堯自序面體比例便覽, 此書係將數理精蘊中有通率之數, 每錄一二條, 以便初學.

乾隆元年丙辰(1736) 順天府丞梅瑴成請許民間翻刻律曆淵源許之. 〔見歷象考成後編, 「奏議」第三頁.〕

乾隆二年丁巳(1737) 是年四月顧琮請修日躔月離表解圖說. 〔見歷象考成後編, 「奏議」第五……六頁.〕

是年敕編歷象考成後編十卷. 〔見四庫全書總目, 卷一〇六.〕

乾隆三年戊午(1738) 是年以允祿總理增補日年交食表圖說, 顏爲歷象考成後編. 〔見歷象考成後編, 「奏議」第七……一〇頁.〕

乾隆七年壬戌(1742) 是年歷象考成後編十卷告成. 任彙編者爲顧琮, 張照, 何國宗, 梅瑴成及欽天

監滿監正進愛,西洋監正戴進賢,西洋監副徐懋德,并食員外郞俸,欽天監五官正明安圖.〔見歷象攷成後編,「奏議」第一〇……一三頁,并「職名」第一頁.〕曆象攷成後編卷一,曾說明橢圓定理爲以前曆書所未道.

乾隆九年甲子(1744)　是年戴震自序所著策算.

是年勅撰儀象攷成三十二卷.〔見四庫全書總目.卷一〇六.〕

乾隆十七年壬申(1752)　是年儀象攷成三十二卷告成.〔見四庫全書總目,卷一〇六.〕

乾隆十八年癸酉(1753)　是年裁欽天監滿漢監副各一人,増西洋監副一.〔見清通志第二九卷.〕

乾隆十九年甲戌(1754)　是年戴進賢又創製「璣衡撫辰儀」,自撰璣衡撫辰記二卷,冠於儀象攷成之首.〔見清通志,第二三卷,及常福元:天文儀器志略,第三二……三三頁.(註32)〕

同時西洋人官欽天監者有傅作霖(原名未詳).〔見清文獻通攷,第二九八卷.〕

(註32)　京華書局本.

乾隆三十四年己丑(1769) 許宗彥父名祖京,乾隆己丑 (1769) 由內閣歷任廣東布政使.宗彥隨宦在粵.許宗彥.鑑止齋集卷十四,「記荷邏侯星條」稱;「曩在粵東,西士彌納和〔今在欽天監,改姓南,不知其名.〕……」.蓋是時西士當有服務欽天監者.〔見鑑止齋集,「家傳」及第一四卷.〕

對數之發明及其東來

目　次

(一) 對數之發明.

1. 訥白爾傳略.

2. 訥白爾對數之計算.

3. 訥白爾對數表及其版本.

4. 巴理知傳略.

5. 自然對數.

6. 柏格對數及其他.

(二) 對數之東來上.

7. 對數輸入中國之經過.

8. 比例對數表, 比例數解.

9. 數理精蘊, 算法大成.

10. 對數簡法, 續對數簡法, 假數測圓.

11. 方圓闡幽, 弧矢啓祕, 對數探原.

12. 圜錐曲線, 級數回求.

13. 數學啓蒙.

14. 乘方捷術.

15. 算牖續編,造各表簡法.

16. 代數學,萬象一原.

17. 代數術,對數詳解.

18. 微積溯源,對數表,對數述.

19. 三角數理,對數表引說,用對數表訣,造對數法.

20. 代數學補式,算式解法,有不爲齋算學,對數旁通,對數較表,對數捷法,對數淺釋,對數四問.

(三) 對數之東來下.

21. 對數輸入日本之經過.

22. 不朽算法,眞假數表及對數表起源.

23. 對數表起源,作對數表法,加減代乘除表.

24. 對數表製法,對數表精解.

25. 算法對數表,乘除對數表,對數表.

(一) 對數之發明[1]

1. 訥白爾傳略

(1) 參看 Cajori, F.: A History of Elementary Mathematics, N. Y. 1917, pp. 153—167. 及 D'ocagne, M.: Some Remarks on Logarithms Apropos to Their Tercentenary, from the Smithsonian Report for 1914, Washington, 1915, pp. 175—181. Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. 1923, pp. 389—392, Vol. II. 1925, pp. 202—203, pp. 513—523.

對數之作,遠在十七世紀,前乎此者阿基米得(Archimedes, 287?—212 B. C.),斯提斐爾(Stifel, 1486或1487—1567)雖具此概念,而終未有成.若十五世紀末葉德人製有精密三角表,雖亦有功於世,然而計算需時,終多不便.至對數表出,方稱便焉.拉普拉斯(Laplace, 1749—1827)曾言;對數之發明,不啻因減省天文家之工作,而倍蓰其壽命.觀此則對數在科學界之貢獻,誠非淺庸者所可比擬矣.

對數爲蘇格蘭之麥執斯呑(Merchiston)男爵約翰.訥白爾(John Napier)[2]所發明.氏以1550年生於愛丁堡附近之麥執斯呑,1617年四月四日卒.,壽七十七歲.1563年氏年十三,肄業聖安德魯(St. Andrew)之聖薩爾瓦托爾(St. Salvator)學校.其叔曾語其父曰,此兒當送往法國或法蘭德斯(Flanders),因在家園實無所學.訥白爾遂就學於外.1571年回麥執斯呑,是歲結婚.1608年其父卒後襲其遺業焉.氏好算數,曾四十年從事此道,最致力於算數簡易之則,略習球面三角術者,當知訥氏比例式(Napier's analogies)及球面

(2) 拉丁文作 Neperius, 法文作 Neper. 此外亦作 Naperus 或 Naper.

三角形訥氏記法(Napier's rule of circular part)極便記憶. 1617年曾出版剌布多羅基亞(Rabdologia)一書,述訥白爾籌(Napier's rods or bones)[3]及其他乘除簡算之器具. 此書流傳歐洲大陸,視所發明之對數爲尤廣,雖遲至1721年哈頓(E. Hatton)所著算術書,尙以訥白爾籌說明乘除開方算法,故其輸入中土,亦視對數爲早.

訥氏對數實係歷久艱辛思索之所得,因近代於$n=b^x$時,可稱x爲n之對數,而其底爲b,但在訥氏之時,指數記法尙未發明,卽斯提斐爾及斯提梵(Stevin, 1548−1620)之指數概念亦未完成,而赫黎奧替(Harriot, 1560−1621)在訥氏卒去之後,於其所著作代數書中尙未言及指數,直至歐拉(Euler, 1707−1783)方始察出對數及指數之關係,訥氏對數乃能先指數而發明,實爲科學界之珍聞,彼循何道而發現,是固

(3) 參看 M. Terquem: Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathematiques, "Neper" 條, Paris, 1855, pp. 109—110. 或第九版大英百科全書, "Napier, John" 條. 剌布多羅基亞之各版本及其譯本如原本: Rabdologiæ, Sev. Numerationis Per Virgulas Libri Dvo, Edinburgh, 1617; Leyden, 1626. 譯本, Verona, 1623; Berlin, 1623.

讀者所樂聞也.

2. 訥白爾對數之計算[4]

訥白爾卒於1617年,其子羅伯(Robert)於1619年再版父書,并附其對數計算之說明.其法令AB直線上有兩點L及N,并由A點向B進行.起始進行速度相同,假令爲$\frac{AB}{n}$,而n爲任意之數.就中L點每次以$\frac{AB}{n}$之速度在AB進行,而N點每次之速度逐漸減少,因其速度并以"由某點至B,再以n除之距離"爲律,N點愈進行,其速度愈減,如在t時間,N點至P處,則其速度爲$\frac{PB}{n}$.由是逐漸減少,至通過B點時,其速度爲負數.其在t時間N點至P處,L點至Q處,則訥氏稱LQ爲NP之對數.

訥氏之最初目的,原爲簡便三角函數計算起見,故其對數乃照正弦數目,并不照1, 2, 3, 4,……等數逐一計算.其正弦九十度令爲10^7,以後逐漸縮小,今以代數號記之,如;

(4) 參看 M. Terquem : Bull. de biblio. d'histoire et de biog. math. 內 "Notice sur la découverte des logarithmes", Paris, 1855. pp. 40.

$d=AB=$ 正弦九十度.

$x=$ 在 T 時間, L 點進行之路程, 其量如等差級數.

$y=$ 在 T 時間, N 點進行之路程, 其量如等比級數.

$md=1=L, N$ 二點起始進行之速度.

$d-y=N$ 點於 T 時在 B 終點之距離.

T 時可分爲 n 數極多之短時間, 每次爲 t, 則在每時間 $0, t, 2t, 3t, \cdots\cdots, nt$ 之終點, x 進行之距離爲 $0, md, 2md, 3md, \cdots\cdots, nmd$. 而每次 $d-y$ 之值爲

$d, d(1-m), d(1-m)^2, d(1-m)^3, \cdots\cdots, d(1-m)^n$.

於 T 時, $x=nmd$, $y=d-d(1-m)^n=d-d\left(1-\frac{x}{nd}\right)^n$,

$$y=d-d\left[1-\frac{x}{d}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{n^2d^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{n^3d^3}+\cdots\right]$$

如 n 爲無窮大, 則

$$y=d-d\left[1-\frac{x}{d}+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{d^2}-\frac{1}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{d^3}+\cdots\cdots\right]$$

$=d-de^{-\frac{x}{d}}$, 而 e 爲自然對數之底.

則 $\frac{d-y}{d}=e^{-\frac{x}{d}}$, $\quad -\frac{x}{d}=\text{nat. log}\frac{d-y}{d}$.

$x = -d \text{ nat. log} \frac{d-y}{d}$.

但 x 為 $d-y$ 之訥白爾對數,故

$\text{nap. log}(d-y) = -d \text{ nat. log} \frac{d-y}{d} = d \text{ nat. log} \frac{d}{d-y}$.

訥白爾以 $d=10^7$, 如 $d-y=z$, 則

$\text{nap. log}\, z = 10^7 . \text{ nat. log} \frac{10^7}{z}$ 矣.

訥白爾以 $d=10^7=\sin 90°$, 即 $\frac{d}{2}=5.\ 10^6=\sin 30°$. 在訥表中,

$$\log \sin 30° = 6931471,\ 808942;$$

因 $\frac{d-y}{d}=\frac{1}{2}$, 則 $\text{nat. log} \frac{1}{2} = -0,6931471805599$. 欲得訥對之值,當以 -10^7 乘之,卽得 6931471,805599 故訥表之差,僅在小數十位下單位之三分一.

訥白爾實際計算對數,幷不用級數,而直接計算 d, $d(1-m)$, $d(1-m)^2$, $d(1-m)^3$, …… $d(1-m)^{100}$ 之值,而以 $d=10^7$, $m=10^{-7}$, 其計算方法,頗爲簡便.卽令第一項 $d=10^7$, 次以 $d=10^7$ 除第一項而減之爲二項;又以 $d=10^7$ 除第二項而減之爲第三項,逐次如是,其次序如下表:

$$
\begin{array}{ll}
d & 10000000.0000000 \\
 & \underline{\qquad\qquad 1.0000000} \\
d(1-m)\cdots\cdots & 9999999.0000000 \\
 & \underline{\qquad\qquad 0.9999999} \\
d(1-m)^2\cdots\cdots & 9999998.0000001 \\
 & \underline{\qquad\qquad 0.9999998} \\
d(1-m)^3\cdots\cdots & 9999997.0000003 \\
 & \underline{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
d(1-m)^{100}\cdots & 9999900.0004960
\end{array}
$$

而 $$d(1-m)^{100}=10^7(1-10^{-7})^{100};$$

如按二項式定理展開之,算至 10^{-21}, 則

$$d(1-m)^{100}=9999900.000499838300392122.$$

此與訥白爾所得者,相差極微.

爲計算精密起見,訥白爾曾以幾何證得 $\log(d-y)$ 係在 y 與 $\frac{dy}{d-y}$ 兩限之間. 故每次欲求 $\log(d-y)$ 之真值,先求 y 與 $\frac{dy}{d-y}$, 次取其值之中數可矣. 茲所解析法說明之.

$$\text{nap. log } d-y=-d \text{ nat. log}\left(1-\frac{y}{d}\right)$$

$$=y+\frac{1}{2d}\cdot y^2+\frac{1}{3d^2}\cdot y^3+\frac{1}{4d^3}\cdot y^4+\cdots;\cdots(1)$$

$$\frac{dy}{d-y}=\frac{y}{1-\frac{y}{d}}=y+\frac{y^2}{d}+\frac{y^3}{d^2}+\frac{y^4}{d^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d-y}+y\right)=y+\frac{y^2}{2d}+\frac{y^3}{2d^2}+\frac{y^4}{2d^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots;\cdots(2)$$

以 (1), (2) 比較,所差在第三項以後,其值為

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{d^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^3}{d^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{y^3}{d^2}.$$

故欲使在小數十四位以下,即在 10^{-14} 時僅差一單位,則必令 $y=\sqrt[3]{6}$, 且 y 當在 1 與 2 之間. 茲以 $y=1$, 即 $d-y=9999999$, $\frac{dy}{d-y}=\frac{10^7}{10^7-1}=1.000000100000001;$

而 y 與 $\frac{dy}{d-y}$ 之中數為 $1.00000005\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)_1.$

此約為 $10^7-1=9999999$ 之訥白爾對數,

實際 $\text{nap. log }(10^7-1)=-10^7 \text{ nat. log } 1-10^{-7}$,

$$=1+\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}+\frac{1}{3}\cdot 10^{-14}+\frac{1}{4}\cdot 10^{-21}+$$

$$=1.0000000500003333;\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)_1.$$

比較 $(1)_1$ 及 $(2)_1$ 式,知其僅在小數十四位下差單位之三分一也.

故 $10^{-7}(1-10^{-7})=9999999$ 之訥對爲 1,00000005 亦卽 $y=1$ 及 $\frac{dy}{d-y}=\frac{10^{-7}}{10^{-7}-1}$ 之平均數,又 $\log 10^7(1-10^{-7})^{100}=$ $\log 9999900=100.00050$. 換言之,凡數在 9999999 與 9999900 中間,眞數之等比率爲 $(1-10^{-7})$,而對數之等差率爲 1.00000005 是爲第一表.又因 9999900 之數,訥白爾用以計第二表,其等比率爲 $\frac{9999900}{10^7}=\frac{99999}{10^5}=\frac{10^5-1}{10^5}=1-\frac{1}{100000}$;如前例,以 $d=10^7$,逐次以 $\frac{1}{10^5}$ 乘前數,減餘約及五十次得 9995001,224804 由是 9995000 之對數值,可如前例由 y 及 $\frac{dy}{d-y}$ 之平均數而得 5001.25041645. 換言之,凡數在 9999900 與 999500 中間,眞數之等比率爲 $(1-10^{-5})$,而對數之等差率爲 100.00050.

又因 9995000 之數,訥白爾用以計第三表,其等比率爲 $\frac{9995000}{10^7}=\frac{9995}{10^4}=1-\frac{1}{2000}$;如前例,以 $d=10^7$,逐次以 $\frac{1}{2000}$ 乘前數,減餘約及二十次得 9900000,而其對數值爲 100503,3585228.

又因 9900000 之數,訥白爾用以計第四表,是爲根表 (table radicale),其等比率爲 $\frac{99}{100}=1-\frac{1}{100}$;如前例,以 $d=10^7$ 爲第一項,求至第六十九項得 4998609,4034 約爲 10^7 之半數,而其對數爲 6934253,4 約與正弦 30 度之對數相等.如求 30 度以下之正弦對數,訥白爾因 $\log(d-y_1)-\log(d-y_2)$ 在 $\frac{y_2-y_1}{d-y_2}d$. 及 $\frac{y_2-y_1}{d-y_1}d$ 中間之理而孜得之.以上所述僅及大意,其詳見 Journal des savants (1835, p. 354) 中俾奥 (M. Biot) 之論文.

3. 訥白爾對數表及其版本

訥白爾以1614年六月在愛丁堡發表所著對數表 (Mirifici logarithmorum canonis descriptio), 其中五十六頁爲說明,九十頁爲表,篇末誌稱:"此表之製作,必需多數人之工力,今以獨力製定,則錯誤在所不免."然此表除極少數外,實際尙無多誤.[5]第一版之訥白爾對數表今藏法國通儒院藏書樓 (La bibliothèque de L'Institut),以 1834 年由佛蘭生 (J. F. Français) 處購入.原書爲阿波給斯 (Arbogast) 舊藏, 1810 年卒時遺

(5) 見 Napier's Construction (Macdonald's Ed.), pp. 87, 90–96.

贈與佛蘭生兄弟者.[6]至1619年訥子伯羅重印父書,并附說明,其計算方法,始爲世所通曉.此外又有1616,1889 (Edinburgh); 1620 (Leyden); 1616,1618 (London)之各種版本.

訥白爾表於1895年以拉丁文覆印於巴黎,於1889年由馬克多那爾(W. R. Macdonald)以英文覆印於愛丁堡.訥白爾著書輸入法國,實始於翁里奧(Henrion).渠於1620年覆印訥書於里昂(Lyon).至自然對數表則由英人溫蓋(Wingate)輸入法國.近三百年各國印行對數表之數,且在五百以上.[7]其小數位較少者,當推1770年伽地納(Gardiner)在亞威農(Avignon)所印之小數七位之對數表.但卷帙頗大,不便取攜.至1785年卡勒(Callet)製成小本,由當時名手第多(Ambroise Didot)印行,其子Firmin Didot發明鉛版,改良印刷,衆始稱便焉.

茲列1614年之訥白爾對數表樣張如下:

---

(6) 見M. Terquem: "Notice sur la découverte des logarithmes", p. 40.

(7) 參觀法文數學叢書(Gauthier-Villars, 1909). 及Knott, C. G., The Napier Tercentenary Memorial Volume, Messrs. Longmans, Green, & Co., London, 1915.

Gr. 0　0			+	−		
	sinus	logarithmi	differentiae	logarithmi	sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55

表內首頁下右邊書"89"以誌八十九度.其在"sinus"行內樣張內曾舉正弦0度0分至5分,或正弦89度55分至60分之值.在"logarithmi"行內誌上述正弦之對數,在"differentiae"行內,爲此行內之對數較.因 $\sin x=\cos(90°-x)$,則此表實際已具餘弦及其對數之值.如 $\log\cos 0°\,5'=11$,則 $\log\cos 89°\,55'=65331315$.且因 $\log\tan x=-\log\cot x=\log\sin x-\log\cos x$.則"differentiae"行內如爲+即係正切之對數,如爲−即係餘切之對數.

4. 巴理知傳略

訥白爾對數不久卽馳譽英國及歐洲大陸．恩利格．巴理知(Henry Briggs, 1556－1630)[8]者先為倫敦格勒善學校(Gresham College)教授,次為牛津大學教授,素仰訥氏對數之發明,不久巴理知卽離倫敦而參見所崇拜之訥白爾．二人心儀已久,時巴以事遲,訥方對其友語巴未必卽臨,巴適叩閽請謁．相見之頃,彼此注視移時,無復一言．最後巴理知致其欽仰之詞.[9]又告訥白爾擬以零為全正弦之對數,而以10^7為5° 44′ 22″正弦之對數．訥白爾亦以此修正為然,并如巴氏意以0為1之對數,10^7為全正弦之對數,又以指標為正．自此巴氏乃着意以10為底成新表．1617年訥白爾逝世,卒藉巴氏之力,竟其未完之業．巴理知以1624年成巴理知對數表(arithmetica logarithmica),眞數由一至二萬,又由九萬至十萬,對數之小數算

(8) The Dict. of National Biography 謂生於1561年. Fink 數學史謂1560年2月生於Yorkshire之Halifax附近之Warley Wood. Smith 數學史謂據教區紀錄,應作1560/61.

(9) 見 Mark Napier's Memoir of John Napier, 1834, p. 409.

至十四位.[10] 1628年荷蘭國高達(Gouda)地方之佛拉哥(Adriaen Vlacq. 約生於1600年,卒于1655年後)覆刻巴理知對數表,計由一至十萬,就中二萬至九萬之對數,爲佛拉哥所補.

5. 自然對數

訥氏對數與以 $e=2.718\cdots\cdots$ 爲底之自然對數(natural logarithms)絕不相同.普通代數教科書謂;自然對數爲訥氏所發明.實屬大誤,讀者幸注意之.[11]在1618年來特(Edward Wright)譯本之訥白爾對數表不記名之附卷中始首言自然對數.附卷中又言補插法(interpolation)疑爲吳德(William Oughtred, 1574–1660)手筆.所述補插法以七十二個正弦之對數,求其餘之對數.又在表中以 $\log 10=2.302584$, 但在近世則書 $\log_e 10=2,302584$.

自然對數之制,以新對數表(new logarithms)所

(10) W. W. R. Ball: A Short Account of the History of Mathematics, 1901, pp. 202—203.

(11) 十九世紀末葉德人首正其誤,見 Dr. S. Günther: Vermischte Untersuchungen, Chap. V.

述爲始. 是書於 1619 年由倫敦數學教授斯坡得爾 (John Speidell) 印於倫敦. 然實際斯坡得爾對數尚非自然對數. 如訥白爾謂 sin 30′=87265, 而半徑 $=10^7$, 故實際 sin 30′=0.0087265, 而此數之自然對數爲 5,25861 加 10 得 5.25861. 斯坡得爾則稱 log sin 30′=525861. 以公式表之, 應作

$$\text{sp. log}\, x = 10^5 \left(10 + \log_e \frac{x}{10^5}\right).$$ [12]

1622 年之新對數表爲由一至千之自然對數表, 但表不記小數點. 其前在 1618 年又有一小表僅有七十二對數. 斯坡得爾爲最初公表自然對數表之人. 其更精善者; 要數烏弗蘭 (Wolfram) 之自然對數表. 其數由一至萬, 而小數算至四十位, 於 1778 年公世, 渠係荷蘭礮隊副隊長, 計算此表, 費時六年云. 最完善之自然對數表當推德人達士 (Zacharias Dase) 於 1850 年在維也納所印者. 至 1819 年有名黑 (Ree) 者, 所編百科全書於"雙曲線對數"條亦有一表云.

---

(12) 其詳參觀 Quarterly Journal of Pure and Appl. Math. Vol. 46, 1915, pp. 174—178. 第九版大英百科全書 "Tables" 條. Report of the British Association for the Advancement of Science for 1873. "Table" 條, pp. 1—175

至於多位小數之對數,則烏弗蘭之外,沙普(Sharp)算至61位,亞當斯(Adams)算至260位.然此二人所算者,僅2, 3, 5, 7, 10各數之自然對數,及對數根而已.(13)

6. 柏格對數及其他

此外尙有一軼事,卽與訥白爾同時有瑞士人柏格(Justus Byrgius, Jobst Bürgi, 1552－1632)於訥白爾對數表出版後六年,亦出版一粗糙之對數表.柏格少年時爲鐘錶匠,其後至加塞爾(Kassel)天文臺,又在布拉格(Prague)與刻卜勒(Kepler, 1571－1630)共事,其言對數似早於訥白爾,惟其公世爲期稍遲.(14)

對數之計算,在訥白爾,巴理知,刻卜勒,佛拉哥幷因等比級數,等差級數對列之義求之.但在對數表大致編輯完成之後,芬遜特(Gregory St. Vincent, 1584－1667),牛頓(Newton, 1642－1727),麥揆武(Nicolaus Mercator, 1620?－1687)諸人,又發現對數可以無限級數表之.麥揆武實發明log(1+x)之級數.芬遜特於1647

(13) 六十位之對數根,見華,傅譯代數術第十八卷.

(14) 參觀 Gerhardt: Gesch. d. Math. in Deutschland, 1877, p. 75, 119.

年算割圜術時稱雙曲線與漸近線中間之積,卽為雙曲線對數積.麥掞忒於1668年稱對數級數之值,可由雙曲線間各積之總和而得.(15)

二 對數之東來上

7. 對數輸入中國之經過

對數首先由西士穆尼閣輸入中國,稍次則有數理精蘊之作,惟穆尼閣謂解此別有專書,而數理精蘊亦不言其理.直至同光間李善蘭華衡芳始由西士譯出代數學,代數術諸書,由是近世對於對數之說明,始為世所通曉.前乎此則戴煦(1805—1860),李善蘭(1809—1882),鄒伯奇(1819—1869),顧觀光(1799—1862),徐有壬(1800—1860)并有詳細之論述,在代數學代數術譯書之前,事尤可珍.其中文論列對數之書可得下列各種:

(1) 比例對數表十二卷,穆尼閣著,薛鳳祚纂(1653).

(2) 比例數解四卷,清梅文鼎撰.

(15) 其詳參觀第九版大英百科全書"logarithms"條.

(3) 數理精蘊(1723).面體比例便覽,清年希堯撰(1735).

(4) 算法大成上篇,清陳杰撰(1844).

(5) 對數簡法二卷(1845),續對數簡法一卷(1846),假數測圓二卷(1852),清戴煦撰.

(6) 方圓闡幽.弧矢啟祕,對數探源,清李善蘭撰(1846?).

(7) 圓錐曲線三卷,李善蘭譯,級數回求,李善蘭撰.

(8) 數學啟蒙二卷,英國偉烈亞力(A. Wylie)撰(1853).

(9) 乘方捷術三卷,清鄒伯奇撰.

(10) 算賸續編清顧觀光撰(1854).

(11) 造各表簡法,清徐有壬撰.

(12) 代數學十三卷,英國棣麼甘(Aug. De Morgan)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆受(1859).

(13) 萬象一原夏鸞翔撰(1862).

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅(J. Fryer)口譯,金匱華蘅芳筆述(1873).

(15) 對數詳解五卷,清丁取忠,曾紀鴻同撰(1874).

(16) 微積溯源八卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1874).

(17) 對數表四卷,四册,清賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.英國路密司(Loomis)撰,赫士譯,高密朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,清陳其晉撰(1877).

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1877).

(21) 對數表引說一卷,用對數表訣一卷,造對數表法一卷,清朱湘澄,未刊.

(22) 代數術補式二十二卷,解崇輝撰(1899).

(23) 算式解法十四卷,美國好敦司開奈利同撰,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述(1899).

(24) 有不爲齊算學二種四卷,傅九淵撰.

(25) 對數旁通一卷,蔣士棟撰(1897?).

(26) 對數較表一卷,廖家授(1860–1890)撰.

(27) 對數捷法一卷,陸采撰,見杭州藝文志.

(28) 對數淺釋一卷,江衡撰,溉齊算草之一.

(29) 對數四問劉彝程撰,經世文續編本.

8. 比例對數表,比例數解

(1) 比例對數表. 薛鳳祚比例對數表(1653)序稱"……穆(尼閣)先生出,而改爲對數,今有對數表,以省乘除,而況開方立方三四方等法,皆比原法工力,十省六七,且無舛錯之患,此實爲穆先生改曆立法第一功.予執筆以受,時以重譯,於戊辰(1628)曆元後二十五稔,(1653),歲在壽屋,曆春既夏而秋,方盛暑則烈陽薰灼,揮汗浹背,勞誠勞矣,功於何有!"

穆尼閣解釋對數之大意,謂:"愚今授以新法,變乘除爲加減,……,解此別有專書,今特略明其理,如下二表,二同餘算,不論從一,二,三,四起,或從五,七,九,十一起,但同餘之內,中三相連度數,可取第四."

比例算	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
同餘算 (a)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
同餘算 (b)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

如"同餘算(a)"內之6, 7, 8, 9有$9=(7+8)-6$之關係,

又"同餘算(b)"內之5, 7, 9, 11有$11=(7+9)-5$之

關係.

而對"同餘算"內之"比例算"四率成比例,有 32:64=128:256 又有 1:2=4:8 之關係.故按上表"比例算"內 $4:32=128:x$ 或 $x=\frac{32\times128}{4}$,此式本應乘除,今僅用加減,因對 32 爲 6,對 128 爲 8,對 4 爲 3,則對 x 爲 $(6+8)-3=11$,檢表知 11 之對爲 1024,即 $x=1024$ 也.比例數表十二卷,題南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.表中原數,比例數幷列比例數有小數六位.書稱"原數當用十萬,其表久成,遡西來不戒,失之於途,今止一萬,……原數一萬之外,取比例法."

如求 $\log 160232=?$

$\log 1602 \quad =3.204662,$

$\log 160200=5.204662,$

$\log 1603 \quad =3.204933$

$\log 1603-\log 1602=0,000271$

$\frac{32}{100}\times0.000271=0.000086$

$\log 160200=5.204662$

$\therefore\ \log 160232=5.204748$

(2) 比例數解.清梅文鼎(1633—1721)勿菴曆算書目(1702 自序)[16] 稱"一比例數解四卷.

比例數表者,西算之別傳也.其法自一至萬,幷設有他數相當,謂之對數.假令有所求數[或乘或除],[17]

(16) 見知不足齋叢書本,第三九……四一頁.

(17) 本篇凡引用本文作"……",引用本文中小註作[……].

但於本表間兩對數相加減,即得相求.[乘者兩對數相加得總,除者兩對數相減即較.總較各以入表,取其所對本數,即各所求之乘得數,除得數.]……

前此無知者,本朝順治間西士穆尼閣以授薛(鳳祚)儀甫始有譯本.……又有四線比例數亦穆所授也.八線割圓,西曆舊法,今只用正弦,餘弦,正切,餘切,故曰四線.……

穆先生曰;表有十萬,西來不戒於途,僅存一萬,萬以上,以法通之.[……嘗見薛刻別本,數有二萬].

儀甫又有四線新比例,用四線同,惟度析百分,[從古率也]穆有天步眞原,薛有天學會通,并依此立算,不知此,則二書不可得以讀,故稍爲詮次,爲初編之第四書."

9. 數理精蘊,算法大成

(3) 數理精蘊. 清康熙癸巳(1713)始編律呂算法等書.[18]康熙甲午(1714)始擬以律呂曆法算法三書共爲一部,名曰律曆淵源.[19]康熙壬寅(1722)六月數

(18) 見東華續錄"乾隆"一四.

(19) 見東華錄"康熙"九四.

理精蘊,曆象攷成皆當成.[20] 雍正癸卯(1723)冬十月律曆淵源一百卷刻成,分三部,一曰曆象攷成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊,雍正帝製序.[21] 數理精蘊下編卷三十八,末部八,有"對數比例,"其目爲:對數比例,明對數之原之一……三,明對數之綱之一……二,明對數之目,用中比例求假數法之一……二,又用遞次自乘求假數法之一……二,又用遞次開方求假數法之一……七,又用前所得九十九數,求他假數法之一……三.求八線對數,對數用法.

其"對數比例"稱:"對數比例,乃西士若往,訥白爾(John Napier)所作,以借數與眞數對列成表,故名對數表.又有恩利格,巴理知斯(Henry Briggs)者,復加增修,行之數十年,始至中國.其法以加代乘;以減代除;以加倍代自乘,故折半卽開平方;以三因代再乘,故三歸卽開立方.推之至於諸乘方,莫不皆以假數相求,而得眞數.蓋爲乘除之數甚繁,而以假數代之甚易也.其立數之原,起於連比例,蓋比例四率;二率與三率相乘,一率除之,得四率.以遞加遞減之四

(20) 見東華續錄"乾隆"一四.

(21) 見東華錄"雍正"三.

數;第二數第三數相加,減第一數,則得第四數.作者有見於此,故設假數以加減代乘除之用,此表之所以立也".其言比例四率,幷遞加遞減之四數,與穆尼閣解析對數之大意相同.

其"明對數之原"與"明對數之綱"則設下列各表,如(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7)以見"假數可隨意而定."因便利起見,用(5),(6),(7)之假數.因"乘除之數始於一,故一不用乘,亦不用除;而加減之數始於0,故0無可加,亦無可減也"."故1之假數,必定爲0",如 $\log 1=0$ 是也."而一與十,十與百,百與千,……皆爲加十倍之相連比例率.然其數皆爲一,但遞進一位",如(5).且如是則"眞數不同,而位數同者,其假數雖不同,而首位必同".如(6),首位幷爲0,又"眞數相同,而遞進幾位者,其假數首位必遞加幾數,而次位以後却相同".如(7)是也.

其"明對數之目"有(1)"用中比例求假數法",則因"凡連比例率,以首率末率兩眞數相乘開方,卽得中率之眞數;以首率末率兩假數相加折半,卽得

眞數	假數
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8

(1)

眞數	假數
2	3
4	5
8	7
16	9

(2)

眞數	假數
1	4
3	5
9	6

(3)

眞數	假數
1	8
3	5
9	2

(4)

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8

(5)

眞數	假數
2	0.3010299957
3	0.4771212547
4	0.6020599913
5	0.6989700043
6	0.7781512504

(6)

眞數	假數
11	1.0413926852
110	2.0413926852
1100	3.0413926852
11000	4.0413926852
110000	5.0413926852

(7)

中率之假數",如

眞數　$1:x=x:10$,　則　$x=\sqrt{1\times 10}=3.1622777$

假數　$0-y=y-1$, 又　$y=\frac{0+1}{2}=0.500$

故 $\log 3.1622777=0.500$ 是爲第一次.

如求 log 9 則如表所列,第五次以前,幷以逐次所得之中率爲首率,以舊末率 10 爲末率,其五次以後,則因欲與所求 9 迫近之故,以逐次所得之中率爲首率,或爲末率;而以舊末率或首率與之相配.俾至二十六次,可得 $\log 9=0.95425125$ 焉.然而實際上 $\log 9=0.95424250944$.蓋表中 9,"七空位之後,尙有奇零,故所得之假數,猶爲稍大".

	眞	假
第一次	10000000	00000000000
	31622777	05000000000
	100000000	10000000000
第二次	31622777	05000000000
	56234132	07500000000
	100000000	10000000000
第三次	56324132	07500000000
	74989421	08750000000
	100000000	10000000000
第四次	74989421	08750000000
	86596432	09375000000
	100000000	10000000000
第五次	86596432	09375000000
	93057204	09687500000
	100000000	10000000000
第六次	86596432	09375000000
	89768713	09531250000
	93057204	09687500000

第七次	89768713	09531250000
	91398170	09609375000
	93057204	09687500000
第八次	89768713	09531250000
	90179777	09570312500
	91398170	09609375000
第九次	89768713	09531250000
	90173333	09550781250
	90179777	09570312500
第十次	89768713	09531250000
	89970796	09541015625
	90173333	09550781250
第十一次	89970796	09541015625
	90072008	09545898437
	90173333	09550781250
第十二次	89970796	09541015625
	90021388	09543457031
	90072008	09545898437

<table>
<tr><td rowspan="3">第十三次</td><td>89970796</td><td>09541015625</td></tr>
<tr><td>89996088</td><td>09542236328</td></tr>
<tr><td>90021388</td><td>09543457031</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十四次</td><td>89996088</td><td>09542236328</td></tr>
<tr><td>90008737</td><td>09542846679</td></tr>
<tr><td>90021388</td><td>09543457031</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十五次</td><td>89996088</td><td>09542236328</td></tr>
<tr><td>90002412</td><td>09542541503</td></tr>
<tr><td>90008737</td><td>09542846679</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十六次</td><td>89996088</td><td>09542236328</td></tr>
<tr><td>89999250</td><td>09542388915</td></tr>
<tr><td>90002412</td><td>09542541503</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十七次</td><td>89999250</td><td>09542388915</td></tr>
<tr><td>90000821</td><td>09542465209</td></tr>
<tr><td>90002412</td><td>09542541503</td></tr>
<tr><td rowspan="3">第十八次</td><td>89999250</td><td>09542388915</td></tr>
<tr><td>90000041</td><td>09542427062</td></tr>
<tr><td>90000821</td><td>09542465209</td></tr>
</table>

第十九次	89999250	09542338915
	89999650	09542407989
	90000041	09542427062
第二十次	89999650	09542407989
	89999854	09542417526
	90000041	09542427062
第二十一次	89999845	09542417526
	89999943	09542422294
	90000041	09542427062
第二十二次	89999943	09542422294
	89999992	09542424678
	90000041	09542427062
第二十三次	89999992	09542424678
	90000016	09542425870
	90000041	09542427062
第二十四次	89999992	09542424678
	90000004	09542425274
	90000016	09542425870

第二十五次	89999992	09542424678
	89999998	09542424976
	90000004	09542425274
第二十六次	89999998	09542424976
	90000000	09542425125
	90000004	09542425274
log 9=09542425125		

又(2)"用遞次自乘求假數法";

首引　$\log 2^1=\log\ 2=0.3010299957$

$\log 2^2=\log\ 4=0.6020599913=2\times 0.3010299957$

$\log 2^4=\log 16=1.2041199826=4\times 0.3010299957$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\log 2^n=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n\times 0.3010299957=N$

以證 $\log a^n=n\log a=N$, $\log a=\frac{N}{n}$. 就中 a 爲所求眞數, n 爲率(卽指數), N 爲假數. 如欲求 log 2, 先記 2 之假數首位 0, $2^2=4$ 之假數首位 0, $2^4=16$ 之假數首位 1, $2^8=216$ 之假數首位 2, $2^{16}=65536$ 之假數首位 4, 逐次如是知 2^{16384} 之假數首位爲 4932. 則如前定義得 $\log 2=$

$\frac{4932}{16384}=0.3010$，再進求$2^{137446953472}$之假數首位爲41375-653307，則$\log 2=\frac{41375653307}{137446953472}=0.3010299959$.

率	眞	假
1	2	0
2	4	0
4	16	1
8	256	2
16	65536	4
32	4294967296	9
……	……………	……
16384	……………	4932
137446953472	……………	41375653307

又(3)"用遞次開方求假數法"；

(a)前證$\log a^n=n\log a=N$，則$\log a=\frac{N}{n}$.

亦可證$\log a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log a=N_1$，則$\log a=n\,N_1$，

如下表：

率	眞	假
1	256	24082399653
2	16	12041199826
4	4	6020599913

故 $\log 256 = 2.4082399653$

則 $\log 16 = \log 256^{(\frac{1}{2})^1} = \frac{1}{2} \times 2.4082399653$

$= 1.2041199826$

又 $\log 4 = \log 256^{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 2.4082399653$

$= 0.6020599913.$

換言之， 卽 $\log 256 = 2 \times 1.2041199826$ 或 4×0.6020599913

$= 2.4082399653.$

(5) "凡遞次開方，率皆用二倍"，如自乘一次爲2，自乘二次爲4，自乘三次爲8，每增乘一次則多倍，如下表："凡有眞數求假數，皆以所求之數爲一率，眞數開方幾次，則假數必折半幾次"，在前"用中比例求假數法"已見其例.

眞數 $1 : x = x : 10$， 則 $x = \sqrt{1 \times 10} = 3.1622777$

假數 $0 - y = y - 1$ $y = \frac{0+1}{2} = 0.50$

$$\therefore \quad \log 3.1622777 = 0.50$$

"今雖無第一率之假數,而苟得其折半第幾次之假數,則加倍幾次,必得第一率之假數.故以加倍第幾次之率數,與折半第幾次之假數相乘,即得第一率之假數也."

累次乘數	率數	累次乘數	率數
1	2	26	67108864
2	4	27	134217728
3	8	28	268435456
4	16	29	536870912
5	32	30	1073741824
6	64	31	2147483648
7	128	32	4294967296
8	256	33	8589934592
9	512	34	17179869184
10	1024	35	34359738368
11	2048	36	68719476736
12	4096	37	137438953472

13	8192	38	274877906944
14	16384	39	549755813888
15	32768	40	1099511627776
16	65536	41	2199023255552
17	131072	42	4398046511104
18	262144	43	8796093022208
19	524288	44	17592186044416
20	1043576	45	35184372088832
21	2097152	46	70368744177664
22	4194304	47	140737488355328
23	8388608	48	281474976710656
24	16777216	49	562949953421312
25	33554432	50	1125899906842624

(c) "凡眞數不可與假數爲比例者,因眞數開方,假數折半,其相比之分數不同,若開方至於數十次,則開方之數,卽與折半之數相同",如前"用中比例求假數法",幷參下表知10在第二十一次以下,開方之數,已與折半之數相同.

或 $10^{1/2^{(n+1)}}=\sqrt{1+E_n}=1+\frac{1}{2}E_n$ 時，則 $\log 10^{1/2^{(n+1)}}$

$$=\log(1+E_n)^{1/2}=\log\left(1+\frac{1}{2}E_n\right)=1\Big/2^{(n+1)}.$$

又因 $10^{1/2^{(n+1)}}=1+E_{n+1}$，則 $\frac{1}{2}E_n:1\Big/2^{(n+1)}$

$$=E_{n+1}:1\Big/2^{(n+1)}=1:\mu.$$

如 $10^{1/2^{54}}=\sqrt{1+0.{}^{15}_{0}2556382986400647 0}$

$$=1+0.{}^{15}_{0}127819149320032 35^{(22)}$$

$$\frac{1}{2^{54}}=0.{}^{16}_{0}55511151231257827 0.$$

則 $\frac{12781914932003235}{55511151231257827 0}=\frac{100000000000000000}{\mu=434294481903251804}$

卽 $\log 10^{1/2^{54}}=\log\left(1+0.{}^{15}_{0}1\right)=0.{}^{16}_{0}\mu$

$$=0.{}^{16}_{0}434294481903251804$$

而 $\mu=434294481903251804$ 是爲對數根(或模數).(23)

---

(22) 玆爲便利起見，應用新符號，如 $0.{}^{15}_{0}$ 謂小數點下有十五空位，他倣此，如 $0.{}^{4}_{0}58=0,000058$ 是也.

(23) 李善蘭譯代微積拾級稱爲"中國對數表根".

故"凡求假數者,皆以眞數開方至幾十次,首位第一,又得空十五位,則以其後之零數,與此所得之假數爲比例,卽得其開方第幾十次之假數.按前率數乘之,卽得第一率之假數也."

眞數遞次開方表	
	10
1	3.16227766016837933199889354
2	1.77827941003892280119730413
3	1.33352143216332402566538930 8
4	1.15478198468945817966191821 3
5	1.07460782832131749721381765 38
6	1.03663292843769799729062731 31
7	1.01815172171818184147372381 44
8	1.00903504484144743775900513 01
9	1.00450736423446251566467061 12
10	1.00225114829291291546561173 67
11	1.00112494139987987588539551 805
12	1.00056231260220863661849591 839

13	1.00028111678778013239924964325
14	1.00014054851694725816276732715
15	1.00007027128941143553881170845
16	1.00003513527746185660858130777
17	1.00001756748442267383384678274
18	1.00000878370363461214657407431
19	1.00000439184217316723628188083
20	1.00000219591867555420331707719
21	1.00000109795873502040975472940
22	1.000000548979216821114626602504
23	1.000000274489570738295091254499
24	1.000000137244775951083282695723
25	1.000000068622385621025737187482
26	1.000000034311192221882912750208
27	1.000000017155559637847199387 91
28	1.000000008577797945103051175888
29	1.000000004288889633541984290 13
30	1.000000002144449479377767429704

31	1.000000001072224739114050769268
32	1.0000000005361123694133417148314
33	1.000000000268056184670731515087
34	1.000000000134028092326383992777
35	1.000000000067014046160946555196
36	1.000000000033507023079911917300
37	1.000000000016753511539815618576
38	1.000000000008376755769872724269
39	1.000000000004188377884927590879
40	1.000000000002094188942461602625
41	1.000000000001047094471230253110
42	1.000000000000523547235614989504
43	1.000000000000261773617807460489
44	1.000000000000130886808903721678
45	1.0000000000000654434044518586975
46	1.0000000000000327217022259288133 7
47	1.0000000000000163608511129642728 3
48	1.0000000000000081804255564821029 5

49	1.000000000000000409021277824104311
50	1.000000000000000204510638912051946
51	1.000000000000000102255319456025921
52	1.000000000000000051127659728012947
53	1.000000000000000025563829864006470
54	1.000000000000000012781914932003235

眞數遞次開方表	
	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.0078125
8	0.00390625
9	0.001953125

10	0.0009765625
11	0.00048828125
12	0.000244140625
13	0.0001220703125
14	0.00006103515625
15	0.000030517578125
16	0.0000152587890625
17	0.00000762939453125
18	0.000003814697265625
19	0.0000019073486328125
20	0.00000095367431640625
21	0.000000476837158203125
22	0.0000002384185791015625
23	0.00000011920928955078125
24	0.000000059604644775390625
25	0.0000000298023223876953125
26	0.00000001490116119384765625
27	0.000000007450580596923828125

28	0.0000000037252902984619140625
29	0.00000000186264514923095703125
30	0.000000000931322574615478515625
31	0.0000000004656612873077392578125
32	0.00000000023283064365386962890625
33	0.000000000116415321826934814453125
34	0.0000000000582076609134674072265625
35	0.0000000000291038304567337036132812
36	0.0000000000145519152283668518066406
37	0.0000000000072759576141834259033203
38	0.0000000000036379788070917129516601
39	0.0000000000018189894035458564758300
40	0.0000000000009094947017729282379150
41	0.0000000000004547473508864641189575
42	0.0000000000002273736754432320594787
43	0.0000000000001136868377216160297393
44	0.0000000000000568434188608080148696
45	0.0000000000000284217094304040074348

46	0.0000000000000142108547152020037174
47	0.0000000000000071054273576010018587
48	0.0000000000000035527136788005009293
49	0.0000000000000017763568394002504646
50	0.0000000000000008881784197001252323
51	0.0000000000000004440892098500626161
52	0.0000000000000002220446049250313080
53	0.0000000000000001110223024625156540
54	0.0000000000000000555111512312578270

(*d*) 如求 log 2, 先令 $2^{10}=1024$. 又令 10^3 除之得 1.024.

此時首位已爲 1, 乃如前例開方四十七次, 卽得 1 下有十五空位之數.

$$1.024^{1/2^{47}}=1.\overset{15}{\underset{0}{}}16851605705394977$$

如前比例, 反求之, $1:\mu=16851605705394977:x$.

$$\therefore \qquad x=7318559369062392 68,$$

或 $$\log(1.024)^{1/2^{47}}=0.\overset{16}{\underset{0}{}}731855936906239268,$$

如前率數表,

$$\log (1.024)^{1/2^{47}} = \log 1.024^{1/2^{47}}$$

$$= \log 1.024^{\frac{1}{140737488355328}}$$

$$\therefore \quad \log 1.024 = 140737488355328 \times 0.\overset{16}{\underset{0}{}}731855936906239268$$

$$= 0.0102999566398119526 5^{(24)}$$

而 $$\log 1024 = 3.0102999566398119526 5 = \log 2^{10}$$

$$\therefore \quad \log 2 = \frac{1}{10} \times \log 1024$$

$$= 0.3010299956639811952 65.$$

(e) "凡求假數,眞數開方之次數愈多,則所得之假數愈密.然用假數不過至十二位,……故眞數開方至二十七次,即可以立率."

因 $$\log 10^{1/2^{34}} = 0.\overset{9}{\underset{0}{}}134028092326383992777.$$

---

(24) 其證詳李譯代數學卷十二,即

$$\log_e a = \frac{a^x - 1}{x}, \quad 或 \quad \log_e z = \left(z^{\frac{1}{2^{47}}} - 1\right) \times 2^{47}$$

$$^{1}/_{2}34=0.{}^{10}_{0}58207660913467407226565.$$

而 $$\frac{1340280923263839927777}{582076609134674072265}=\frac{100000000000000000000000}{\beta=434294481874147997206955}.$$

又 $$\log(1.024)^{1/_{2}27}=0.{}^{9}_{0}1670189305014194826 2$$

$$1:\beta=167018\cdots\cdots8262:x,$$

$$x=767406570913770890701439$$

$$\log(1.024)^{1/_{2}27}=0.{}^{10}_{0}767406570913770890701439$$

$$\therefore\quad \log 2=0.3010299956640$$

"此法較之前法,開方省二十次,而所得之數同,故求假數者,用此法亦便也."

(*f*) "凡開方之數,與折半之數雖不同,然而不同之較,遞次漸少.故又有相較之法.至開方第十次以後,則以較數相減,即得開方之數."

如求 log 6, 如前 (*d*) 例, 先令 $6^9=10077696$, 又令 10^7 除之得 1.0077696, 此時首位已爲 1.逐次開方十一次, 其每次之商以 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{11}$ 表之, 其值如下:

		1.0077696
$a_1=1+E_1$	1	1.00387728333696245663846551
$a_2=1+E_2$	2	1.00193676613694661675870229
$a_3=1+E_3$	3	1.00096791463909901728890720
$a_4=1+E_4$	4	1.00048384026884662985492535
$a_5=1+E_5$	5	1.00024189087882468563808727
$a_6=1+E_6$	6	1.00012093812639713459439194
$a_7=1+E_7$	7	1.00006046723505530968016005
$a_8=1+E_8$	8	1.00003023316050565775964794
$a_9=1+E_9$	9	1.00001511646599905672950488
$a_{10}=1+E_{10}$	10	1.00000755820443630121429076
$a_{11}=1+E_{11}$	11	1.00000377909507737080524125

其"第五次開方",1下空位 E_5,"與第四次開方所得 (E_4) 折半之數漸近",故令

$$\text{第5次之較}=\frac{E_4}{2}-E_5=d_5$$

$$\begin{cases}\text{第6次之一較}=\dfrac{E_5}{2}-E_6=d_{6,1}\\[2mm] \text{第6次之二較}=\dfrac{d_5}{4}-d_{6,1}=d_{6,2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 第7次之一較 = \frac{E_6}{2} - E_7 = d_{7,1} \\ 第7次之二較 = \frac{d_{6,1}}{4} - d_{7,1} = d_{7,2} \\ 第7次之三較 = \frac{d_{6,2}}{8} - d_{7,2} = d_{7,3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 第8次之一較 = \frac{E_7}{2} - E_8 = d_{8,1} \\ 第8次之二較 = \frac{d_{7,1}}{4} - d_{8,1} = d_{8,2} \\ 第8次之三較 = \frac{d_{7,2}}{8} - d_{8,2} = d_{8,3} \\ 第8次之四較 = \frac{d_{7,3}}{16} - d_{8,3} = d_{8,4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 第9次之一較 = \frac{E_8}{2} - E_9 = d_{9,1} \\ 第9次之二較 = \frac{d_{8,1}}{4} - d_{9,1} = d_{9,2} \\ 第9次之三較 = \frac{d_{8,2}}{8} - d_{9,2} = d_{9,3} \\ 第9次之四較 = \frac{d_{8,3}}{16} - d_{9,3} = d_{9,4} \\ 第9次之五較 = \frac{d_{8,4}}{32} - d_{9,4} = d_{9,5} \end{cases}$$ [25]

此時 $d_{9,5}=0$, 故 $\frac{d_{8,4}}{32}=d_{9,4}$, "故自第十次以後, 則不

(25) 說明見傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方用較省算法解".

用開方," 令第10次之四較 $=\frac{d_{9,4}}{32}=d_{10,4}$,

由此逆推之,得;

$$\begin{cases} 第10次之四較=\frac{d_{9,4}}{32}=_{10,4}, \\ 第10次之三較=\frac{d_{9,3}}{16}-d_{10,4}=d_{10,3} \\ 第10次之二較=\frac{d_{9,2}}{8}-d_{10,3}=d_{10,2} \\ 第10次之一較=\frac{d_{9,1}}{4}-d_{10,2}=d_{10,1}. \end{cases}$$

同理

$$\begin{cases} 第11次之四較=\frac{d_{10,4}}{32}=d_{11,4} \\ 第11次之三較=\frac{d_{10,3}}{16}-d_{11,4}=d_{11,3} \\ 第11次之二較=\frac{d_{10,2}}{8}-d_{11,3}=d_{11,2} \\ 第11次之一較=\frac{d_{10,1}}{4}-d_{11,2}=d_{11,1}. \end{cases}$$

而 $E_{11}=\frac{E_{10}}{2}-d_{11,1}$, 又 $a_{11}=1+E_{11}$

逐次如是,得 $a_{23}=1.\overset{9}{\underset{0}{}}92262889104307667$

$$=1.0077696^{1/2^{23}}$$

如前 (e) 例, $1:\beta=922628\cdots\cdots7667:x$

$$x=400692636197652$$

$$\log (1.0077696)^{1/2^{23}}=0.\overset{10}{0}400692636197652$$

$$\log 10077696=7+2^{23}\times 0.\overset{10}{0}400692636197652=\log 6^{9}.$$

$$\therefore\quad \log 6=0.77815125038$$

(g) 凡求假數，先求得 1－9, 11－19, 101－109, 1001－1009, 10001－10009, ……, 1000000001－1000000009 九十九數之假數，而他數皆由此生．然此九十九數內，有以兩數相乘除而得者，則以兩假數相加減．數理精蘊表卷三……六，有對數闡微，卽示某數之相乘因子．就中無他數爲因子者，謂之數根．如 1－9 中之 2, 3, 7 可按前"用遞次開方求假數法"求之．至 1000001 以後，則又可用前遞次開方表內相近之數，比例而得之．

如求　　$\log 1.000001$

因　$10^{1/2^{21}}=1+0.\overset{5}{0}1097958735,\ \dfrac{1}{2^{21}}=0.\overset{6}{0}4768371582\cdots\cdots$

$\therefore$　$109758735 : 476837158=1 : x,\quad x=4342943\cdots\cdots$

則　　$\log 1.000001=0.\overset{6}{0}4342943$

$$\log 1.000002=2x=0.\overset{6}{0}86859$$

$$\log 1.000003=3x=0\ \overset{5}{0}130286.$$

次如前說，因

$$10^{1/2^{19}}=1+0.\overset{5}{0}4391842173,\quad \frac{1}{2^{19}}=0.\overset{5}{0}1907348632$$

$$\therefore\quad 4391842173:1907348632=1:x,\quad x=17371740,$$

則
$$\log 1.000004=0.\overset{5}{0}17371740,$$

$$\log 1.000005=\frac{5}{4}x=0.\overset{5}{0}217147,$$

$$\log 1.000006=\frac{6}{4}x=0.\overset{5}{0}260576.$$

同理 $\log 1.000007$ 如前求得 x，則 $\log 1000008=\frac{8}{7}x$，$\log 1000009=\frac{9}{7}x$，至於 1.0000001 以後之假數，幷不用比例，因 $\left(1+0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{6}{0}4342943$

又由 (c) 知 $\log\left(1-0.\overset{5}{0}1\right)=0.\overset{16}{0}4342944$

則其間可用歸納法，得

$$\log\left(1+0.\overset{6}{0}1\right)=0.\overset{7}{0}434294$$

$$\log\left(1+0.\overset{7}{0}1\right)=0.\overset{8}{0}434294$$

....

其九十九數之眞數假數如下表:

眞數	假數	眞數	假數
1	0	1001	000043407748
2	030102999566	1002	000086772153
3	047712125472	1003	000000093302
4	070259599133	1004	000173371281
5	069877000434	1005	000216606716
6	077815125038	1006	000259798072
7	084509804001	1007	000302947055
8	090208998699	1008	000346053211
9	095424250944	1009	000389116624
11	004135268516	10001	000004342728
12	007918124605	10002	000008685021
13	011394335231	10003	000013026881
14	014612805568	10004	000017568306
15	017609125506	10005	000021709297
16	020411998266	10006	000026049855
17	023044892138	10007	000030389978
18	025527250510	10008	000034729669

19	027875360095	10009	000039068925
101	000432137308	100001	000000434292
102	000860017176	100002	000000868580
103	001283722471	100003	000001302864
104	001703333930	100004	000001737143
105	002118929907	100005	000002171418
106	002530586526	100006	000002605689
107	002938377769	100007	000003039955
108	003342375549	100008	000003474217
109	003742649764	100009	000003908474

眞數	假數	眞數	假數
1000001	000000043429	100000006	000000002606
1000002	000000086859	100000007	000000003040
1000003	000000130288	100000008	000000003474
1000004	000000173717	100000009	000000003909
1000005	000000217147	1000000001	000000000043
1000006	000000260576	1000000002	000000000087

1000007	000000304005	1000000003	000000000130
1000008	000000347434	1000000004	000000000174
1000009	000000390863	1000000005	000000000217
10000001	000000004343	1000000006	000000000261
10000002	000000008686	1000000007	000000000304
10000003	000000013029	1000000008	000000000347
10000004	000000017372	1000000009	000000000391
10000005	000000021715	10000000001	000000000004
10000006	000000026058	10000000002	000000000009
10000007	000000030401	10000000003	000000000013
10000008	000000034744	10000000004	000000000017
10000009	000000039086	10000000005	000000000022
100000001	000000000434	10000000006	000000000026
100000002	000000000869	10000000007	000000000030
100000003	000000001203	10000000008	000000000035
100000004	000000001737	10000000009	000000000039
100000005	000000002171		

又(4)"用九十九求他假數法",

如下各例之數，爲 a, b, c 各數所組成，則其假數可以加減乘得之，如：

$$\log N = \log 10^n \times a = 10^n \log a$$

$$\log N = \log a \times b = \log a + \log b$$

$$\log N = \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

又 $\log N = \log a\,b\,c = \log a + \log b + \log c$，而 $a > b > c$.

$$\log 20703 = \log 20000 \times 1.005 \times 1.03 = \log 20000 + \log 1.005 + \log 1.03 = 4.31603328213$$

反求之，則 $4.31603328213 - \log 20000 - \log 1.005 - \log 1.03 = 0$

$\therefore$ $4.31603328213 = \log 20703.$

此義更擴張之，以求任意數，如求 $\log 23$，"則以所知前位之整數累除之，除得累乘之眞數，則以其假數累加之，卽得所求之假數."兹舉例以見之.

求 $\log 5689$：

$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{一法}\ 5600} = 1.01$ (一商) 餘 23	令 N 爲原實，
$5689 - 33 = 5656$ (二法)	則 $\frac{N}{r} = q_1 + \frac{d_1}{r}$.
$= 5600 \times 1.01$	$N - d_1 = rq_1$

$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{二法}\ 5656}=1.005$ (二商) 餘 4.72 $5689-4.72=5684.28$ (三法) $=5656\times1.005$	$\frac{N}{N-d_1}=q_2-\frac{d_2}{N-d_1}$ $N-d_2=(N-d_1)q_2$ $=rq_1q_2$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{三法}\ 5684.28}=1.0008$ (三商) 餘 0.172576 $5689-0.172576=5688.827424$ (四法) $=5684.28\times1.0008$	$\frac{N}{N-d_2}=q_3-\frac{d_3}{N-d_2}$ $N-d_3=(N-d_2)\times q_3$ $=rq_1q_2q_3$
$\frac{\text{原實}\ 5689}{\text{四法}\ 5688.827424}=1.00003$ (四商) 餘 0.00191117728 $5689-0.00191117728$ $=5688.998089$ (五法)	$\frac{N}{N-d_3}=q_4-\frac{d_4}{N-d_3}$ $N-d_4=(N-d_3)\times q_4$ $=rq_1q_2q_3q_4.$
逐次如是,至餘數幾等於零,即 八法 $=5688.999995$ 八商 $=1.0000000008$ 八餘 $=0000000000$	…………………………… $\frac{N}{N-d_7}=q_8-\frac{d_8}{N-d_7}$ $N-d_8=(N-d_7)\times q_8$ $=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8$

$\log 5689$	因 $d_8=0$
$=\log 5600\times1.01\times1.005\times1.0008$	$\therefore\ N=rq_1q_2q_3\cdots\cdots q_8.$
$\times1.00003\times1.0000003$	$\log N=\log r+\log q_1$
$\times1.0000003\times1.000000003$	$+\log q_2$
$\times1.0000000003$	$+\cdots\cdots$
$=3.75503593371$	$+\log q_8.$

最後言"求八線對數"及"對數用法"焉. 其對數表具小數十位.

清, 年希堯面體比例便覽 (雍正十三年, 1735 自序) 稱: "夫假數者乃數學家之超法也, 其詳見數理精蘊中. 但其數加之則代乘, 減之則代除, 兩分之則開平方, 三分之則開立方, 四分之則開三乘方, 等而推之, 皆可爲也, 不亦超法乎?"

(4) 陳杰算法大成上編 (道光二十四年, 1844 金望欣序, 光緒戊戌 (1898) 浙江官書局重刊) 卷四, 言: "對數", 蓋稗販數理精蘊之說也.

10. 對數簡法,續對數簡法,假數測圓

(5) 粤雅堂叢書刻本戴煦(1805–1860)求表捷術咸豐壬子(1852)自序稱"自道光乙巳(1845)至今歲,凡八易寒暑,演錄始竣."其中對數簡法二卷,前有道光乙巳(1845)項名達序,及戴煦自識.續對數簡法一卷,前有道光丁未(1847)項名達序,及丙午(1846)戴煦自識.假數測圓二卷,前有咸豐壬子(1852)戴煦自序,及咸豐丙辰(1856)夏鸞翔序.以上三書幷論及對數.

對數簡法(1845)卷上"開方七術","求開方表",蓋因舊法開方,事涉繁重,因以二項式求之.

如 $N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}\mp\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\pm\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots.$$

$$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots.$$

$$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{2}$$

$$-\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots.$$

又 $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots.$$

其所設開方表卽由此而得.開方表中右行爲眞數,左行爲假數之分子,而2099152爲公分母,如

$$\log 3.1622\cdots\cdots1684=\frac{1048576}{2099152},$$

$$\log 1.0001\cdots\cdots5169=\frac{128}{2099152},$$ 是也.

率	次	眞 數
2099152		10.
1048576	1	3.1622776601684
524288	2	1.7782794100389
262144	3	1.3335214321633
131072	4	1.1547819846895
65536	5	1.0746078283213

32768	6	1.0366329284377
16384	7	1.0181517217182
8192	8	1.0090350448414
4096	9	1.0045073642545
2048	10	1.0022511482929
1024	11	1.0011249413999
512	12	1.0005623126022
256	13	1.0002811167878
128	14	1.0001405485169
64	15	1.0000702717894
32	16	1.0000351352775
16	17	1.0000175674844
8	18	1.0000087837036
4	19	1.0000043618422
2	20	1.0000021959187
1	21	1.0000010979587

又 (1) "有開方表徑求諸對數"

$$\log 2 = \log 1.7782\cdots\cdots389 \times \frac{2}{1.7782\cdots389}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.1246826503807$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times\frac{1.1246826503807}{1.0746\cdots\cdots213}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0465982293630$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times\frac{1.0465982293630}{1.0366\cdots\cdots377}$$

$$=\log 1.7782\cdots\cdots389\times1.0746\cdots\cdots213\times1.0366\cdots\cdots377\times1.0096131433335$$

$$=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots377\times1.0090\cdots414\times\frac{1.0096131433335}{1.0090\cdots\cdots414}$$

逐次如是,得;

$$\log 2=\log 1.778\cdots89\times1.074\cdots13\times1.036\cdots77\times1.0090\cdots414\times1.0005623126022\times1.0000087837036\times1.0000010979589\times\frac{1.0000018198300}{1.0000010979587}(=1.000000721870)$$

$$=\frac{1}{2097152}\left[524288+65536+32768+8192+512+8+1+\frac{721870}{10979587}(=0.6574660)\right]$$

$=0.801029995663$. 其末位因在1以下,故以比例得之.

又(2)"不用開方表求諸對數"

數理精蘊用九十九求他假數，戴氏則主張用1−9，至10000001−10000009之七十二數，已經足用．其求七十二數，亦不用數理精蘊之"用中比例，用遞次自乘，用遞次開方"各法，惟用假設對數之法，其假設對數即自然對數也．

先假設 (a) $\log_e 1.\overset{6}{0}1 = 1.\overset{6}{0}1$

則 $$\log_e 1.\overset{6}{0}2 = \log_e\left(1.\overset{6}{0}1 \times \frac{1.\overset{6}{0}2}{1.\overset{6}{0}1}\right)$$

$$= \log_e\left(1.\overset{6}{0}1 \times 1.\overset{7}{0}9999999\right)$$

$$= 1.\overset{6}{0}1999999999.$$

又 $$\log_e 1.\overset{6}{0}3 = \log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999 \times \frac{1.\overset{6}{0}3}{1.\overset{6}{0}1999999999}\right)$$

$$= \log_e\left(1.\overset{6}{0}1999999999 \times 1.\overset{7}{0}9999997\right)$$

$$= 2.\overset{6}{0}29999997.$$

逐次如是，至於 $\log_e 1.\overset{6}{0}9$

(*b*) 次求 $\log_e 1.\overset{5}{0}1$ 則如上例得

$\log_e 1.\overset{5}{0}1 = 1.\overset{6}{0}99999955$, 其 $\log_e 1.\overset{5}{0}2$ 以下,則用二次除法,如:

$$\log_e 1.\overset{5}{0}2 = \log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times \frac{1.\overset{5}{0}2}{1.\overset{5}{0}1}\left(=1.\overset{6}{0}99999900\right)\right]$$

$$=\log_e\left[1.\overset{5}{0}1 \times 1.\overset{6}{0}9 \times \frac{1.\overset{6}{0}99999900}{1.\overset{6}{0}9}\left(=1.\overset{7}{0}9999891\right)\right] = 1.\overset{5}{0}199999810.$$

逐次如是,至於 $\log 1.\overset{5}{0}9$ 均用二次除法,其 $1.\overset{4}{0}2$ 以下,用三除法, $1.\overset{3}{0}2$ 以下,用四除法, $1.\overset{2}{0}1$ 以下,用五除法, $1.\overset{1}{0}2$ 至 $1.\overset{1}{0}9$ 以及 1.1, 用六除法, 1.2 至 1.9 用七除法.

因得　　假設對數 $\log_e 2 = 0.69314721517968$

　　　　假設對數 $\log_e 10 = 2.30258520799943$

以 $\log_e 10$ 爲除法,除逐數之假設對數,即得其定率對數.

如　　$\log 2 = \frac{1}{\log_e 10} \times \log_e 2 = 0.301029995664$ 是也.

又(3)"有七十二對數,求諸對數"

如　$\log 5689=\log(10^3\times 5.689)=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$

$$=\log\left[10^3\times 5\times\frac{5.689}{5}(=1.1378)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times\frac{1.1378}{1.1}(=1.0343636363636)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times\frac{1.0343636363636}{1.03}(=1.0042365401589)\right]$$

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1004\times\frac{1.0042365401589}{1.004}(=1.0002355977678)\right]$$

…………………………………

$$=\log\left[10^3\times 5\times 1.1\times 1.03\times 1.004\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}2\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{4}{0}3\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{0}5\times 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5\times\frac{1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5904790}{1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}5}\left(=1.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}904790\right)\right]$$

其末項　$\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}904790$ 由 $\log 1.\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{0}1=0.\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{0}43429$ 比例而得　$0.\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{0}39294$.

故 $$\log 5689=\log 10^3+\log 1.1+\cdots\cdots+\log 1.\overset{6}{0}5$$

$$+0.\overset{3}{0}39294$$

$$=3.755035933768.$$

戴氏幷因此義,以求 $\log(n+1)$, 其 $\log n$ 爲已知,如已知 $\log 36$ 求 $\log 37$, 因 $\log\dfrac{n+1}{n}=\log\dfrac{37}{36}=\log 37-\log 36.$

故 $$\log 37=\log 36+\log\Big(1.02\times1.007\times1.\overset{3}{0}6\times1.\overset{4}{0}2$$

$$\times1.\overset{6}{0}9\times1.\overset{7}{0}132839\Big)$$

$$=\log 36+\log 1.02+\log 1.007+\cdots\cdots$$

$$+\log 1.\overset{6}{0}9\ +0.\overset{8}{0}5769$$

$$=1.568201724068.$$

續對數簡法 (1846) 卷首列"以本數爲積,求折小各率四術"及"以本數爲根,求倍大各率四術".

其"求對數根",因對數根即 $\log 1.\overset{n}{0}1$. 數理精蘊舊法由五十四次開方比例而得.

玆因 $10^{\frac{1}{32}}=1.0746078283213174\,97=1+m$ 稱爲用數,

$\dfrac{1+m}{m}=14.403419218868653\,9=n$ 稱爲除法,

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=1\div 2.302585092994045\underline{77}$$

$$=0.43429448190325181\underline{1}$$

蓋戴煦本項名達"以本數爲積,求折小各率,第一術",

$$N^{\frac{1}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots.$$

而 A 爲第一數, B 爲第二數, C 爲第三數, 以下同此, n 爲率分. 戴氏謂 n 爲極大時, 則 $n+1$ 與 n 約略相等, $2n+1$ 與 $2n$; 與 $3n+1$ 與 $3n$ 亦約略相等,故上式可化爲:

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}\pm\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}\pm\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots$$

如上例, $(1+m)^{\frac{1}{32}}=1+\frac{1}{32n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\right)$

惟此處, $n=\frac{1+m}{m}$.

又 $\log 10^{\frac{1}{32\times 32}}=\frac{1}{32\times 32}\log 10=\frac{1}{32\times 32}$.

故求對數根 μ 時，如數理精蘊(3)(c)得

$$\mu=1\div\frac{32}{n}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.4342944819032518 11$$ 也.

其"論用數"謂欲求某數(如 N 者)之對數，當先已知對數之若干數乘之，或除之，或屢乘之，或開之，再以 10^r 除之，令成用數 $1+y$ 之形，而 y 爲小數.

即 $$\frac{nN}{10^r}=1+y,\qquad 或\qquad N=10^r(1+y)\times\frac{1}{n},$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)-\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N}{n(10^r)}=1+y,\qquad 或\qquad N=10^r(1+y)\times n,$$

$$\log_{10}N=r+\log_{10}(1+y)+\log_{10}n;$$

又 $$\frac{N^n}{10^r}=1+y,\qquad 或\qquad N=\left[10^r(1+y)\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{10}N=\frac{1}{n}\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\};$$

又 $$\frac{N^{\frac{1}{n}}}{10^r}=1+y,\quad 或\quad N=\left[10^r(1+y)\right]^{n},$$

$$\log_{10}N=n\left\{r+\log_{10}(1+y)\right\}.$$

故求 $\log_{10}N$，先求其用數 $1+y$ 之對數，

因 $\log_{10}(1+y)=\mu\log_e(1+y)$　　　　(y=小數)

$$=\mu\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\}$$

此與顧觀光第四術,及代數學(1859)卷十三第(1)式,微積溯源(1874)第四十二款所載相同.

就中括弧所記,蓋用其"以本數爲積,求折小各率,第二術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

如前例 n 爲極大時,則 $n-1$ 與 n, $2n-1$ 與 $2n$, ⋯⋯ 等并約略相等,故可化爲

$$N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots$$

又 $P=1$

故 $(1+y)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$

如上例去其首位1,與 μ 爲比例卽得.

或因 $\log(1+y)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log(1+y)$

故求對數根 μ 時,如數理精蘊(3)(c)得:

$$\mu=1\div\frac{n}{\log(1+y)}\cdot\frac{1}{n}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{\log(1+y)}{\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)}$$

$$\therefore\qquad \log(1+y)=\mu\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right)$$

戴氏謂"所求之用數,均位少而無畸零,(如7用數1+0.008之0.008),不惟乘法止一二位,抑且用第二術,則除法卽單一($P=1$),可以省除,故雖降法稍難,而終以第二術爲便也."

其"附對數還原"內"論借用本數",以

$$\log 1.000001=0.\overset{6}{\underset{0}{}}4342942647562$$

爲借用本數之對數.

其"論借用率數",假如

$$\log N=1.3617278360175928784$$

求借用率數.

則 $\log N=\log 10+\log 2+\log 1.1+\log 1.04+\log 1.005$

$$+\log 1.0002+\log 1.00004+\log 1.000003$$

$$+0.\overset{6}{\underset{0}{}}2296151084564(-z).$$

其最後之 $0.\overset{6}{0}2296151084564$ 未見於次 1−9, 1.1−1.9, ……

1.000001−1.000009 表內, 命之爲 z,

則 $$t=\frac{z}{\log_{10} 1.000001}$$ 稱爲借用率數.

上式, 按定義 $z=t.\log_{10} 1.000001=\log_{10} \overline{1.000001}^{\,t}$

而 $$\log N=\log 10+\log 2+\cdots\cdots+\log 1.000003$$

$$+\log_{10} \overline{1.000001}^{\,t}.$$

今按"以本數爲根, 求倍大各率, 第二術",

$$N^m=(P+Q)^m=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots$$

因 $P=1,\ Q=0.000001>1$,

故 $$(1.000001)^t=1+(0.000001)t-\frac{1}{2}(0.000001)^2t(1-t)-$$

$$-\frac{1}{3}(0.000001)^3t(1-t)(2-t)-\cdots\cdots$$

$=1.\overset{6}{0}$[illegible]287[illegible]4656192.

$N=1$[illegible]$\times 1.005\times 1.0002\times 1.00004$

[illegible]$1.\overset{6}{0}$[illegible]287084656192.

$=23$[illegible]

眞數	假數　　小餘
2	0.30102999566398119<u>49</u>
3	0.47712125471966243<u>71</u>
4	0.60205999132796238<u>98</u>
5	0.69897000433601880<u>51</u>
6	0.77815125038364363<u>20</u>
7	0.84509804001425688<u>22</u>
8	0.90308998699194358<u>47</u>
9	0.95424250943932487<u>42</u>
1.1	0.04139268515822504<u>17</u>
1.2	0.07918124604762482<u>69</u>
1.3	0.11394335230683676<u>96</u>
1.4	0.14612803567824802<u>71</u>
1.5	0.17609125905568124<u>22</u>
1.6	0.20411998265592477<u>96</u>
1.7	0.23044892137827392<u>78</u>
1.8	0.25527250510330606<u>91</u>

1.9	0.2787536009528289619
1.01	0.0043213737826425665
1.02	0.0086001717619175598
1.03	0.0128372247051722046
1.04	0.0170333392987803543
1.05	0.0211892990699380744
1.06	0.0253058652666841264
1.07	0.0293837776851096402
1.08	0.0334237554869497012
1.09	0.0374264979406236338
1.001	0.0004340774793186407
1.002	0.0008677215312269125
1.003	0.0013009330204181186
1.004	0.0017337128090005297
1.005	0.0021660617565076762
1.006	0.0025979807199086122
1.007	0.0030294705536180070
1.008	0.0034605321095064860

1.009	0.0038911662369105216
1.0001	0.0000434272768626696
1.0002	0.0000868502116489572
1.0003	0.0001302688052270609
1.0004	0.0001736830584649187
1.0005	0.0002170929722302082
1.0006	0.0002604985473903469
1.0007	0.0003038997848124919
1.0008	0.0003472966853635408
0.0009	0.0003906892499101310
1.00001	0.0000043429231043084
1.00002	0.0000086858027806263
1.00003	0.0000120286390284893
1.00004	0.0000173714318498092
1.00005	0.0000217141812451551
1.00006	0.0000260568872153969
1.00007	0.0000303995497613986
1.00008	0.0000347421688840333

1.00009	0.0000390847445841675
1.000001	0.0000004342942647562
1.000002	0.0000008685880952187
1.000003	0.0000013028814913885
1.000004	0.0000017371744532664
1.000005	0.0000021714669808533
1.000006	0.0000026057590741501
1.000007	0.0000030400507331577
1.000008	0.0000034743419568767
1.000009	0.0000039086327483083

假數測圓卷之上有“求負算對數”二術,蓋求不滿單一之眞數.

如 (1), $\log_{10} 0.98 = \log_{10}(1-0.02) = \mu \log_e (1-0.02)$

$$= \mu\left\{-0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} - \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} - \cdots\cdots\right\}$$

$$= -0.00877392431.$$

而 $\log 98 = 2 + \log 0.98 = 1.99122607569.$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內“以本數爲積,求折小各率,第三術”

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$-\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}-\cdots\cdots.$$

又　$P=1,\qquad Q=0.02$

如前例去其首位1,與μ為比例即得.

上式與代數學卷十三,第(2)式相同.

又如(2),　$\log_{10}0.98=\log_{10}(1-0.02)=\mu\log_e(1-0.02)$

$$=\mu\left\{-\frac{0.02}{0.98}+\frac{1}{2}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{0.02}{0.98}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$=0.00877392431.$$

就中括弧內所記,蓋用續對數簡法內"以本數為積,求折小各率,第四術"

$$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

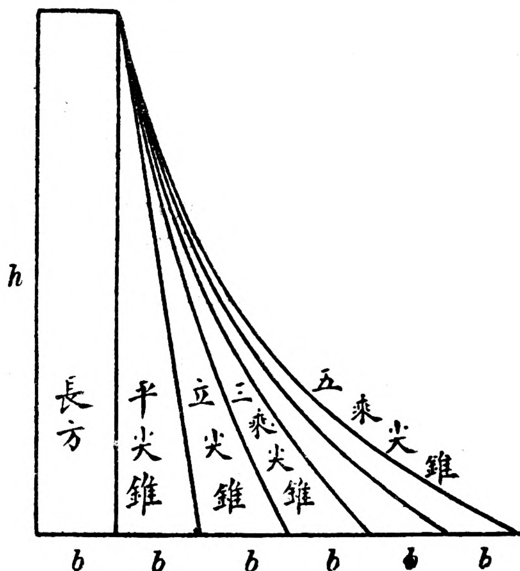
$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots$$

又　$P=1,\qquad Q=0.02.$

如前例去其首位1與μ為比例即得.

11. 方圓闡幽,弧矢啟秘,對數探源

李善蘭著方圓闡幽,弧矢啟秘,對數探源三書,不題著作時代.道光丙午(1846)顧觀光序四元解,對數探源,其於四元解序稱李君又有弧矢啟秘.觀此則諸書約成於道光丙午(1846).



方圓闡幽第七條,第八條謂平尖錐第一層一,第二層二,第三層三;立尖錐第一層一,第二層四,第三層九,由平方疊之;三乘尖錐第一層一,第二層八,

第三層二十七,由立方疊之;四乘尖錐第一層一,第二層十六,第三層八十一,由三乘方疊之,……,而以高乘底爲實,本乘方數加一爲法除之,得尖錐積.

原書不言其故,玆補證之:

如 長方, $S_h^0 = hb$,

平尖錐, $S_h^1 = \frac{1}{2}hb$, 觀圖自明.

又 立尖錐, $S_h^2 = \frac{1}{3}hb$,

因

$$S_h^2 = \frac{1}{2}\Big\{\Big[b\left(1-\frac{h}{h}\right)^2 + b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2\Big] + \Big[b\left(1-\frac{h-1}{h}\right)^2 + b\left(1-\frac{h-2}{h}\right)^2\Big] + \cdots\cdots + \Big[b\left(1-\frac{2}{h}\right)^2 + b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2\Big] + \Big[b\left(1-\frac{1}{h}\right)^2 + b\left(1-\frac{0}{h}\right)^2\Big]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\frac{b}{h^2}\Big(0^2+1^2+1^2+2^2+\cdots\cdots+\overline{h-2}^2 + \overline{h-1}^2 + \overline{h-1}^2 + h^2\Big)\Big\}$$

$$= \frac{b}{2h^2}\Big\{2[1^2+2^2+\cdots\cdots+h^2] - h^2\Big\}$$

$$=\frac{b}{2h^2}\left(\frac{2h^3+h}{3}\right)$$

$$=\frac{hb}{3}+\frac{b}{6h}$$ 若 h 爲極大，b 爲極小，則此式第二項可去之.

得 $$S^2_{h=\infty}=\frac{1}{3}hb.$$

又 三乘尖錐，$S^3_h=\frac{1}{4}hb.$

同理 $$S^3_h=\frac{b}{2h^2}\left\{2[1^3+2^3+\cdots\cdots+h^3]-h^3\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^3}\left(\frac{2h^4+2h^2}{4}\right)$$

$$=\frac{hb}{4}+\frac{b}{4h}.$$ 得 $$S^3_{h=\infty}=\frac{1}{4}hb.$$

又 四乘尖錐，$S^4_h=\frac{1}{5}hb.$

同理 $$S^4_h=\frac{b}{2h^4}\left\{2[1^4+2^4+\cdots\cdots+h^4]-h^4\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^4}\left(\frac{2h^5}{5}+\frac{2h^3}{3}-\frac{h}{15}\right)=\frac{hb}{5}+\frac{b}{3h}-\frac{b}{30h^3}.$$

若 h 爲極大，b 爲極小，則此式第二項以下可去之，得

$$S^4_{h=\infty}=\frac{1}{5}hb.$$

又 五乘尖錐, $S_h^5=\frac{1}{6}hb.$

同理 $$S_h^5=\frac{b}{2h^6}\left\{2[1^5+2^5+\cdots\cdots+h^5]-h^5\right\}$$

$$=\frac{b}{2h^5}\left\{\frac{2h^6}{6}+\frac{5h^4}{6}-\frac{h^2}{6}\right\}=\frac{hb}{6}+\frac{5b}{12h}-\frac{b}{12h^3}.$$

得 $$S_{h=\infty}^5=\frac{hb}{6}.$$

按歸納法, $S_{h=\infty}^m=\frac{hb}{m+1}.$

原書因無證法,故頗爲人所懷疑;吳起潛稱:"李壬叔……浸淫於尖錐,其所著方圓闡幽,弧矢啟祕,對數探源,……所據之理論,頗有闕而未完者."(26)

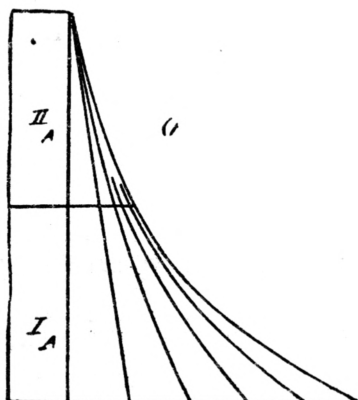
龔銘鳳稱:"或問李壬叔先生,子獨不信其尖錐之理,余頗疑之,請聞其說.曰:級數有合於尖錐,而尖錐不可以釋級數,蓋已有級數,可強以尖錐解之,未有級數,終難以尖錐得之,故李氏之說不足憑信也."(27)

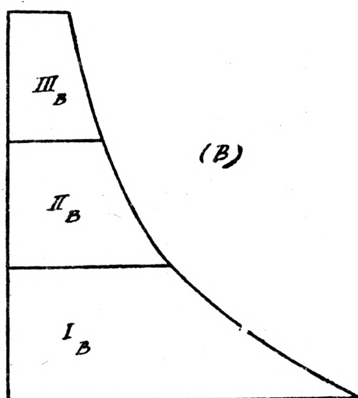
李善蘭於對數探源卷一謂:"此尖錐合積,無論

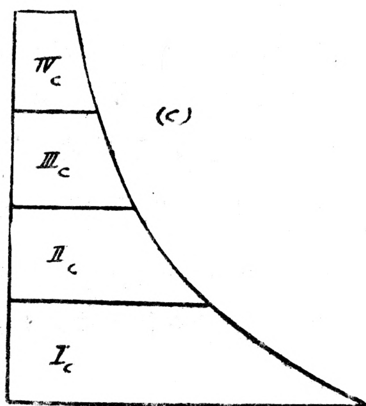
(26) 見吳起潛:李氏方圓闡幽拾遺,光緒丙午(1906)文明書局印本.

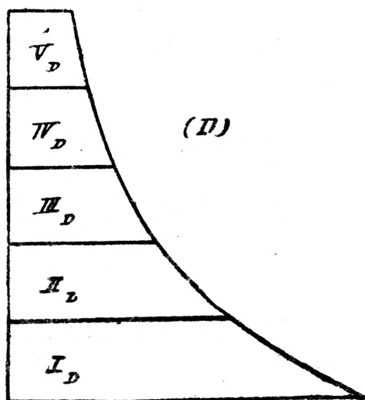
(27) 見龔銘鳳:雜學答問,光緒二十四年(1898)上海書局印本.

截爲幾段,自最下第二段以上,其積皆同.''如截圖 A 爲二段,B 爲三段,C 爲四段,D 爲五段,則 $II_A=II_B=II_C=II_D$; $III_B=III_C=III_D$, $IV_C=IV_D$ 是也.









蓋如 (D), 則 $S^{\frac{4}{5}}=S^{\frac{m-1}{m}}=II_D+III_D+IV_D+V_D$.

$$=hb\left\{1.\frac{m-1}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-1}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}(1)$$

又如 (C), 則 $S^{\frac{3}{5}}=S^{\frac{m-2}{m}}=II_C+III_C+IV_C$.

$$=hb\left\{1.\frac{m-2}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-2}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-2}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}(2)$$

如 $hb=1$, 則 (1) 式爲 $\log_e\frac{m}{1}=\log_e m-\log_e 1$,

(2) 式爲 $\log_e\frac{m}{2}=\log_e m-\log_e 2$.

兩式相減得 $\log_e 2-\log_e 2-\log_e 1=II_D$, 而 $\log_e 1=0$. 故 $II_D=\log_e 2$.

就中 m 爲任何數, $II=\log_e 2$ 并爲眞, 卽 $II_A=II_B=II_C=II_D$ 也, 餘倣此.

對數探源卷二"詳法", 先求二十尖錐汎積, 令 $hb=1$, 其 $\frac{1}{2}hb$, $\frac{1}{3}hb$ 等, 列於汎積表.

	二十尖錐汎積表
hb	100000000 長　方
$1/\ 2\ hb$	050000000 平　方
$1/\ 3\ hb$	033333333 立　方
$1/\ 4\ hb$	025000000 三　乘
$1/\ 5\ hb$	020000000 四　乘
$1/\ 6\ hb$	016666666 五　乘
$1/\ 7\ hb$	014285714 六　乘
$1/\ 8\ hb$	012500000 七　乘
$1/\ 9\ hb$	011111111 八　乘
$1/10\ hb$	010000000 九　乘
$1/11\ hb$	009090909 十　乘
$1/12\ hb$	008333333 十一乘
$1/13\ hb$	007692307 十二乘
$1/14\ hb$	007142857 十三乘
$1/15\ hb$	006666666 十四乘
$1/16\ hb$	006250000 十五乘
$1/17\ hb$	005682353 十六乘

1/18 hb	005555555 十七乘
1/19 hb	005263157 十八乘
1/20 hb	005000000 十九乘

乃分此汎積爲十段,如 I 至 X. 求其 II 至 X 之積.因如前 $II_A = II_D$ 之例,

故 $$II = III + IV = VI + VII + VIII + IX + X.$$

故 $$II + III + \cdots\cdots + X = 3\,II + V.$$

次求第二段積,

$$= hb(=1) \times \left\{ (((((((((((((((((((\left(\frac{1}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{19}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\right)\right.$$

$$\left.\frac{1}{2} + \frac{1}{17}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{14}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{13}\right)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\Big)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2}+1\Big)\frac{1}{2}\Big\}.$$

$$=hb(=1)\times\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

$$=0.69314713=\log_e\frac{2}{1}=\log_e 2.$$

又求第五段積,

$$=hb\ (=1)\times\left\{1.\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^9\right\}$$

$$=0.22314353=\log_e\frac{5}{1}=\log_e 5.$$

第二段至第十段共積$=II+\cdots\cdots+X=\log_e 5+3\log_e 2$

$$=\log_e 10=2.30258492.$$

$$\mu=1\div 2.3025492=0.43429451.$$

由是得定積表.

	二十尖錐定積表
μ	0.43429451 長 方
1/ 2 μ	0.21714725 平 方
1/ 3 μ	0.14476483 立 方
1/ 4 μ	0.10857362 三 乘
1/ 5 μ	0.08685890 四 乘
1/ 6 μ	0.07238241 五 乘
1/ 7 μ	0.06204207 六 乘
1/ 8 μ	0.05428681 七 乘
1/ 9 μ	0.04825494 八 乘
1/10 μ	0.04342945 九 乘
1/11 μ	0.03948131 十 乘
1/12 μ	0.03619120 十一乘
1/13 μ	0.03340727 十二乘
1/14 μ	0.03102103 十三乘
1/15 μ	0.02895296 十四乘
1/16 μ	0.02714340 十五乘
1/17 μ	0.02554673 十六乘

1/18 μ	0.02412747 十七乘
1/19 μ	0.02285760 十八乘
1/20 μ	0.02171472 十九乘

"既得二十尖錐定積,便可依此造表.一之對數,即尖錐合積中之最下一段,其數無盡,不可求,故命爲0也."

求二之對數,

$$\log_{10} 2=\mu\left\{1.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}$$

$$=0.30103000.$$

其求 $\log_{10} 3$, 因 $3^{14}=4782969$, $\frac{1}{14}\mu=0.03102103$,

而 $\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)<0.00000001$. 故十四乘尖錐,$\left(\text{即}\ \frac{1}{15}\mu\right)$以下,俱去不用.蓋此處僅用小數八位,今$\frac{1}{14}\mu\left(\frac{1}{3^{14}}\right)$已小於 $0.\overset{7}{0}1$,故於所求,已不生影響,其次項可以俱去不用.

$$\log_{10} 3=\log_{10} 2+\mu\left\{1.\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{14}\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\right\}=0.47712126.$$

同理求 $\log_{10}7$, 因 $7^8=5764801$, $\frac{1}{8}\mu=0.0542868l$,

而 $\frac{1}{8}\mu\left(\frac{1}{7^8}\right)<0.00000001$, 故八乘錐, $\left(\text{卽 } \frac{1}{9}\mu\right)$ 以下,俱去

不用.

$$\log_{10}7=\log_{10}6+\mu\left\{1.\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{7}\right)^8\right\}=0.8450980.$$

李善蘭蓋以 $\log_e\frac{m}{n}=\log_e m-\log_e n$

$$=\left\{\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}$$

與鄒伯奇乘方捷術同,而爲顧觀光第五術也.

正　數	對　　數
1	0.00000000
2	0.30103000
3	0.47712126
4	0.60206000
5	0.69897000

6	0.77815126
7	0.84509805
8	0.90309000
9	0.95424252
10	1.00000000

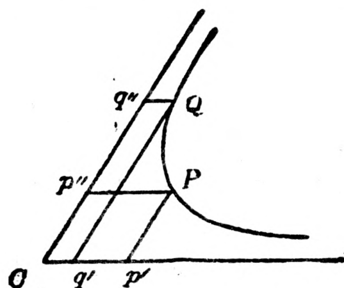
李善蘭對數學說,亦可以微積分解析之,見周明羣,李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究.(清華學報第三卷第二期,1926,十二月.)

12. 圜錐曲線,級數回求

(7) 圓錐曲線三卷,英國艾約瑟口譯,海寧李善蘭筆述.

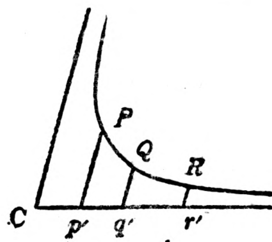
譯書年代未詳,書中註稱"詳代微積拾級",——此割線,代微積拾級(1859刻)名次切線——則書當刻於1859之後.

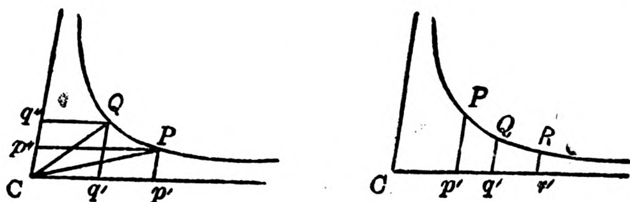
其卷二"第十二款 (雙)曲線上任取一點(P或Q),作二線(Pp', Pp''或Qq',Qq'')至二漸近線亦與漸近線平行,成四邊形(PC或QC)其積恆等."



"一系. $Qq'\times Qq''=Pp'\times Pp''$ 故 $Cq'':Cp''=Cp':Cq'$. Cq'' 愈大,則 Cq' 愈小. 然 Cq' 雖極小,終不能至於無. 而漸近線與曲線,雖漸長漸近,亦終不能相遇,中間總隔一 Cq' 也. 故漸近線一若爲曲線無盡界外之切線. 然漸近線長至無窮,Cq' 小至無窮,亦終不能與曲線相切也."

"二系. 於漸近線上截取諸分,(如 Cp', Cq', Cr') 令成漸大連比例,又自諸截點與餘一漸近線平行作諸線,至曲線界 (如 Pp', Qq', Rr'), 必成漸小連比例,因諸線與諸截分,兩兩相乘,俱等積故也."





"第十三款. CQP 二直一曲三邊形, $q''QPp''$ 三直一曲四邊形, $q'QPp'$ 三直一曲四邊形, 俱等積."

"一系. Cp', Cq', Cr' 諸連比例數, 設命 $Cp'=1$, Cq', Cr' 任爲若干, $Pp'Qq'$, $Pp'Rr'$ 二段積必與 Cq', Cr' 之對數相符. 蓋 Cp', Cq', Cr' 旣成連比例,則所截各段面積, 必成遞加比例. 若 C 爲直角, Cp', Pp' 俱爲 1, Cq' 爲 10, Cr' 爲 100, 則 $Pp'Qq'$ 面積必爲 2.30258509, $Pp'Rr'$ 面積必爲 4.60517018, 此卽訥白爾表 10 與 100 之對數也."

"二系. 設於 Cr', PR 二線之間, 另作一雙曲線, 則所得對數根又變, 蓋一曲線一根數也."

"三系. C 角變,對數之根亦變. C 爲直角,正弦爲 1, 則爲訥白爾之對數根.設 C 爲 $25°44'27''\frac{15''}{60}$ 之角,正弦爲 0.43429448,則爲巴理知(Briggs)表之率,卽今所用對數表之根也."

李善蘭級數回求稱:"今有眞數求對數[訥白爾對數]之級數,問對數求眞數之級數若何?",

因 $\log_e x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots,$

或 $$y=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots. \qquad (A)$$

(A) 自乘之得

$$\begin{aligned}y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}&+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\&\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots\\&\qquad\frac{(x-1)^4}{3x^4}+\cdots\cdots\\&\qquad\qquad\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$y^2=\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{2(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots \qquad (B)$$

(A)×(B) 得

$$y^3=\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{3(x-1)^4}{2x^4}+\cdots\cdots. \qquad (C)$$

(A)×(C) 得

$$y^4=\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \qquad (D)$$

乃取 (B) 式, 2 約之得

$$\frac{y^2}{2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{2x^3}+\frac{11(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \tag{1}$$

(1)+(A), 得

$$y+\frac{y^2}{2}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^3}+\frac{17(x-1)^3}{24x^4}+\cdots. \tag{2}$$

又取 (C) 式 6 約之得

$$\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)^3}{6x^3}+\frac{3(x-1)^4}{12x^4}+\cdots\cdots. \tag*{(2)$_a$}$$

$(2)_a+(2)$, 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{23(x-1)^4}{24x^4}+\cdots. \tag{3}$$

又取 (D)24 約之得

$$\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)^4}{24x^4}+\cdots\cdots. \tag*{(3)$_a$}$$

$(3)_a+(3)$, 得

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{24}=\frac{(x-1)}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}$$

$$+\frac{(x-1)^4}{x^4}+\cdots\cdots. \tag{4}$$

$$=(x-1)$$

李善蘭曰:"攷(4)式左邊三級之分母爲2, 3相乘, 四級之母數爲2, 3, 4連乘, 然則五級必爲2, 3, 4, 5

連乘,六級必爲2,3,4,5,6連乘,其理已顯,無庸再求.右邊各母之係數消盡,其總數必與$x-1$等.乃左右各加一,卽得對數,求眞數之級數,…….”

$$x=1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

13. 數學啓蒙

(8) 數學啓蒙二卷,英國偉烈亞力撰,咸豐癸丑,1853自序.其卷二“對數”條,註稱:“對數乃大英訥白爾(Napier)創作,明萬曆時,播揚於世,凡西土之曆數家,莫不心悅誠服,是則是效焉.同時巴理知(Briggs)者,精純數理,亦英人也.特來訥白爾處參互考訂.以舊表浩繁,擬另立新表,歸於便宜敏捷.未幾訥白爾卒,惟巴理知自行改易.其眞數由一萬至二萬,又由九萬至十萬,對數以十四位止.崇禎十年(1624)付之剞劂,後四載(1628),又有荷蘭佛拉哥(Vlacq)出,將巴理知未及之二萬後以至九萬,均逐數補齊.凡一至十萬一千,毫無缺陷.因對數十四位尙繁,是以刪去四位存十位,卽在荷蘭復行刊刻,現中華通行之本,乃佛拉哥手訂之書也.”

其"造對數法之一"條,與數理精蘊,"用中比例求假數法"相同.又"造對數法之二"置定數 $(2\mu)=0.868588964$.又設眞數3,求假數問得幾何.

因 $\log 2=0.301029995$, 又

$$\log\frac{N}{2}=0.868588964\left\{\frac{1}{2N-1}+\frac{1}{(2N-1)^3}+\frac{1}{(2N-1)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

如 $N=3$,

$$\therefore\quad \log\frac{3}{2}=0.176091260$$

$$\log 2=0.301029995$$

$$\therefore\quad \log 3=0.477121255.$$ 此卽三角數理 (1877) 卷六第三十四款之法.

14. 乘方捷術

(9) 鄒伯奇 (1819－1869) 乘方捷術共三卷,其卷二稱:"對數者,設假數與眞數相對立爲表,以備加減代乘除之用,故名對數表.創自西人訥白爾,其初爲表也,以眞數開九乘方極多次所得方根零數,卽爲對數,故名自然對數.今西書稱爲訥表對數.[卽戴氏

所謂假設對數〕. 後有佛拉哥(Vlacq)以訥表對數十之對數是2.302585不便進位,乃改十之對數爲一,百之對數爲二,……是爲十進對數,始刻於荷蘭,乃流入中國,即今數理精蘊之十萬對數表是也.〔即戴氏所稱定率對數〕." 按此節所記,雖於對數發明之歷史,未深通曉,其言佛拉哥蓋出於偉烈亞力之數學啓蒙. 乘方捷術不題著作年月. 憑此記事,可知其在咸豐癸丑(1853)後矣.

乘方捷術卷一,舉四例并以開方勾股解之,如:

(1) (2), $N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$\mp\frac{m-2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}\mp\cdots\cdots.$$

(3) (4), $N^{\frac{m}{n}}=(P\pm Q)^{\frac{m}{n}}$

$$=P^{\frac{m}{n}}\pm\frac{m}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$\pm\frac{m+2n}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3n}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}\pm\cdots\cdots.$$

例 (1), $(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}+\cdots\cdots.$$

(2), $$(b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{b^2}-\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$-\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{b^2}-\cdots\cdots.$$

(3), $$(c^2)^{\frac{1}{2}}=(b^2+a^2)^{\frac{1}{2}}=b+\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}+\cdots\cdots.$$

(4), $$(b^2)^{\frac{1}{2}}=(c^2-a^2)^{\frac{1}{2}}=c-\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{a^2}{c^2}+\frac{3}{4}\cdot B\cdot\frac{a^2}{c^2}-\frac{5}{6}\cdot C\cdot\frac{a^2}{c^2}$$

$$+\frac{7}{8}\cdot D\cdot\frac{a^2}{c^2}-\cdots\cdots.$$

又"以二爲實,開無量數乘方之根",

從第一術,$m=1$, n 爲極大時,則 $n+1$, 與 n, 約略相等, $2n+1$ 與 $2n$, $3n+1$ 與 $3n$ 等, 亦約略相等,故

$$2^{\frac{1}{n}}=(1+1)^{\frac{1}{n}}=1+1.\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots\cdots.$$

如 $n=2$, 則 $\log_e 2=0.6931471805599463$8. 是也.

卷二記"有大小兩異數,求對數較法",先具三術,如:

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{m}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=\mu\left\{\left(\frac{m-n}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\log_{10}\frac{m}{n}=\mu\log_e\frac{m}{n}$$

$$=2\mu\left\{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^7+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

其求對數較第四術註稱:"此又於前三術,連求三數之較",

設 $\frac{m+n}{2}=t$, 而 $m>t>n$

則 $\log_e\frac{t}{n}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$,

$$\log_e\frac{m}{t}=\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^4+\cdots\cdots\Big\},$$

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^5+\cdots\cdots\right\},$$

$$\log_e\frac{t^2}{mn}=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m-n}{2t}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{m-n}{2t}\right)^6+\cdots\cdots\right\}.$$

又如"有對數較,求大小兩眞數之比例",

$$\frac{m}{n}=1+\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{m}=1-\log_e\frac{m}{n}+\frac{1}{1\cdot2}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^2-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(\log_e\frac{m}{n}\right)^3+\cdots\cdots.$$

其所求自然對數,常對數,具列如下:

自然對數表	
眞數	假數
1	0.00000000000
2	0.69314718056
3	1.09861228866
4	1.38629436112
5	1.60943791242
6	1.79175946922

常對數表	
眞數	假數
1	0.000000000
2	0.301029996
3	0.477121255
4	0.602059991
5	0.698970004
6	0.778151250

7	1.94591014904
8	2.07944154168
9	2.19722457732
10	2.30258509299

7	0.845098040
8	0.903089987
9	0.954242509
10	1.000000000

15. 算牘續編，造各表簡法

10. 顧觀光 (1799—1862) 算牘續編有 (1) 用屢乘屢除求對數法 (1854), (2) 對數還原 (1854), (3) 對數衍 (1854).

先求定率對數；

$$(a)\quad 2\mu=1\div 2\left\{\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}$$

$=0.86858896380$ 爲定率對數，而 $\mu=$ 對數根

$$(b)\quad 2\mu=1^2\div 10\left\{\left(1+\frac{1}{3\times 9}+\frac{1}{5\times 9^2}+\frac{1}{7\times 9^3}+\frac{1}{9\times 9^4}+\frac{1}{11\times 9^5}+\frac{1}{13\times 9^6}+\frac{1}{15\times 9^7}+\frac{1}{17\times 9^8}+\frac{1}{19\times 9^9}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\times 9^3}+\frac{1}{5\times 9^5}+\frac{1}{7\times 9^9}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

$=0.868588996380.$

既得定率對數,卽可求二至九之八對數.

因 $\frac{1}{\log_e 10}=0.43429448$, $\therefore$ $\log_{10}n=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e n$

$$=0.43429448\times\log_e n.$$

已知 $\log 10=1$,

又 $$\mu\log_e 10=\mu\log_e 9+2\mu\left\{\frac{1}{2\times9+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2\times9+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2\times9+1}\right)^5+\cdots\right\}.$$

則 $\log 10=\log 9+0.04575749056$, $\therefore$ $\log 9=0.95424250944$.

同理可求八至二之各數對數.既得二至九之八對數,則餘皆可推.

(顧觀光第一術)與夏鸞翔萬象一原(1862)第一術,及代數術(1873)第一七一款所述相同.

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

或 $$\log(n+x)=\log n+2\mu\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r.$$

例， $\log 23=\log(20+3)$

$$=\log 20+2\mu\left\{\frac{3}{43}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{43}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{43}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.36172783601.$$

(顧觀光第二術)與徐有壬造各表簡法(1859?)及代微積拾級(1859)相同. 顧氏自言本數學啓蒙(1853)之術而小變之.

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

或 $$\log\frac{m}{n}=2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\}=P.$$

例， $$\log 23=\log 30-2\mu\left\{\frac{7}{53}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{53}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{7}{53}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.36172783601.$$

(顧觀光第三術)似本之戴煦續對數簡法(1846), "以本數爲積, 求折小各率,第一術." 亦可由鄒伯奇,乘方捷術(1)式化得.

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left\{\frac{x}{n+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n+x}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n+x}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r$$

例，

$$\log 23=\log 20+\mu\left\{\frac{3}{23}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{23}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{23}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{23}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1.361727\cdots\cdots.$$

(顧觀光第四術)似本之戴煦續對數簡法(1846)，"以本數爲積，求折小各率，第二術."亦可由鄒伯奇乘方捷術(2)式化得，又與微積溯源第四十二款相同.

$$\log(n+x)=\log n+\mu\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\log n+r$$

(顧觀光第五術)與李善蘭對數探源及鄒伯奇乘方捷術(1)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{m}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m}\right)+\cdots\cdots\right\}=p.$$

(顧觀光第六術)與鄒伯奇乘方捷術(2)式相同.

$$\log\frac{m}{n}=\mu\left\{\frac{m-n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{m-n}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{n}\right)-\cdots\cdots\right\}=p.$$

其"對數還原",因令1= 正數, $10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$,

$$\log_{10} 1.258925411=\frac{1}{10}, \text{ 又 } 10^{\frac{1}{10}}=1.25892541$$

$$=1+t,$$

$\frac{t}{1+t}=2.05671776$ 爲正數根,設 $\log s=1\ 36172783602$

求其正數.

(第一術) 如前第一術, $r=0.060697840\frac{36}{}$, 又 $s=n+x$

$$s=n\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)r+\frac{1}{\underline{|2}}.\left(\frac{t}{t+1}\right)^2.r.(r+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3.r.(r+1)(r+2)$$

$$\left.+\frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4.r.(r+1)(r+2)(r+3)+\cdots\right\}$$

(第二術)

$$s=n\left\{1+t\,r\mp\frac{1}{\underline{|2}}.t^2.r(1-r)+\frac{1}{\underline{|3}}.t^3.r(1-r)(2-r)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\underline{|4}}t^4.r(1-r)(2-r)(3-r)+\cdots\cdots\right\}$$

(第三術) 又令 $s=m-n$, 如前第二術, $p=0.115393418\frac{70}{}$

$$s=m\div\left\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)p+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 p.(p+1)\right.$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3.p.(p+1)(p+2)$$

$$+\frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4.p.(p+1)(p+2)(p+3)+\cdots\cdots\Bigg\}$$

(第四術)

$$s=m\div\Bigg\{1+10\,t.\,p-\frac{1}{\underline{|2}}.p^2.\,10\,t\,(1-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}p^3.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)$$

$$+\frac{1}{\underline{|4}}.\,p^4.\,10\,t\,(1-10\,t)\,(2-10\,t)\,(3-10\,t)+\cdots\Bigg\}$$

又"對數術"則示各對數互求之例.

(1) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log 19=\log n=?$

如前第二術,得 $\log n=1.278753601$.

(2) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$, 求 $\log 23=\log m=?$

如前第二術,得 $\log m=1.361727836$.

(3) 有 $\log 23=\log m=1.361727836$, 求 $\log n=1.27875601=?$

$\log m-\log n=d$,

$$n=m\div\Bigg\{1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2d(d+1)$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3d(a+1)(d+2)+\cdots\cdots\Bigg\}$$

或 $n=m\times\frac{1}{y}$.

(4) 有 $\log 19=\log n=1.278753601$;

求 $\log m=1.361727836=?$

如前 $n=m\times\frac{1}{\gamma}$, 故 $m=n\gamma$.

(5) 有 $\log m=1.568201724$, $\log n=1.361727836$,

又 $m+n=w$, 求 n.?

由前兩式, 得 $n=\frac{w}{1+\gamma}$.

故 $$n=m\div\left\{1+\left[1+\left(\frac{t}{t+1}\right)d+\frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 d(d+1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3 d(d+1)(d+2)+\cdots\cdots\right]\right\}$$

(6) 有 $\log m=1.568201724$, $\log n=1.361727836$,

又 $m-n=V$ 求 n?

由 (3), (4) 兩式, 得 $n=\frac{V}{\gamma-1}$.

(7) 有 $\log 37=\log m=p$, $\log 23=\log n=Q$,

$$T=P+Q=2.92992956, \text{ 求 } P?$$

如前第一術,

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore$ $\log 37=2-0.43179828$. $\log 23=T-\log 37$.

(8) 有 P, Q, 及 $U=P-Q$, 求 P?

如前第一術,

$$\log\frac{100}{37}=\log 100-\log 37=2\mu\left\{\frac{100-37}{100+37}+\frac{1}{3}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{100-37}{100+37}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore\quad \log 37=2-0.43179828.\quad \log 23=\log 37-U.$

(11) 造各表簡法

徐有壬(1800—1860)造各表簡法,又名垜積招差.其"第五術造對數全表"稱:"先求對數根,設長三闊一之長方積,取十分之一爲第一小長方,[長折半,闊十分之二],其長闊和一除之爲第一數:十分小長方之一爲第二小長方,[長又折半,闊又十分之二],其長闊和二除之,爲第二數,……順是以下,皆如是遞求,至若干位,乃相併爲除法,以除單一得對數根."

$$\mu=1\div\left\{\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2^2}+\frac{2^2}{10^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2^3}+\frac{2^3}{10^3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{2^4}+\frac{2^4}{10^4}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1\div\left\{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)+\frac{2}{10}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{10}\right)^2\right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^8+\cdots\cdots\Big\}$$

$$=1\div2.30258509299404577=0.434294481903258\underline{11}$$

求全表術則因下列公式:

$$\log\frac{m}{n}=2\mu\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

求 $\log n$, 或 $\log m$ 焉.

按偉烈亞力於咸豐己未(1859)代微積拾級序稱:"覩當代天算家,如董方立氏,項梅侶氏,徐君青氏,戴鄂士氏,顧尙之氏,暨李君秋紉所著各書,其理有甚近於微分者……,"此大約指各人用級數記圓周率數及對數而發,徐卒於庚申(1860),則造各表簡法當成於己未前矣.

16. 代數學,萬象一原

(12) 代數學十三卷,題英國棣麼甘撰,英國偉烈亞力口譯.海寧李善蘭筆受.前有偉烈咸豐己未(1859)自序.卷第十二"論指數對數之級數"謂:

$x^x=y$, 則 $\log_a y=x$, 而 a 爲底, x 爲 a^x 之對數

又謂(1)無論何底,1之對數恆爲0,如 $a^0=1$, 則 $\log_a 1=0$.

(2)凡底之對數爲1, $a^1=a$, 則 $\log_a a=1$

(3) 凡 y 與 $\frac{1}{y}$ 之對數,號異而數同.

如 $$y=a^x,\ 則\ \log_a y=x$$

又 $$\frac{1}{y}=a^{-x},\ 則\ \log_a \frac{1}{y}=-x.$$

故 $$\log_a \frac{1}{y}=-\log_a y.$$

次論"對數之級數理",因從卷十一,依合名法 (binomial theorem).

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}$$

設 $x=1$, 則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

惟 $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$$

則 $$\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)^{x}$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

若n爲極大,則上式變爲

$$\left(1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\right)^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

即 $$\left(2.71828182\cdots\cdots\right)^x=e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

若以e爲底,則對數x之眞數爲$1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$

此謂之自然之對數,亦命爲雙曲線之對數.

上式旣合於理,則$e^{kx}=1+kx+\frac{k^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{k^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$

令 $e^k=a$, 則 $k=\log_e a$.

即 $$a^x=1+x\log_e a+\frac{(x.\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{(x.\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$.

但從卷十一知

$$\frac{(1+a)^x-1}{x}=a+\frac{x-1}{\lfloor 2}.a^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\lfloor 3}.a^3+\cdots\cdots.$$

若x爲極小,則

$$\frac{(1+a)^x-1}{x}=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\cdots\cdots.$$

令 $a=a-1$,

則 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots.$$

從此知,

$$\log_e a=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots.$$

由此得,

$$\log_e(1+m)=\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{1}$$

$$\log_e(1-m)=\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\cdots\cdots\right\} \tag{2}$$

$$\log_e\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=2\left\{m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\cdots\cdots\right\} \tag{3}$$

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right\} \tag{4}$$

按前二式與續對數簡法同,第(1)式又與顧觀光第四術同,四式又見對數詳解(1824)第四條(1),(2),(3),及第五條(1)$_c$.依此造對數表小數八位.

再從卷十一知

$$\frac{(1+a)^x-1}{x}=a+\frac{x-1}{\lfloor 2}.a^2+\frac{(x-1)(x-2)}{\lfloor 3}.a^3+\cdots\cdots$$

又 $$\frac{a^x-1}{x}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots\cdots$$

又令 $a^m=a$, 則

$$\frac{a^{mx}-1}{x}=m.\frac{a^{mx}-1}{mn}.$$

設 m 爲定數，n 爲極小，則 mx 更當極小．故若 x 爲極小，而 x 之函數之極限爲 N，則 mx 函數之極限亦必爲 N．其不同者，可取 x 之小，令 x 之函數，任近於所設之限 N，命其較爲 k，而取 m 分 x 同數之一，則可令 mx 之函數同近於 N．所以

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{a^{mx}-1}{mx},\quad 即\ f(a)=\frac{1}{m}f(a^m).$$

即 $$(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots\cdots=\frac{1}{m}\left\{(a^m-1)-\frac{1}{2}(a^m-1)^2+\cdots\right\}$$

即 $$\log_e a=\frac{1}{m}\log_e a^m.$$

觀此更明 $\frac{a^x-1}{x}$ 之限，等於 $\log_e a=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\cdots$

即 $\log_e a=\frac{a^x-1}{x}$，古人用此理，遞開 a 之方數，以造對數表．如 $a=1.204, x=\frac{1}{2}^{47}$, $\log_e 1.024=(1.024^{\frac{1}{2}^{47}}-1)\times 2^{47}$ 是也．[28]

卷十三論以10爲底之對數，謂

$$\log_{10}x=\frac{\log_e x}{\log_e 10}=\frac{\log_e x}{2.30258509}=0.4342944819\times\log_e x.$$

此對數表名爲常對數，亦名爲表對數，亦名爲十進對數，亦名爲巴理知對數．以0.43429……爲其根率．凡

(28) 見前數理精蘊(c)(d).

$\frac{1}{\log_e a}$ 卽 $\log_a e$ 名爲 a 底對數之根率.

同卷論對數較之原則,從前(4)式

$$\log_{10}(x+1)=\log_{10}x+2\mu\left\{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x+1)^3}+\cdots\cdots\right\}$$

如 x 愈大,則 $\log_{10}(x+1)$, $\log_{10}x$ 之較愈小.

又檢表知 $\log_{10}(51520+1)=\log_{10}51520+0.0000084.$

$$\log_{10}(51520+2)=\log_{10}51520+0.0000084\times 2.$$

卽 $h<10$, 則

$$\log_{10}(51520+h)=\log_{10}51520$$
$$+0.0000084\times h\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

從前(1)式,

$$\log_{10}\left(1+\frac{h}{x}\right)=\mu\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

若 $\frac{h}{x}$ 甚小,則 $\log(x+h)=\log x+\mu\frac{h}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

(b)式與(a)式比較, $0.0000084=\mu\cdot\frac{1}{x}=0.4342945\times\frac{1}{51520}$ 是也.

(13) 萬象一原

同治元年壬戌(1862)錢塘夏鸞翔演萬象一原.其第一卷末有"求眞數之訥氏對數"註謂[本徐氏(有壬)中國對數術變通之].今按其公式術語且有誤記.所

載二式:

$$\log_e(n+x)=\log_e n+2\left\{\frac{x}{2n+x}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\log_e(n-x)=\log_e n+2\left\{-\frac{x}{2n+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(2n+x)^3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{(2n+x)^5}-\cdots\cdots\right\}$$

與顧觀光有正數求對數第一術(1854)相同.

又有"求眞數之訥氏負對數",其術語亦有誤記.按戴煦假數測圓卷上有"求負對數二術",蓋求不滿單一之眞數,如 log 0.98 者;夏之所取,蓋亦其義.今取小於眞數 $(n+x)$ 之借眞數爲 t,大於眞數 $(n+x)$ 之借眞數常爲1.故應書爲:

$$\log_e(n+x)=\log(1-t)=\log_e 1+2\left\{-\frac{t}{2-t}-\frac{1}{3}\left(\frac{t}{2-t}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{t}{2-t}\right)^5-\cdots\cdots\right\}$$

17. 代數術,對數詳解

(14) 代數術二十五卷,英國華里司輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第十八卷第一六八款至一

七八款論對數.前有同治十二年(1873)華蘅芳序.書刻於同治十三年(1874).[29]

(15) 對數詳解五卷,長沙丁取忠,湘鄉曾紀鴻同撰,同治甲戌(1874)丁取忠序.是書卽代數術第十八卷之詳解.

卷二,第三條,謂: $c^x=y$, 已知 c, y 求 x. $x=\log_c y$.

設 $$c=1+a \cdots\cdots(1)$$

$$y=1+b \cdots\cdots(2)$$

則 $c^x=y$ 之式變爲 $$(1+a)^x=(1+b) \cdots\cdots(3)$$

兩邊各乘至 n 方 $$(1+a)^{nx}=(1+b)^n \cdots\cdots(4)$$

以二項式展開之

$$1+\frac{nx}{1}\cdot a+\frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot a^2+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot a^3 +\frac{nx(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\lfloor 4}a^4+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot b+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}b^3 +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cdot b^4+\cdots\cdots \qquad (5)$$

兩邊減1又除 n, 得

---

(29) 見江南製造局記,卷二,第十九頁.

$$x\cdot a+\frac{x(nx-1)}{\underline{|2}}\cdot a^2+\frac{x(nx-1)(nx-2)}{\underline{|3}}\cdot a^3$$

$$+\frac{x(nx-1)(nx-2)(nx-3)}{\underline{|4}}\cdot a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\frac{(n-1)}{\underline{|2}}\cdot b^2+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot b^3+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cdot b^4$$

$$+\cdots\cdots \qquad (6)$$

化之得:

$$x\cdot a+\left(Pn-\frac{x}{2}\right)a^2+\left(P'n+Q\,n^2+\frac{x}{3}\right)a^3$$

$$+\left(P''n+Q'n^2+Rn^3-\frac{x}{4}\right)a^4+\cdots\cdots$$

$$=b+\left(pn-\frac{1}{2}\right)b^2+\left(p'n+qn^2+\frac{1}{3}\right)b^3$$

$$+\left(p''n+q'n^2+rn^3-\frac{1}{4}\right)b^4+\cdots\cdots \qquad (7)$$

變之得:

$$\left\{x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}a^3-\frac{x}{4}a^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$+\left\{Pna^2+\left(P'n+Qn^2\right)a^3+\left(P''n+Q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+Rn^3\right)a^4+\cdots\cdots\right\}=\left\{b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}+\left\{pnb^2+\left(p'n+qn^2\right)b^3+\left(p''n+q'n^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+rn^3\right)b^4+\cdots\cdots\right\}. \qquad (8)$$

前(3)式以乘n方者，爲借用以展開級數，今旣展開矣，

試令$n=0$，則

$$x\cdot a-\frac{x}{2}a^2+\frac{x}{3}\cdot a^3-\frac{x}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots=b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \tag{9}$$

變之得

$$x\left(a-\frac{1}{2}\cdot a^2+\frac{1}{3}\cdot a^3+\frac{1}{4}\cdot a^4+\cdots\cdots\right)=b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots. \tag{10}$$

兩邊各以 $\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)$ 除之，得

$$x=\log_e y=\left(b-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{3}b^3-\frac{1}{4}b^4+\cdots\cdots\right)\times\frac{1}{\left(a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots\right)}.$$

因$c=1+a$，故$a=c-1$，(10)式左邊變爲

$$x\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

前言c爲對數之底，總不變，故

$$\left\{(c-1)-\frac{1}{2}(c-1)^2+\frac{1}{3}(c-1)^3-\frac{1}{4}(c-1)^4+\cdots\cdots\right\}$$

亦不變,是爲常數,以 A 代之,故 (10) 式左邊變爲 Ax.

惟因 $y=1+b$, 故 $b=y-1$, 所以 (10) 式右邊變爲

$$(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots$$

故 $$Ax=(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3-\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots. \tag{12}$$

或 $$x=\frac{1}{A}\left\{(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\frac{1}{3}(y-1)^3+\frac{1}{4}(y-1)^4+\cdots\cdots\right\} \tag{13}$$

$$=\log_e y.$$

用 (13) 式亦可求眞數之對數,惟其眞數 y 必大於 1, 而小於 2 方可求. 若 $y<2$, 則級數之收斂甚遲, 兹另變其式, 令斂得較速.

第四條. (13) 式變之得

$$\log(1+m)=\frac{1}{A}\left\{m-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4+\cdots\cdots\right\}. \tag{1}$$

若令 $-m=m$, (1) 式變爲

$$\log(1-m)=\frac{1}{A}\left\{-m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{4}m^4-\cdots\cdots\right\}. \tag{2}$$

惟 $$\log(1+m)-\log(1-m)=\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)$$

(1)−(2), 又簡之得

$$\log\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=\frac{2}{A}\left(m+\frac{m^3}{3}+\frac{m^5}{5}+\frac{m^7}{7}+\cdots\cdots\right). \tag{3}$$

令 $\frac{1+m}{1-m}=y$, 則 $m=\frac{y-1}{y+1}$,

故 $$\log y=\frac{1}{A}\left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^7+\cdots\cdots\right\}. \tag{4}$$

此式無論 y 之同數如何,必爲斂級數,凡對數皆可求,故此爲公式.

第五條. 若已知 $\log n$, 求 $\log(n+x)$

因 $\log(n+x)-\log n=\log\frac{n+x}{n}$.

以 $\frac{n+x}{n}=y$ 代入上條(4)式,則 $\frac{y-1}{y+1}=\frac{x}{2n+x}$.

故 $$\log\frac{n+x}{n}=\log(n+x)-\log n=\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\}$$

卽 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{2x}{2n+x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x^3}{(2n+x)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2x^5}{(2n+x)^5}+\cdots\cdots\right\} \tag{1}$$

合前第三條(13)式,第四條(4)式,第五條(1)式觀之,其

右邊皆有 $\frac{1}{A}$. 是知 $\frac{1}{A}$ 爲對數底 c 之所生. 底不變, $\frac{1}{A}$ 亦不變, 是爲常數, 稱爲對數之根.

卷三, 第六條, 謂 $A=1$, 即 $\frac{1}{A}=1$, 則此對數爲訥對.

卷四, 第九條, 謂 $c^x=y$, 已知 c, x 求 y.

令 $$c=1+a \tag{1}$$

則 $$y=(1+a)^x \tag{2}$$

$$=\left[(1+a)^n\right]^{\frac{x}{n}} \tag{3}$$

因 $$(1+a)^n=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n(n-1)}{\underline{\lvert 2}}\cdot a^2+\frac{n(n-1)(n+2)}{\underline{\lvert 3}}\cdot a^3+\cdots\cdots \tag{4}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\frac{n^2-n}{\underline{\lvert 2}}\cdot a^2+\frac{n^3-3n^2+2n}{\underline{\lvert 3}}\cdot a^3+\cdots\cdots. \tag{5}$$

$$=1+\frac{n}{1}\cdot a+\left[\frac{n^2}{\underline{\lvert 2}}\cdot a^2-\frac{n}{\underline{\lvert 2}}\cdot a^2\right]+\left[\frac{n^3}{\underline{\lvert 3}}\cdot a^3-\frac{3n^2}{\underline{\lvert 3}}\cdot a^3+\frac{2n}{\underline{\lvert 3}}\cdot a^3\right]+\cdots\cdots. \tag{6}$$

$$=1+\frac{a}{1}\cdot n+\left[\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n^2-\frac{a^2}{1\cdot 2}\cdot n\right]+\left[\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot n^3-\frac{a^3}{1\cdot 2}\cdot n^2+\frac{a^3}{1\cdot 3}n\right]+\cdots\cdots. \tag{7}$$

$$=1+a\cdot n+\left(\frac{a^2}{2}\right)n^2-\left(\frac{a^2}{2}\right)n+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right)n^3+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2}\right)n^2$$

$$+\left(\frac{a^3}{1\cdot 3}\right)n+\cdots\cdots. \tag{8}$$

$$=1+\left(a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots\right)n+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{2}+\cdots\cdots\right)n^2+\left(\frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots\cdots\right)n^3+\cdots. \tag{9}$$

$$=1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots. \tag{10}$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\cdots\cdots. \tag{11}$$

故 $$y=(1+An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^{\frac{x}{n}} \tag{12}$$

$$=1+\frac{x}{n}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)}{1\cdot 2}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^2+\frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n}-1\right)\left(\frac{x}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots. \tag{13}$$

即 $$y=1+\frac{x}{n}\left(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots\right)+\frac{x(x-n)}{1\cdot 2\cdot n^2}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^2+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}(An+Bn^2+Cn^3+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots \tag{14}$$

$$=1+\frac{x}{1}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)+\frac{x(x-n)}{1\cdot2}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^2$$

$$+\frac{x(x-n)(x-2n)}{1\cdot2\cdot3}(A+Bn+Cn^2+\cdots\cdots)^3+\cdots\cdots \qquad (15)$$

令 $n=0$,

則 $$y=c^x=1+\frac{x}{1}A+\frac{x^2}{1\cdot2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}A^3+\cdots\cdots \qquad (16)$$

而 $$A=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}\cdots\cdots \qquad (17)$$

$$=(c-1)-\frac{(c-1)^2}{2}+\frac{(c-1)^3}{3}-\frac{(c-1)^4}{4}+\cdots\cdots$$

旣已明 A 之同數爲底之訥對．又知 x 爲對數，[卽底 c 之指數]，若干．用 (16) 式右邊級數求之，可識 y [卽眞數] 之同數．如 $c^x=y$ 中 $x=1$

則 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot2}+\frac{A^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots \qquad (18)$$

如令 $x=\frac{1}{A}$，則 $c^x=y$ 爲 $y=c^{\frac{1}{A}}$，而 (16) 式變爲

$$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$$

$$=2.718281828459045235360288\cdots\cdots \qquad (19)$$

$$=e$$

即 $c^{\frac{1}{A}}=e$, 或 $c=e^{A}$

惟因 A 爲 c 之訥對,故知 e 爲訥對數之底.與常對數以10爲底不同也.

卷四第十條, $x=\log_c y$, 則 $c^x=y$, 變爲 $c^{\log y}=y$.

或 $$c^{n\log y}=y^n. \tag{1}$$

今有 $c^{\frac{1}{A}}=e$ 之式, 則 $$\log c^{\frac{1}{A}}=\log e \tag{2}$$

從(1)式, $$(c)^{\frac{1}{A}\log c}=c^{\frac{1}{A}}. \tag{3}$$

$$\frac{1}{A}\log c=\log c^{\frac{1}{A}}. \tag{4}$$

又從(2)式, $$\frac{1}{A}\log c=\log e \tag{5}$$

兩邊乘 A, 得 $$\log c=A\log e \tag{6}$$

兩邊除 $\log e$, $$A=\frac{\log c}{\log e} \tag{7}$$

代入第九條之(16)式,則

$$c^x=y=1+\frac{x}{1}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)+\frac{x^2}{1\cdot2}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{\log c}{\log e}\right)^3+\cdots\cdots \tag{8}$$

設 $c=e$, 則

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots \tag{9}$$

如已知 $\log_{10} y=x$ 之數，求 y.

於 (8)，因 $\log c=\log 10=1$

又 $$\log c=\frac{1}{A}=0.43429\cdots\cdots11289.$$ 代入得之.

由是得下開常對數表各數.

常對數表	
眞數	對數
1	0.0000000000000000000000
2	0.3010299956639811952112 1
3	0.4771212547196524417769 1
4	0.6020599913279623904224 2
5	0.6989700043360188047887 9
6	0.7781512503836336369881 2
7	0.8450980400142468351802 8
8	0.9542425094393048835538 2
10	1.0000000000000000000000

18. 微積溯源，對數表，對數述

(16) 微積溯源八卷，英國華里司輯，英國傅蘭雅

口譯,金匱華蘅芳筆述.同治十三年(1874)刻.[30] 其第三十五款至第四十二款證得

$$y=c^x=1+\frac{x}{1}\cdot A+\frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot A^2+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot A^3+\cdots\cdots$$

又 $$y=1+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{1\cdot 2}+\frac{A^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

及 $$c^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2.71828\cdots\cdots=e$$

$$e^x=y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots$$

并 $$\log(n+x)=\log n+\frac{1}{A}\left\{\frac{x}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

(17) 對數表四卷四册,賈步緯校,江南製造局印.

(18) 對數表一册,附八線對數表,八線表.美國路密司撰,赫士譯,高密,朱葆琛筆述.

(19) 對數述四卷,陳其晉撰(1877),其卷一卷二引徐有壬,李善蘭,顧觀光,及西人代數學,代微積拾級論對數之說

19. 三角數理,對數表引說,用對數表訣,造對數法

(30) 見江南製造局記

(20) 三角數理十二卷,英國海麻士輯,傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述,第六卷專論對數.(31) 光緒三年(1877)刻.(32) 書中第二十五款至三十四款"論指數及指數之對數".

第二十五款. 因 $x=0$, 則 $a^x=1$,

又因 $$a=1+(a-1)$$

$$\therefore \quad a^x=[1+(a-1)]^x$$

$$=1+x(a-1)+x(x-1)\frac{(a-1)^2}{1\cdot 2}+x(x-1)(x-2)\frac{(a-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

$$=1+\left\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots\right\}x+\cdots\cdots$$

令 $a^x=1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\cdots\cdots$ 爲 x 之倍數,p_2, p_3, …… 爲 x 他方之倍數,x 無論爲何值均合.

又因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, 於上級數中,一令 $x=y$, 一令 $x=x+y$,

---

(31) 見繙譯館編江南製造局譯書提要卷二,第三三,三四頁.

(32) 見江南製造局記卷二,第二十九頁.

則得 $a^y=1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots$

又 $a^{x+y}=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$

因 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$,

則 $(1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots\cdots)(1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3+\cdots\cdots)$

$$=1+p_1(x+y)+p_2(x+y)^2+p_3(x+y)^3+\cdots\cdots$$

展開之,消去 y,得

$$p_1+p_1^2x+p_1p_2x^2+p_1p_3x^3+\cdots\cdots$$

$$=p_1+2p_2x+3p_3x^2+4p_4x^3+\cdots\cdots$$

故 $2p_2=p_1^2,\ 3p_3=p_1p_2,\ 4p_4=p_1p_3,\cdots\cdots$

$\therefore$ $p_2=\frac{p_1^2}{1\cdot2},\ p_3=\frac{p_1^3}{1\cdot2\cdot3},\ p_4=\frac{p_1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4},\ \cdots\cdots$

代入得,$a^x=1+p_1x+\frac{p_1^2}{1\cdot2}x^2+\frac{p_1^3}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{p_1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4+\cdots\cdots$

而 $p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\frac{1}{4}(a-1)^4+\cdots\cdots$

第二十六款. 於上式,令 $p_1x=1$,即 $x=\frac{1}{p_1}$,

則 $a^{\frac{1}{p_1}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots$

令 $a^{\frac{1}{p_1}}=e$,則 $a=e^{p_1}$,而 $\log_e a=p_1$.

$\therefore$ $a^x=1+x(\log_e a)+\frac{x^2}{1\cdot2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}(\log_e a)^3+\cdots\cdots$

上式令 $a=e$, 因 $\log_e a=\log_e e=1$,

$$\therefore \qquad e^x=1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

又 $$\log_e a=p_1=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3=\cdots\cdots. \qquad (2)$$

以 n 代 a, 則

$$\log_e n=(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots$$

又從第六款知有 e 底之對數表, 欲變之爲 a 底之對數表, 只須以常乘數 $\frac{1}{\log_e a}$ 乘之卽得, 故

$$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\log_e n.$$

則 $$\log_a n=\frac{1}{\log_e a}\cdot\left\{(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{3}(n-1)^3-\cdots\cdots\right\}$$

上式如 $n>2$, 則爲發級數, 惟有數種巧法, 能變其形, 使爲斂級數.

第二十七款. 證 $e=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$ 爲無盡之數.

因 $$\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=1<1,$$

則 $\quad 3>e>2.$

設 e 等於可通約之數 $\frac{m}{n}$, 則

$$\frac{m}{n}=2+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots$$

兩邊以$\underline{|n}$乘之，則$m\,\underline{|n-1}=N+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$+\cdots\cdots$$

而N爲整數，惟$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}$$

$$+\cdots\cdots<\frac{1}{n}.$$

則可知若將小於$\frac{1}{n}$之分數與N相加，而云其和必可爲整數，則於理不合也．所以知e必爲無盡之數．

$$e=2+0.5+0.199999+0.041666+0.008333+0.001388+\cdots\cdots$$
$$=2.7182818.$$

第二十八款．"求對數級數$\log_a(1+x)$之値"．

$\log_a x$不能化爲有$A+Bx+Cx^2+\cdots\cdots$之形．因令$x=0$，則$\log_e x$變爲無窮故也．惟$\log_a(1+x)$則能變得此形之級數，因$x=0$時，其式亦能爲0，所以其式中不能有不與x相關之項，又不能有x之負方之項，則得(1)式如下：

$$\log_a(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots$$

若令 $x=x+y$, 則得

$\log_a(1+x+y)=A(x+y)+B(x+y)^2+C(x+y)^3+\cdots\cdots$, 此為 $\log_a(1+x+y)$ 之第一式, 惟因

$$1+x+y=(1+x)\left(1+\frac{y}{1+x}\right),$$

故 $$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\log_a\left(1+\frac{y}{1+x}\right).$$

若於(1)式, 令 $x=\frac{y}{1+x}$, 則得

$$\log_a(1+x+y)=\log_a(1+x)+\frac{Ay}{1+x}+\frac{By^2}{(1+x)^2}+\frac{Cy^2}{(1+x)^3}+\cdots,$$

此為 $\log_a(1+x+y)$ 之第二式. 因兩式中 y 之係數必相等,

即 $$A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\cdots\cdots=\frac{A}{1+x}.$$

兩邊各乘 $(1+x)$, 又化之得

$$(A+2B)x+(2B+3C)x^2+(3C+4D)x^3+\cdots\cdots=0.$$

因 x 為未定之數, 故可令 $A+2B=0, 2B+3C=0, 3C+4D=0,\cdots\cdots$

則 $$B=-\frac{1}{2}A,\ C=\frac{1}{3}A,\ D=-\frac{1}{4}A,\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_a(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$$

如令 $1+x=a$, 則

$$\log_a a = 1 = A\left\{(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= A \log_e a.$$

$$\therefore \quad \log_a(1+x) = \frac{1}{\log_e a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots\right).$$

第二十九款. "又法證上款之結果".

因 $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = A\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \cdots\cdots\right)$, 如 $x=0$,

則 $$A = \frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

若令 $x = \dfrac{1}{n}$, 則 $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = n \log_a\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$$= \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

惟因 $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$$

$$= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3n}\right) + \cdots$$

若令 $n = \infty$, 則 $x = 0$. 而式之右邊爲 e 之同數.

$2 + \dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{1}{\underline{|3}} + \dfrac{1}{\underline{|4}} + \cdots\cdots$,由第六款知 $A = \log_a e = \dfrac{1}{\log_e a}$.

$$\therefore \quad \log_a(1+x) = \frac{1}{\log_e a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots\right)$$

又若令 $a = e$, 即得 $\log_e a = \log_e e = 1$

則 $$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

第三十款. "對數較之原則".

如 $$\log_{10}(n+d)-\log_{10}n=\log_{10}\left(1+\frac{d}{n}\right)=\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}+\frac{d^2}{3n^2}-\cdots\cdots\right)=\mu\frac{d}{n}.$$

此因 n 爲大數, d 爲小數, 則括弧內之乘數, 可棄之不用. 若 $d=1$,

則 $$\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=\mu\frac{1}{n}.$$

惟因 $\log_{10}(1+n)-\log_{10}n$ 爲表中相連兩對數之較, 如令此表中之較數爲 S,

則 $$\log_{10}(1+n)-\log_{10}n=dS.$$

即 $\log_{10}(n+d)=\log_{10}n+dS$. 依此式可從本數之上下兩數, 而得本數之對數. 反之, $\log_{10}(n+x)-\log_{10}n$ 爲已知之數, 而等於 S', 則 $d=\frac{S'}{S}$, 將此分數加於 n, 即成 n 與 $n+1$ 間兩對數之中相配之眞數內分數.

第三十一款. "求前所差之限".

因 $\log(n+d)-\log n$ 在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{d}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之間, 則所差者必在 $\mu\frac{d}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ 與 $\mu\frac{d}{n}$ 之內, 所以此二式, 即可爲其差

之限.又易知其略近之同數 dS 必在極大極小之限內.若令 $dS=\log(n+d)-\log n$,則所有之差,必小於 $\frac{\mu d}{2n^2}$,若 $n>100000$,而 $d<1$,則其分數必小於 $\frac{0.43}{2000000000}$,即小於第八位小數之 $\frac{1}{4}$,可見其差必不能入所求對數之七位小數以內.

又令 $d=\frac{S'}{S}$,則所差爲 $\frac{dS-S'}{S}$,則依前理,其所差必小於 $\frac{\mu d}{2n^2S}$,惟因 $S>\frac{\mu}{n}\left(1-\frac{1}{2n}\right)$,換言之 $d-\frac{S'}{S}<\frac{d}{2n-1}$,$d-\frac{S'}{S}<\frac{1}{2000}$,惟此因 $n>10000$ 方能得此,若 $\frac{S'}{S}$ 爲 d 之同數,其差與所求得之首四位小數可不相關.

第三十二款."對數之計算".

$$\log_e(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

以 $-x$ 代 x 得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

而 $$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left\{\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right\}$$

又令 $$\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{m}{n},\text{則 } x=\frac{m}{2m+n}.$$

惟因 $\log_e\left(1+\frac{m}{n}\right)=\log_e\left(\frac{m+n}{n}\right)=\log_e(m+n)-\log_e n.$

$$\therefore\quad \log_e(n+m)=\log_e n+2\left\{\frac{m}{2n+m}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m}{2n+m}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

如令 $m=1$, 則

$$\log_e(n+1)=\log_e n+2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\quad(1)$$

第三十三款. 設 $\frac{m}{n}=\frac{1+x}{1-x}$, $\therefore\ x=\frac{m-n}{m+n}$. 則

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

如 $m=x^2,\quad n=x^2-1,$ 則 $\frac{m-n}{m+n}=\frac{1}{2x^2-1}$,

而 $\log_e\left(\frac{m}{n}\right)=2\log_e x-\log_e(x-1)-\log_e(x+1)$,

$$\therefore\quad \log_e(x-1)=2\log_e x-\log_e(x-1)-2\left\{\frac{1}{2x^2-1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)^3-\cdots\cdots\right\}\quad(3)$$

用此式若已有相連之兩數 $x-1$, 與 x 之訥對, 則可求

相進第三數 $x+1$ 之訥對.

(21) 對數表引說一卷, 用對數表訣一卷, 造對數表法一卷, 朱湘澄撰, 未刊.[33]

20. 代數學補式, 算式解法, 有不爲齋算學, 對數旁通, 對數較表, 對數捷法, 對數淺釋, 對數四問.

(22) 代數術補式二十二卷, 解崇輝撰 (1899), 蓋爲解析代數術而作.

(23) 算式解法十四卷, 美國好敦司開奈利同撰, 英國傅蘭雅口譯, 金匱華蘅芳筆述, 第八卷論對數.[34] 光緒二十五年 (1899) 刻.[35]

(24) 傅九淵有不爲齋算學卷三"對數表開方較省算法解"稱: "作對數法遞次開方, 以求假數, 用前後各次所得數相較 [見數理精蘊] 最爲簡妙".

"蓋各次開方首位之數幷爲 1, 首位以下空位漸多, 則後次開方數 (E_{n+1}), 與前次開方數 (E_n), 略近

(33) 見劉鐸古今算學書錄"象數第三"第十五頁, 光緒戊戌 (1898) 印本.

(34) 見江南製造局譯書提要卷二, 第三十六至三十七頁.

(35) 見江南製造局記卷二, 第十九頁.

$\frac{1}{2}$,於是以前次開方數二歸之$\left(\frac{1}{2}E_n\right)$,與後次開方數($E_{n+1}$)相課,則後一次開方數內,必少本次開方所減之偶冪半段."

求第一較: 因 $\left(1+0.\overset{n}{\underset{0}{}}\alpha\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta\right)$

或 $$1+0.\overset{n}{\underset{0}{}}\alpha=1+2\times0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta+\overline{0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta}^{2}$$

卽 $$\frac{0.\overset{n}{\underset{0}{}}\alpha}{2}=0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta+\frac{\overline{0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta}^{2}}{2}$$

或 $$\frac{0.\overset{n}{\underset{0}{}}\alpha}{2}-0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta=\frac{\overline{0.\overset{m}{\underset{0}{}}\beta}^{2}}{2}$$

卽 $$\frac{E_{n-1}}{2}-E_n=a_{n\cdot1}$$

而 E_{n-1} 爲前次開方數,開方數俱不用首位.

E_n 爲本次開方數,

$d_{n\cdot1}$ 爲本次第一較.

求第二較:

又因 $$\frac{E_{n-1}}{2}=E_n+d_{n\cdot1}$$

自乘之得 $$\frac{\overline{E_{n-1}}^{2}}{4}=\overline{E_n}^{2}+2\,E_n\cdot d_{n\cdot1}+\overline{d_{n\cdot1}}^{2},$$

即 $$\frac{1}{4}\cdot\overline{\frac{E_{n-1}}{2}}^2-\overline{\frac{E_n}{2}}^2=E_n\cdot d_{n\cdot 1}+\frac{\overline{d_{n\cdot 1}}^2}{2},$$

或 $$\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1}-d_{n\cdot 1}=d_{n\cdot 2}. \qquad (2)$$

而 $d_{(n-1)\cdot 1}$ 爲前次第一較

$d_{n\cdot 1}$ 爲本次第一較

$d_{n\cdot 2}$ 爲本次第二較.

求第三較:

又因 $$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2} \qquad (1)$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1} \qquad (2)$$

則從(1)及(2)相乘得

$$\frac{1}{8}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}-E_n\cdot d_{n\cdot 1}=E_n d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 1}}^2+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}. \qquad (A)$$

又從(2)自乘得

$$\frac{\frac{1}{8}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2}{2}-\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2=\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2+2d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 2}}^2 \qquad (B)$$

(A)+(B) 得

$$\frac{d_{(n-1)\cdot 2}}{8}-d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2+3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 2}}^2=d_{n\cdot 3}$$

(3)

而 $d_{(n-1)\cdot 2}$ 爲前次第二較

$d_{n\cdot 2}$ 爲本次第二較

$d_{n\cdot 3}$ 爲本次第三較.

求第四較:

因 $$E_n+d_{n\cdot 1}=\frac{E_{n-1}}{2} \tag{1}$$

$$d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 3}=\frac{1}{8}d_{(n-1)\cdot 2} \tag{3}$$

$$d_{n\cdot 1}+d_{n\cdot 2}=\frac{1}{4}d_{(n-1)\cdot 1} \tag{2}$$

則從 (1), (3) 相乘得

$$\frac{1}{16}E_{n-1}\cdot d_{(n-1)\cdot 2}-E_n\cdot d_{n\cdot 2}=E_n\cdot d_{n\cdot 3}+d_{n\cdot 1}\cdot d_{n\cdot 2}+d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}. \tag{C}$$

又從 (2) 自乘, 又各乘 1.5 得

$$\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2-\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\frac{3}{2}\overline{d_{n\cdot 2}}^2 \tag{D}$$

又從 (2), (3) 相乘, 又各乘 6 得

$$\frac{3}{16}\cdot d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}-3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}=3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+6d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+6\overline{d_{n\cdot 2}}^2$$

$$+6d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3} \tag{E}$$

又從 (3) 自乘, 又各乘 4 得

$$\frac{1}{16}\overline{d_{(n-1)\cdot 2}}^2-\overline{d_{n\cdot 2}}^2=\overline{3d_{n\cdot 2}}^2+8d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}+\overline{4d_{n\cdot 3}}^2 \tag{F}$$

(C)+(D)+(E)+(F) 得

$$\frac{1}{16}\left\{E_{n-1}d_{(n-1)\cdot 2}+\frac{3}{2}\overline{d_{(n-1)\cdot 1}}^2+3d_{(n-1)\cdot 1}d_{(n-1)\cdot 2}+\overline{d_{(n-1)\cdot 2}}^2\right\}$$

$$-\left\{E_n d_{n\cdot 2}+1\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 1}}^2+3d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+\overline{d_{n\cdot 2}}^2\right\}=E_n d_{n\cdot 3}$$

$$+7d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 2}+7d_{n\cdot 1}d_{n\cdot 3}+10\frac{1}{2}\overline{d_{n\cdot 2}}^2+14d_{n\cdot 2}d_{n\cdot 3}$$

$$+4\overline{d_{n\cdot 3}}^2$$

卽 $$\frac{1}{16}d_{(n-1)\cdot 3}-d_{n\cdot 3}=d_{n\cdot 4} \qquad (4)$$

而 $d_{(n-1)\cdot 3}$ 爲前次第三較

$d_{n\cdot 3}$ 爲本次第三較

$d_{n\cdot 4}$ 爲本次第四較.

(25) 對數旁通一卷爲思棗室算學新編四種之一,無錫蔣士棟撰,前有華世芳光緒丁酉(1897)序文一篇.書中稱: $10^{\frac{1}{2}(n+1)}=1+E_{n+1}$, $E_{n+1}:\frac{1}{2^{(n+1)}}=1:\mu$. 就中 10 爲常對數之底.數理精蘊(3)"用遞次開方求假數法"(c)卽用此法對數根 μ. 如已知 μ 亦可反求得 E_{n+1} 及 10 矣.

(26—29) 廖家授(1860—1890)撰對數較表一卷存於家.陸采撰對數捷法一卷,見杭州藝文志.江衡撰對數淺釋一卷爲溉齋算草之一.劉彝程撰對數四

問，見經世文續編.

(三) 對數之東來下[36]

21. 對數輸入日本之經過

日本林鶴一以爲對數由中國數理精蘊輸入日本約在享保六年(1721)，因此時德川吉宗亦重曆算者也.惟上文攷出數理精蘊實成於雍正癸卯(1723)，則輸入日本當稍後於享保六年矣.其後又由荷蘭直接輸入.今其國中所藏論著對數之書計有：

(1) 數理精蘊(印本，鈔本).

(2) 不朽算法(鈔本)，安島直圓著，日下誠編.

(3) 眞假數表(鈔本)，安島直圓著.

(4) 眞假數表術解(鈔本).

(5) 對數表起源(鈔本)與(3)內容略同，又與(6)全異.

(6) 對數表起源(鈔本)，會田安明著.

(7) 對數表(鈔本)，堀田泉尹著(1814).

---

(36) 參看林鶴一：和算ソ於ケル對數，東北數學雜誌第二十一卷，第一，二號，日本，仙臺，1922.第148—190頁.

(8) 作對數表法(鈔本),篠原善富著(1823).

(9) 加減代乘除表(印本),阪部廣胖著,馬場正督訂(1824).

(10) 對數表製法(鈔本),石黑信由著(1829).

(11) 算法對數表(印本),小出修喜編,福田理軒校(1844).

(12) 對數表精解(鈔本,印本),因田恭著,竹村好博編(1854).

(13) [算法捷徑]乘除對數表(印本),惠川景之著(1857).

(14) 對數表(鈔本),著作人及時代未詳.

(15) [新編]加減表,一名對數表(鈔本),阿部有清著(1860).

(16) 對數表(印本),關口開著,時代未詳.

(17) 數率六線率表(印本).

(18) 乘除對數表(鈔本),又[大測]加減代乘除表,大測表卷之三,或稱大村一秀著.

22. 不朽算法,眞假數表及對數表起源

(1) 關流正統第四傳安島直圓(1739－1798,或

1733－1800)之第五傳日下誠(1764－1839)於其師安島去世之翌年(1799),編集其師遺著,成不朽算法上下卷,上卷論圓理,下卷論對數之起源,角術等,幷及留島義太(?－1757)之平方零約術.上卷第十二問載與對數相關之題.因此問爲三角形自頂作n斜線,則內容n等圓之全徑爲

$$d=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{D}{h}}\right),$$ 而 h=自頂至底線之垂線,D=內容圓全徑.

其卷下稱:

或曰,第十二問,三斜,內容等圓術,界斜數十,則開方乘數,亦數十乘方,得商數不容易,可謂無用之術乎.答曰,予有新案,如下文.

術曰:眞數一者配數空,眞數[一十者,十分者]各配數一.眞數[一百者,一釐者]各配數二.眞數[一千者,一毛者]各配數三.如此眞數上下每進退一位,配數增一.依比例得所求配數.其術曰:置[一十],九乘方開之,得商爲配數[一分]之眞數[名法],置[一十]以法除之,爲配數[九分]之眞數.以法除之,爲配數[八分]之眞數.以法除之,爲配數[七分]之眞數.次第如此以法累除之,而求到配數[二分]之眞數而止.

置配數[一分]之眞數,九乘方開之,爲配數[一厘]之眞數[名法],置配數[一分]之眞數.以法除之,爲配數[九釐]之眞數.以法除之,爲配數[八釐]之眞數.以法除之,爲配數[七釐]之眞數.如前法以法累除之.求到配數[二釐]之眞數而止.

置配數[一釐]之眞數,九乘方開之,爲配數[一毛]之眞數.依前術求到,超於配數[九毛]之眞數.至[二毛]之眞數而止.[餘倣此].

所稱配數卽對數也,如

眞數		配數
1		0
10	0.1	1
100	0.01	2
1000	0.001	3
……	……	……

是也,而配數之正負,不復計及.

其求配數之法,如

$$\sqrt[10]{10}=\log^{-1}0.1$$ (以配數一分之眞數爲法),

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10}}=\log^{-1}0.9$$ (配數九分之眞數),

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}=\log^{-1}0.8$$ (配數八分之眞數).

....

$$\frac{10}{\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10}}}}}}}}}$$ (配數二分之眞數).

次

$$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}=\log^{-1}0.01$$ (以配數一釐之眞數爲法)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.09$$ (配數九釐之眞數)

$$\frac{\sqrt[10]{10}}{\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\cdot\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}}=\log^{-1}0.08$$ (配數八釐之眞數).

....

由此得

眞　數	配　數
7.9423823472428	0.9
6.3095734448019	0.8

5.0118723362727	0.7
3.9810717055350	0.6
3.1622776601684	0.5
....	......
1.2589254117942	0.1
1.2302687708124	0.09
....	......
1.0002072541335	0.00009
....	....
1.0000000000046	0.000000000000002
1.0000000000023	0.000000000000001

如求log 2.因原表眞數之値至複雜，而其配數之値反簡單，然亦可求整數之配數.其義一如戴煦對數簡法(1)"有開方表徑求諸對數"之法,例如

$$\log 2=\log 1.9952623149698\times\frac{2}{1.995\cdots698}$$

$$=\log 1.9952623149698\times 1.00237446725452 9$$

$$=\log 1.9952\cdots9698\times\log 1.0023052380779$$

$$\times \frac{1.002374467254529}{1.0023052380779}$$

$$=\log 1.9952\cdots 9698 \times \log 1.0023\cdots 0779$$

$$\times 1.000069065295294.$$

$$=0.3+0.001+0.0001+\cdots\cdots$$

$$=0.3010295663.$$

至有配數求眞數,如已知配數2.56求眞數.已因知配數2之眞數$=100=a$,配數0.5之眞數$=3.1622776601684=b$,配數0.06之眞數$=1.1481536214969=c$,則所求之眞數爲$a.b.c.$

眞假數表亦爲安島所編,未詳年代.對數表起源有與安島眞假數表內容相同者.

23. 對數表起源.作對數表法.加減代乘除表.

(1) 會田安明(1747－1817)之對數表起源,與安島直圓之對數表起源書名相同,而內容全異.書中言眞數2之假數1,眞數4之假數2,眞數8之假數3,幷謂

眞數相乘者假數相加而相對. $\log ab=\log a+\log b.$

眞數相除者假數相減而相對. $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$

眞數開平方者假數二除而相對. $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a.$

眞數開立方者假數三除而相對. $\log\sqrt[3]{a}=\frac{1}{3}\log a.$

眞數開三乘方者假數四除而相對. $\log\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}\log a.$

又立小表如

眞　數	2	4	8	16	32	64	128	……
假　數	1	2	3	4	5	6	7	……

蓋會田先求2爲底之對數,其術一如數理精蘊內"用中比例求假數法". 如求 log 3，先由 log 2=1，log 4=2 起數.

$\sqrt{2\times4}=2.82842+$「第一眞數, 少率 (1)].(37)

則 $\log 2.82842+=\frac{1}{2}(\log 2+\log 4)=1.5$ [第一假數].

次因 $\sqrt{第一眞數\times4}=3.36358+$[第二眞數, 多率 (1)].

則 $\log 3.36358+=\frac{1}{2}(\log 4+\log 1.5)=1.75$ [第二假數].

---

(37) 關於多少率之說，詳見東北數學雜誌第六卷內林鶴一"零約術ト我國於ケル連分數論發達"論文.

復次 $\sqrt{少率(1)\times多率(1)}=3.084421+$[第三眞數,多率(2)].

則 $\log 3.084421+=\frac{1}{2}(第一假數+第二假數)=1,625$ [第三假數].

復次 $\sqrt{少率(1)\times多率(2)}=2.9536+$[第四眞數,少率(2)].

則 $\log 2.9536+=\frac{1}{2}(第一假數+第三假數)=1.5625$ [第四假數].

逐次如是,至第十次得:

第十眞數 $=2.9999967198$ (少率)

第十假數 $=1.5849609375$

故 $\log_2 3=1.584961$

同理 $\log_2 5=2.321920,\quad \log_2 7=2.80735,$

$\log_2 11=3.459426,\quad \log_2 10=3.32192.$

如欲得10爲底之對數,可以下式得之.

$$\log_{10} 2=\frac{1}{\log_2 10}.\ \log_2 2=0.30103.$$

(2) 作對數表法爲篠原善富,文政六年(1823)所著.篠原善續中算,文化十三年(1816)著三角法舉要.文政二年(1819)著周髀算經圖字解.其作對數表法

蓋完全翀販數理精蘊之說，一如陳杰之算法大成之例.

(3) 加減代乘除表爲阪部廣胖(−1824)所著.附於文化七年(1810)所著算法點竄指南錄第十二卷內.爲一至三百之對數小表.佐久間光豹復爲補成三百至千二百之對數小表.

24. 對數表製法.對數表精解

(1) 對數表製法爲石黑信由(1760−1836),文政十二年(1829)所著.其法先求眞數之四位假數,次及六位,復次爲八位,逐次偪近,得其眞值.

(甲) 先求四位之表.

眞　數	7	10	100	……
假　數	0000	1000	2000	……

又

眞　數	2	4	8	5	………
假　數	0300	0600	0900	0700	………

上表蓋設眞數2之假數爲0300.

故眞數4之假數爲0600,亦爲眞數2之假數2倍;

又眞數8之假數爲0900,亦爲眞數2之假數.及4之假

數之和;又眞數5之假數爲0700,亦爲眞數2之假數.及10之假數之較.

次以3爲2與4中間之數,乃以2之假數,與4之假數相加折半爲3之假數卽0450.由是9之汎假數爲0900,但上表明言8之假數亦爲0900,由是9之假數當以8之假數,與10之假數相加折半得爲0950,今倍之得1900爲81之假數.又以8之假數,與10之假數相和得80之假數,亦爲1900.但在理此兩數不應相同,由是加不定加數(irregular additor)於9之汎假數,是爲0.952.[38]旣得9之假數,可推得3與6之假數,如:

眞　　數	9	3	6	………
假　　數	0952	0476	0776	………

復次求7之假數,由6之假數與8之假數相加折半得爲0838.今倍之得1676爲49之汎假數,又以6之假數,與8之假數相加得48之假數,亦爲1676.但在理兩數不應相同,是知兩者均不合,因另以5之假數與10之假數相加得1700,又以48之假數與50之假數相加折半得1688爲49之汎假數.另加不定加數0002是爲49

(38) 石黑信由以何理由得不定加數,至今尙無確解.

之假數，如：

眞數	49	7	
假數	1690	0845	

同理得下列之表，就中差爲連續二假數之差，不定加數（卽前後平均而外之不定加數）爲連續三假數內，前後兩假數相加折半，與中央假數之差．表中除有附尾之5外，其不定加數皆漸次細小．如設2之假數爲0301則不定加數之漸次細小，更爲有序．

眞數	假數	差	不定加數
1	0000	0300	0000
2	0300	176	62
3	0476	124	26
4	0600	100	12
5	0700	76	12
6	0776	69	$03\frac{5}{}$
7	0845	55	07
8	0900	52	$1\frac{5}{}$
9	0952	48	2

10	1000	39	$4\overset{5}{-}$
11	1039	37	1
12	1076	35	1
13	1111	34	$0\overset{5}{-}$
14	1145	31	$1\overset{5}{-}$
15	1176	24	$3\overset{5}{-}$
16	1200	27	$1\overset{5}{-}$負
17	1227	25	1
18	1252	25	0
19	1277	23	1
20	1300	21	1

次求六位之表,以下二小表爲基礎,即:

眞　數	1	10	100	1000	
假　數	000000	100000	200000	300000	

眞　數	2	4	8	5	
假　數	030103	060206	090309	069897	

最後求八位之表，以下二小表爲基礎，即：

眞數	0	10	100	1000	
假數	00000000	10000000	20000000	30000000	

眞數	2	4	8	5	
假數	03010300	06020600	09030900	06989700	

(2) 對數表精解爲關流正統第六傳內田恭(1805–1882)所著，其弟子竹村好博，安政元年(1854)所增修，書中以數理精蘊累乘比例，義頗繁雜，因如不朽算法先設，

眞數	假數
1	0
10	1
100	2
1000	3
……	……

次以

眞數	假數
$\sqrt[10]{10}$	0.1
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^2$	0.2
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^3$	0.3
....	......
$\left(\sqrt[10]{10}\right)^{10}$	1.0
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}$	0.01
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)^2$	0.02
....	......
$\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}$	0.001
$\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{\left(\sqrt[10]{10}\right)}\right)}\right)^2$	0.002
....	......

其進行之方法,又與不朽算法稍異.

25. 算法對數表.乘除對數表.對數表

(1) 算法對數表爲小出修喜(1797—1865)所編,福

田理軒校.小出爲德島藩士,是書於弘化元年(1844)刊行.對數初入日本,羣相珍秘,自此書出,對數法始廣傳焉.其書疑爲荷蘭人所輸入,因卷中信田貞秀誌語曾題荷蘭之對數表譯名焉.

(2) 乘除對數表爲安政四年(1857)惠川景之所著,乃鈔錄西曆1831年毗辣兒(J. C. Pilaar)航海書中之一萬以下四位對數表,并列差數表.毗辣兒爲荷蘭人.

(3) 對數表由關口開(1842—1884)署簽,作書年代未詳,大約採自英,美書.具小數六位.明治初期,日人多用六,七位對數表,此書疑出於此時矣.

十五年,十一月,二十日,於靈寶

中算輸入日本之經過

日本遠藤利貞補修日本數學史,分該國數學史爲五紀:第一紀起神代迄宣化(536 A. D.),號爲日本上古之數學;第二紀起欽明(554)迄元和(1615–1623),號爲支那數學採用之時代;第三紀起元和迄延寶年間(1673–1680),號爲日本數學之再興時代;第四紀起延寶迄明和(1781–1788),號爲日本數學之新發時代;第五紀起明和迄明治十年(1877),號爲日本數學之高進時代;實則各紀中均有中算輸入之形迹,不獨一二紀如是,即三四五紀亦然.(註1)

日本神代之事,其詳不得而知.其在吾國,則記

(註1) 遠藤利貞遺著增修日本數學史,大正七年日本巖波書店出版,以後簡稱增修遠史.

數之法,說文所記,十十爲百,十百爲千,十千爲萬,一十百千萬,謂之五數.日本上古記數,萬以下亦取此記法.萬以上,則以萬萬進.三上義夫疑其傳自吾國.按西曆紀元前三十三年任那始入朝於日,任那在今朝鮮慶尙道之西南,此爲日韓交通之始.厥後神功皇后(201–270 A. D.)用兵新羅,而間接得與吾國交通.華民亦多移居於日.舉凡簿籍計算,與建築,工藝,佛法,均於此時間接輸入.(註2)

第二紀爲吾國數學輸入最顯著之時代.欽明十五年(554 A. D.),百濟易博士王道良,曆博士王保孫始以中國曆法輸入日本.於是改良度量衡制,置漏刻器,立天文臺,行元嘉曆及儀鳳曆,一惟中土之法是遵.大寶二年(702),立學校,授算術,所採算經十書,爲周髀,孫子,六章,三開,重差,五曹,海島,九司,九章,綴術,幷置曆士,算生,等名稱.先是,推古十五年(607),日皇遣小野妹子入使於隋.日後中日僧侶,商舶,多所往來;直至元代弘安之役(1281),中日交通,始

(註2) 增修通史三至五葉.徐宗稺周葆鑾共譯日本和田垣謙三世界商業史一八七至一九五葉.

形阻隔.而中算在日本之影響,已可得以言.徵諸日本最古算書口遊之所記載,更屬可信.(註3)

口遊一書,附有天祿元年(970)冬十二月二十七日源爲憲序文,蓋爲教授當時參議藤原爲光七歲長子松雄而作.所記九九,始九九迄一一,與孫子算經之次序相同.今據舊寫本(1263)移錄九九之序如次:

九九八十一　八九七十二　七九六十三
六九五十四　五九四十五　四九三十六
三九二十七　二九十八　一九九

八八六十四　七八五十六　六八四十八
五八四十　四八三十三(按三當爲二之誤)
三八二十四　二八十六　一八八

七七四十九　六七四十二　五七三十五
四七二十八　三七二十一　二七十四
一七七

六六三十六　五六三十　四六二十四
三六十八　二六十二　一六六

(註3) 增修遠史六至十一葉.徐周譯世界商業史.

五五二十五　四五二十　三五十五

二五十　一五五

四四十六　三四十二　二四八

一四四

三三九　二三六　一三三

二二四　一二二

一一一

孫子算經,末有孕婦難月一問,題曰:

今有孕婦,行年二十九,難九月,未知所生.

答曰:生男.

術曰:置四十九,加難月.所除以天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,八風除八,九州除九.其不盡者,奇則爲男,耦則爲女.

口遊人事篇,亦有類似之問題,如:

今有姙婦可生子,知男女法.

術曰:置婦女年數,(自生年至姙年)加十二神爲實.可際(按際當爲除之誤)天一,地二,人三,四時,五行,六神,七皇,(按皇當爲星之誤)八風,九宮.殘一三五七(爲陽男也)二四六八(爲陰女也)一死(此字疑有誤)以九除也.

此外則有「有病者不知死生」及「今有人死生知術」二項:

置九九八十一,加十二神得九十三,更加病者年數,所得以三除之.若有不盡者,男死女不死.若無不盡者,女死男生云.置八十一,加十二神,又加十二月,又將病者年若干,并以三除.若有算殘者不死,不遺死.

此二項不見於孫子算經.惟孫子之孕婦難月題適在篇末,或其所附記年久缺佚,而留入日本者,幸得保存,未可知也.復有竹束問題,爲等差級數求總和,亦與孫子算經之「今有方物一束」約略相同.(註4)

第三紀中算之輸入,尤爲重要.明萬曆二十年(1592)日本豐臣秀吉遣舟師數百艘渡海,陷朝鮮之釜山,朝鮮告急.其翌年明師敗,尋議和.厥後互有勝敗.至二十六年七月(1598),豐臣秀吉死,朝鮮之事乃

(註4) 三上義夫九九ニ就キテ,東洋學報第十一卷第一號一〇二至一一八葉,日本.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題,日本中等教育學會雜誌第四卷第一號第三葉,日本.

平.而程大位之算法統宗(1593),亦於斯役輸入日本焉.豐臣秀吉之臣毛利重能爲首傳算法統宗者.或謂毛利曾入學於明.延寶四年(1676)覆刻本算法統宗跋語,有:「算法統宗有渡唐而以來,世久褒用」之語,或以爲毛利來華之證.豐臣旣歿,毛利隱於日之京都,開館授徒,從者數百人.所著有算書(1622),歸除濫觴二卷,及割算一書,蓋皆述中國珠算之法也.毛利復以其筆錄之算法書十八卷,與其徒吉田光由(1598—1672).寬永四年(1627),吉田著塵刦記.其後今村知商復著豎亥錄(1639),因歸算歌(1640).延寶三年(1675)湯淺得之尙翻刻算法統宗,幷加註釋,稱爲算法統宗訓點.元祿七年(1694)鈴木重次著算法重寶記,其納音之法,與因乘之圖,亦出於算法統宗.卽因乘之題問與圖,亦與算法統宗卷十二寫算之因乘圖相類.今譯於下:

	二	三	
一	一／	一／五	五
二	一／二	一／八	六
九	一／	一／五	五
	九	五	

問綿布二十三端,每端五兩六分五釐之銀.

答曰,百二十九兩九分五釐.

其解法列圖如上:

方陣之事,日人習者至夥.其基本定理,多導源於算法統宗.其同時輸入日本者,爲中國算盤.文祿年間(1592—1596),前田利家在名護屋陣中所用之算盤,尙流傳至今.盤長四寸二分五釐,寬二寸三分,高四分.黑檀木製,凡九檔,梁上二珠,梁下五珠,盤珠略作稜形.其後大津製造算盤,爲用更廣.(註5)

元朱世傑所著算學啓蒙,亦於明末由朝鮮間接輸入日本.是書流傳於朝鮮者,有洪武年刻本.至

(註5) 增修遺史四三至六六葉,一三二葉,一七六至一七七葉.

三上義夫文化史上ヨリ見タル日本ノ數學,哲學雜誌第三十七卷四百二十一號十一葉至十二葉,又四百二十二號二十九至三十葉,日本.

林鶴一,和算ニ於ケル通俗書塵刼記及ビ改算記,東北數學雜誌第十六卷二十六至三十七葉,大正八年(1919)日本仙臺.

三上義夫和算之方陣問題,日本帝國學士院,大正六年(1917)日本東京出版.

三上義夫第三回總會ニ陳列セル和算書解題八至九葉.

淸順治十七年(1660),朝鮮金始振重刊行世.其在日本,則萬治元年(1658)已有吉田光由門人久田玄哲詳註算學啓蒙,號爲算學啓蒙訓點.村松茂淸以算學啓蒙法式雖有之,與和俗不洽,因於寬文三年(1663)著算俎.寬文十二年(1672),星野實宣以俗語解說,號算學啓蒙註解.元祿元年(1688)建部賢弘(1664—1739)著算學啓蒙諺解.(註6)

宋楊輝算法流傳於朝鮮者,有明洪武戊午(1378)古杭勤德書堂刊本.明宣德八年(1432)朝鮮觀察使者辛引孫奉內旨,囑慶州府尹金乙辛,判官李好信命工鋟梓,閱月而訖.顧其書流傳不廣,故金始振亦僅得其鈔本.而刻本尙有流入日本者,日本算聖關孝和(1642—1708)於寬文辛丑(1670),曾寫錄一部.若數學九章,四元玉鑑,測圓海鏡,亦有傳入日本之形迹.狩野亨吉謂相傳關孝和於奈良某寺,得讀中國算學書凡三年,似亦心得測圓海鏡之誼.因其級數

(註6) 增修遠史七八,八六,一〇四,一六八葉.

三上義夫第三回總會ニ陳列ヤル和算書解題九至十 葉

算學啓蒙金始振序.

開展法,與李冶求高次方程式方根之法相似也.(註7)

第四五紀日算精進,遠越前人.而受賜於天元學說之輸入,則無可疑.關孝和之剩一術,與宋秦九韶之大衍求一術,全相一致.卽其招差法,亦根於元郭守敬之相減相乘及三差之法.又所著大成算經,曾錄程大位之寫算乘法.其方陣之術,則師法楊輝,以關氏曾手錄是書也.關孝和之剪管術,於研幾算法自序,謂出於唐穆宗之宣明曆.厥後宅間能清一流,在十七世紀中葉,亦以招差法解析圓理,說詳宅間流圓理卷二.(註8)

明末淸初西法輸入中國.第一期之代表著作,爲崇禎曆書,曆象考成,數理精蘊.第二期之代表著作爲梅氏曆算全書.至乾嘉時代,西法中止輸入,學

(註7) 本朝數學通俗講演集第六葉,明治四十一年(1908)日本東京.

算學啓蒙金始振序.

關孝和鈔本宋楊輝算法.

(註8) 增修遠史一四〇至一四一葉及二一二葉.

Y. Mikami: The Circle-measurement of the Takuma School, Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai kiki. 2 series, Vol VII., No. 3, pp. 46—56, 1913.

者蒐輯古籍，乃有算經十書之刻.是時程大位寫算式之籌算,風靡中原.梅氏之籌算七卷(1678),戴震之策算一卷(1744),蓋其例也.此項算法,流入日本,亦得相當之影響.明和元年(1764),山縣昌貞著牙籌譜,其自序謂:「牙籌舊明人之所製,便捷頗勝用算盤者.」其籌爲直者,共有九枚,另作零籌,都爲十籌,別置同樣者數枚,以便應用.明和四年(1767)千野乾弘著籌算指南,其籌爲橫者.是直襲梅氏之制,且其形式亦復相同.清戴震於乾隆三十八年(1773)至四十二年(1777)間,纂校周髀算經,九章算術,孫子算經,五曹算經,海島算經,五經算術,夏侯陽算術,先後以聚珍版刊行.其後曲阜孔繼涵乃并戴氏所校輯古算經,張丘建算經,及其所著策算,勾股割圜記作算經十書刊刻行世.寬政四年(1792)村井中漸翻刻吾術,夏侯國所傳入之五種算經:即孫子算經,五曹算經,海島算經,五經算陽算經.村井爲日本算學界老宿,早年曾著逢原新率勾股法(1760),開商點兵算法(1765)等書.今僅刻此五種,或彼僅見聚珍版刊本各算經,而周髀九章當時尙有傳本.蓋天明五年(1785)川邊信一尙著周髀算經圖解,文政二年(1819)篠原善富亦

作周髀算經國字解也.(註9)

牙籌以外,弧三角,橢圓,對數亦輸入日本.惟此時日本尙一方受荷蘭學術之影響.是時安島直圓(1739－1799)著弧三角術解,蓋卽註解梅文鼎曆算全書中環中黍尺之加減捷法.佐藤一清橢圓說詳之第一節,題爲「三國同題同術起原」.其第三解法,謂出自橢圓起源,說詳曆算全書卷中.至對數之初入日本也,習者相祕,不以授人.安島直圓卒後之翌年(1799),其門人日下誠(1764－1839)編集其遺稿.成不朽算法二卷;下卷言普通對數之起源.會田安明則別作對數,號會田對數.弘化元年(1844)小出修喜刊一至萬之普通對數表.昔日祕不授人之學術,今始克公諸世.其後十年,竹村好博與其門人內田五觀

(註9) 增修遼史三三八,三三九,三五〇,三五一,四〇二,四三二,五三九葉.

東織原民國十三年北京晨報社出版.

拙著中國數學源流考略,北京大學月刊第一卷第五號六八至六九葉七一至七二葉,民國八年

共作對數表正解，其用益顯.(註10)

日本於垜積，圓理，研討極精，其基本觀念，亦多導源吾國.日人以關孝和流派之垜術，詳列下表，今可與宋元諸子，及清陳世仁垜積之說參較，以觀其源流.

圭垜或圭減垜	1.	2.	3.	4.	5.	....
三角衰垜或三角減衰垜	1.	3.	6.	10.	15.	....
再乘衰垜或再乘減衰垜	1.	4.	10.	20.	35.	....
三乘衰垜或三乘減衰垜	1.	5.	15.	35.	70.	....
”	”	”	”	”	”	”
奇零圭垜	1.	3.	5.	7.	9.	11. ......
奇零三角圭垜	1.	4.	9.	16.	25.	36. ......
奇零再乘圭垜	1.	5.	14.	30.	55.	91. ......
奇零三乘圭垜	1.	6.	20.	50.	105.	196. ......
”	”	”	”	”	”	”

註10) 增修遼史四五四至四五九葉，五二一至五二五葉，五六三至五六五葉，六一七至六一八葉，六三八至六四三葉.

林鶴一安島萬藏及ビ松永貞之丞，東北數學雜誌第十一卷一七至三四葉，大正六年(1917)，日本仙臺.

林鶴一佐藤一清ノ橢圓評註，東北數學雜誌第十二卷一九〇至一九二葉，大正七年(1918)日本仙臺.

偶零圭垜	2.	4.	6.	8.………
偶零三角圭垜	2.	6.	12.	20.………
偶零再乘圭垜	2.	8.	20.	40.………
偶零三乘圭垜	2.	10.	30.	70.………
” ” ” ”	”	”	”	”
方垜	1^2.	2^2.	3^2.	4^2.…………
立垜	1^3.	2^3.	3^3.	4^3.…………
” ” ” ”	”	”	”	”

清初杜氏九術傳入中國,曾否流布日本,今無可考.而當日彼國於圓率之理,關孝和多所說述.關氏卒後建部賢弘校其遺編圓理弧背術得與杜氏相類之式

$$\frac{1}{4}(a)^2=ds\left\{1+\frac{2^2}{3.4}\left(\frac{s}{d}\right)+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}\left(\frac{s}{d}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

而 a 爲弧背,d 爲全徑,s 爲矢.元文四年(1739)松永良弼著方圓算經,記錄關於圓率之級數八式,其一與

前同,又三式闕於杜氏九術.(註11)

同光時代,西法復又傳入中國,而間接輸於日本.李善蘭偉烈亞力所譯代微積拾級(1857),在日本曾有附註之翻刻本.前之偉烈亞力數學啓蒙(1853),亦於日本發見翻刻本,題爲官版數學啓蒙.中算輸入日本,直至明治維新,和算衰廢以後,方告中止.觀於上文所記,則千餘年來中算對於日本之所造就,可無遺憾矣.(註12)

(註11) 增修遼史二七七葉.

三上義夫和算史概觀,日本東京物理學校雜誌別刷第十至十一葉,明治四十三年(1910).

拙著中國數學源流考略,北京大學月刊第一卷第五號六九至七一葉,民國八年.

Kitizi Yanagihara: On the Dajutu or the Arithmetic Series of Higher Orders as Studied by Wasanists.—The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 14, pp. 305.

(註12) 三上義夫和算史概觀,日本東京物理學校雜誌別刷十九葉,明治四十三年.

三上義夫文化史上ヨリ見タル日本ノ數學,哲學雜誌第三十七卷四百二十三號四十三葉.

梅文鼎年譜

序：梅文鼎與牛頓，關孝和並時，其整理西算，佳惠後學，厥功甚偉；且行年三十，方學歷算，而終身用力從事，至老不倦，尤屬可欽．其事蹟散見各書，爰爲比次，集成年譜，俾便參考．其並世國中算學家著述大略，與歷算事實，附記另行，并冠畢圖爲誌．

向曾徵訪梅氏宗譜，而所得未如所期．文鼎事蹟，因多存疑之處，願海內明達，進而教之．

年譜

明崇禎六年癸酉(1633)一歲．

是年夏歷二月初七日亥時，梅文鼎[1]生於安徽宣

---

(1) "梅定九，名文鼎，號勿菴，宣城人，有歷算全書"，見陸燿切問齋文鈔，第二四卷，第四頁，乾隆四〇年(1775)自序刻本．或參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七二頁，上海商務印書館出版，民國八年(1919)一一月．

城[2].

五續疑年錄[3]稱"梅定九,文鼎正錄[4]明崇禎六年癸酉生,康熙六十年辛丑卒.名人年譜同.補錄[5]萬歷元年癸酉生,順治十八年辛丑卒.案清國史館本傳,儒林傳藁,文獻徵存錄并云康熙六十年卒,補錄誤".

○前五年(1628)王錫闡[6]生,年六歲[7].

---

(2) 民國七年(1918)由宣城教育會劉至純君寄來甯國縣梅柏溪君所藏梅氏宗譜文鼎公本傳,瑴成公事略,及縣志中梅文鼎傳.本條卽據梅氏宗譜.

(3) 閔爾昌五續疑年錄,附錄一,第四頁,北京家刻本,民國七年(1918).

(4) 正錄卽錢大昕疑年錄,參看第四卷,第二一頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(5) 補錄,卽錢椒補疑年錄,參看第四卷,第一頁,道光一八年(1838)刻.

(6) "王寅旭,名錫闡,號曉菴,吳江人,有困亨齋集",見陸燿切問齋文鈔,第六卷,第一〇頁.

(7) 三續疑年錄,據王濟撰墓誌,見陸心源三續疑年錄,第八卷,補遺,第四册,第二三頁,光緒五年(1879)自序刻本.

○前三年(1630)鄧玉函[8](Terenz, Jean)卒,年未詳.

○前二年(1631)李之藻[9]卒,年未詳.

○是年徐光啟[10]卒,年七十二.

崇禎七年甲戌(1634)二歲.

○是年明室以李天經[11]繼徐光啟督修歷法.

---

(8) "鄧玉函者,德國之干司但司人也.天啓元年(1621)來華崇禎二年七月(1629)徐光啓薦鄧玉函同修歷法.次年(1630)四月卒",語見格致彙編第五年冬季册,西歷1890年冬出版利瑪竇湯若望二君傳略內.明史,第三二六卷,稱"玉函熱而瑪尼國人".

(9) "李之藻字振之,號涼庵,仁和人.……天學初函之藻所彙刻也.崇禎四年卒於官".見阮元疇人傳,第三二卷,第一……五頁,觀我生室彙稿本.

(10) "徐光啓字子光,上海人,……從西洋人利瑪竇學天文歷算火器",見明史,第二五一卷,第四頁,上海中華書局印本,民國一二年(1923).又"徐元扈(七二),光啓,生嘉靖四一年(1562)壬戌,卒崇禎六年(1633)癸酉",見錢大昕疑年錄,第三卷,第一九頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(11) "李天經字長德,趙州人",見阮元疇人傳,第三三卷,第一……一二頁,觀我生室彙稿本.

其年，成曆書六十一卷，前後共成書一百三十七卷（內有一架，一摺幷稱卷）．明史藝文志作一百二十六卷，是爲崇禎曆書[12]．

崇禎九年丙子(1636)四歲．

○"羅雅谷[13] (Rho, Giacomo)爲意國米蘭人．崇禎九年(1636)三月卒，曆法全歸（湯）若望[14]推步[15]．

崇禎十四年辛巳(1641)九歲．

---

(12) 語見李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第六九頁．

(13) "羅雅谷字聞韶，天啓末年入中國"，阮元疇人傳，第四四卷引新法算書．

(14) "湯若望者，日耳曼之哥倫人也．精曆法，通格致．明崇禎二年(1629)入中國，習華文．時禮部奏請開局修改曆法，徵若望供事，數年．勤勞局事．著交食諸書數種．經徐光啓李天經前後進呈"．見格致彙編第五年冬季册，西曆1890年冬出版，利瑪竇湯若望二君傳略內．

(15) 語見利瑪竇湯若望二君傳略，格致彙編(1890).

按 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I, p. 436 (1923) 謂羅雅谷1593年生於米蘭，1638年四四月卒於北京．

"文鼎九歲熟五經,通史事,有神童之目[16]."

"父士昌,號繳明,改革後,棄諸生服……文鼎兒時侍父及塾師羅王賓,仰觀星氣,輒了然於次舍運旋大意[17]."

崇禎十五年壬午(1642)十歲.

○是年日本關孝和[18] (1642-1708)生.

英國牛頓[19] (Newton, Sir Isaac) (1642-1727)生.

清順治二年乙酉(1645)十三歲.

---

(16) 語見梅氏宗譜.

(17) 語見梅文鼎傳上,杭世駿道古堂文集,第三〇卷,第七册,第一頁,光緒一四年(1888)汪氏振綺堂補刻本.

(18) "關孝和號自由,稱新助.爲人穎敏,尤好數術.精天文律曆,時稱爲算聖.撰著數十種.門人數百人".見關孝和之墓碑條,遠藤利貞日本數學史,第四三七頁,日本東京岩波書店出版.大正七年(1918)九月.

(19) "牛頓生於Lincolnshire,受教育於Trinity大學.發見微分學,二項式定理等算學要理.Universal Arithmetic一書由代數學方程式之理論,及雜問而成".見數學小史,外篇之部,趙繚數學辭典,第七九四……七九六頁,上海羣益書社出版,民國一二年(1923).

○"順治二年六月若望上言,於明崇禎年間曾用西洋新法,製測日月星晷定時攷驗諸器,近遭賊燬,臣擬另製進呈,今先將本年八月朔食,照新法推步,……往往不誤.得旨,欽天監印信著湯若望掌管,所屬官員嗣後一切占候選擇,悉聽舉行.累加太僕太常寺卿,勅賜通微教師,入覲禮儀,全行蠲免[20]".

順治四年丁亥(1647)十五歲.

"文鼎是年補博士弟子員[21]."

順治五年戊子(1648)十六歲.

○是年陳厚耀[22](1648—1722)生,厚耀著有續增新法比例四十卷[23].

---

(20) 語見利瑪竇湯若望二君傳略,格致彙編(1890).

(21) 語見梅氏宗譜.

(22) 陳厚耀字泗源,號曙峯,泰州人也.康熙丙戌(1706)李光地薦厚耀通歷法.厚耀曾受教於文鼎,康熙壬寅(1722)卒,年七五.語見阮元疇人傳,第四一卷,第一……五頁,觀我生室彙稿本.

(23) 豐順丁氏日昌持靜齋藏舊鈔本.見劉鐸古今算學書錄,算數第三,第一四頁,光緒二四年(1898)上海算學書局石印本.

順治六年己丑(1649)十七歲.

○是年艾儒略[24] (Aleni, Jules) 卒.

順治七年庚寅(1650)十八歲.

○是年陳訏[25] (1650–1732) 生, 著有句股述二卷 (1683), 句股引蒙五卷 (1722)[26].

順治十一年甲午(1654)二十二歲.

是年龍華民[27] (Longobardi Nicolao) 卒.

---

(24) 艾儒略一作艾如略, 見明史第三二六卷. 意人, 萬歷壬寅(1602)來華, 語見利類思不得已辯, 第四六頁, 1847年重刻本.

(25) 陳訏字言揚, 海甯人, 傳黃宗羲籌算句股之學. 句股術及句股引蒙諸書, 俱鐫版藏於家. 生於順治庚寅(1650)五月一九日, 歿於康熙壬子(1722)七月二四日. 語見海甯陳氏宗譜, 民國一四年(1925)由海甯圖書館朱偷君向陳達齋君徵得.

(26) 李儼所藏嘉慶二年守仁堂重刊本句股引蒙, 無卷數. 四庫本作五卷, 見壬子文瀾閣所存書目, 第三卷, 第二二頁, 通行本.

(27) 龍華民, 意大里亞國人, 語見明史, 第三二六卷. 萬歷二五年(1597)來華, 順治一〇年(1655)卒.

龍華民以1565年生於西西利 Sicily 之 Calatagirone, 1655年西曆一二月一一日卒於北京. 見 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436, (1923).

順治十四年丁酉(1657)二十五歲.

〇是年已革回回曆官吳明烜,疏言若望所推天象之謬.并上是年回回曆,推算天象之書.請立回回科,以存絕學.後經實測,明烜所指皆妄.禮部議其罪,援赦獲免[28].

順治十六年己亥(1659)二十七歲.

遂安毛際可(1633–1708)[29]梅先生傳,稱"文鼎年二十七,師事前代逸民竹冠道士倪觀湖,受麻孟璿所藏臺官交食法,即爲訂補註釋,成曆學駢枝

(28) 參看續文獻通考,第二五六卷,第三……六頁,浙江書局,光緒一三年(1887).

(29) "毛會侯名際可,號鶴舫,遂安人.順治戊戌進士,知樂城浚儀二縣,有安序堂集".見陸燿切問齋文鈔,第七卷,第一九頁,乾隆四年(1775)自序刻本."毛會侯(七六)際可,生崇禎六年癸酉(1633),卒康熙四七年戊子",見陸心源三續疑年錄第八卷,第一九頁.

按倪觀湖即倪正."倪正清宣城人字方公……尤精天文曆算,梅文鼎嘗從受交食法".見中國人名大辭典補遺第一二頁.上海商務印書館,民國一四年(1925)五版.

四卷，竹冠歎服，以爲智過於師云[30]”.

○是年楊光先(1597－?)[31]作“闢邪論上”，反對天主教．是年五月又作“摘謬十論”，幷見不得已上卷[32].

順治十七年庚子(1660)二十八歲.

○順治十七年十二月初三日楊光先呈書禮部正國禮，未准[33].

順治十八年辛丑(1661)二十九歲.

文鼎稱“是年始從同里倪竹冠先生，受交食通軌，

---

(30) 傳附勿菴歷算書目後，第一……二頁．勿菴歷算書目題宣城梅文鼎定九撰，孫穀成，玉汝，校正．康熙四一年(1702)梅文鼎自序乾隆年歙縣鮑廷博(1728－1814)刻入知不足齋叢書第一九集.

(31) 楊光先字長公，歙縣人，康熙三年(1664)上請誅邪教狀，時年六八歲，著不得已上下卷，見不得已，李儼藏傳鈔本.

(32) 楊光先不得已，上卷，第一七……二九頁，又第五八……六五頁．李儼藏傳鈔本．末有錢大昕，黃丕烈，錢琦題跋.

(33) 見不得已上卷.

歸與文鼐[34]，文鼏[35]兩弟習之，稍稍發明其立法之故，幷爲訂其訛誤，補其遺缺，得書二卷，[36]以質倪師，頗爲之首肯，自此遂畚有學歷之志”.[37]

○是年方中通[38]作數度衍凡例[39].

(34) “梅文鼐字和仲，與兄文鼎共成步五星式六卷，早卒”見杭世駿道古堂文集，第三一卷，第九頁.

(35) “梅文鼏字爾素，輯經星中西同異考一卷，授時步交食式一卷”，見杭世駿道古堂文集，第三一卷，第九頁.

(36) 魏刻歷算全書作四卷，毛際可梅先生傳亦作四卷. 道古堂文集第三○卷則作二卷. 勿菴歷算書目亦作二卷. 夾註中又題“少參三韓金鐵山先生刻於保定”. 故疇人傳第三七卷因謂“歷學騈枝二卷，後增爲四卷”. 梅氏叢書輯要卷首，校閱助刻姓氏列“三韓貴州巡撫，金公鐵山世揚校刊歷學騈枝，筆算於保定”. 今浙江圖書館藏有康熙丙戌(1706)年金世揚上參刊本筆算五卷.

(37) 見知不足齋叢書本勿菴歷算書目，第一頁.

(38) “方中通字位伯，一作位白，桐城人. 著有數度衍二十六卷”，見與梅定九書. 數度衍光緒庚寅(1890)太原王氏重校刊於成都.

(39) 數度衍凡例作於順治辛丑(1661)，藏篋中者，近三十年，康熙丁卯(1687)歲，其壻胡正宗爲刻於粵之恩州. 是書題二六卷，兩江總督採進本作二四卷，附錄一卷. 蓋以卷首三卷併爲一卷. 道古堂文集作二五卷. 文鼎稱“數度衍於九章之外蒐羅甚富”. 見勿菴歷算書目，第四五頁.

康熙元年壬寅(1662)三十歲.

是年成歷學駢枝四卷,自序於陵陽之東樓[40].

按康熙元年(1662)歷學駢枝,序稱壬寅(1662)之夏,獲從竹冠倪先生,受臺官通軌,大統歷算交食法[41].康熙三十三年中西經星同異攷則稱年近三十[42].而勿庵歷算書目則稱順治辛丑(1661),鼎始從同里倪竹冠先生受交食通軌[43].遂安毛際可梅先生傳,則稱年二十七(1659)師事前代逸民竹冠道士,倪觀湖[44].道古堂文集[45]及阮元疇人傳[46]因之.毛氏作傳,不逮梅氏自記之確,而勿菴歷算書目追記往事,當亦不及元年歷學駢枝序之近.

---

(40) 陵陽山在安徽宣城縣城內.

(41) 歷學駢枝自序,第一頁,宣城梅定九先生著.歷算全書柏鄉魏念庭輯刊,雍正元年(1723).

(42) 見中西經星同異考.

(43) 勿菴歷算書目,第一頁.

(44) 勿菴歷算書目,梅先生傳,第一……二頁.

(45) 道古堂文集,第三〇卷,第一頁.

(46) 阮元疇人傳,第三七卷,第一頁.

前拙著中國數學源流考略，因亦採壬寅三十歲師事倪觀湖之說[47].

梅文鼎中西經星同異考序稱"蓋自束髮受經於先君子，塾師羅王賓先生，往往於課餘晚步時，指示以三垣列舍之狀. 余小子自是知星之可識，而天爲動物；尋以從事制義，未遑精究，心竊好之. 不幸先君子見背，營求葬地，不暇以他爲. 無何余小子忽忽年近三十，……"[48]是文鼎父士昌蓋卒於文鼎三十歲前也.

康熙三年甲辰(1664)三十二歲.

甲辰方田通法序稱"客歲之冬，從竹冠先生飲令弟樂翁所. 得觀先生捷田歌訣，離奇出沒. ……今年春，里中有事履畝，或見問桐陵[49]法，遂出斯編

(47) 李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七二頁

(48) 見中西經星同異考.

(49) 日本關孝和遺著括要算法(1709)卷首，求周徑率；謂桐陵法周率六三，徑率二〇，周數三一五整. 疑與此所題同屬一人，而爲明季隱者也.

相質，命曰方田通法云[50]”.

○是年薛鳳祚[51]自序天學會通中“舊中法選要[52]”.

○是年七月楊光先上請誅邪教狀於禮部，八月初六會審湯若望等一日，初七日放楊光先寧家[53]. 利類思[54] (Buglio, Louis) 不得已辯(1665)自序，稱“甲辰冬，楊光先著不得已等書，余時方羈絏待罪[55]”.

康熙四年乙巳(1665)三十三歲.

---

(50) 方田通法序附筆算，第五卷梅氏叢書輯要，第五卷，第四頁.

(51) “薛儀甫名鳳祚，益都人，有歷學會通，河防輯要”，見陸燿切問齋文鈔，第二四卷，第一五頁.

(52) 見陸燿切問齋文鈔，第二四卷，第一五……一六頁.

(53) 見不得已，上卷，第一……四頁.

(54) “利類思意大利人，崇禎一〇年(1637)來華，康熙二二年(1684)卒於北京”. 見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略附錄，清華學報第一卷，第一期，第六八……六九頁間，民國一三年(1924)六月北京清華學校出版.

(55) 不得已辯，序，第一頁，1847年重刻本.

○是年四月楊光先授爲欽天監右監，辭職，不准．五月到監供事，同月再辭．六月三辭，同月又辭．始終不准．七月又將張其淳降級爲左監，楊光先補爲監正．李光顯爲右監．錢琦跋不得已，稱光先"不久卽以置閏錯誤，坐論大辟，蒙恩旨赦歸，中途爲西洋人毒死，而後西法復行，卒不可拔(56)"．先是因楊光先之反對，致殺欽天監五官，流徙劉賈二人家屬，湯若望僅獲赦免(57)．

○是年利類思自序不得已辯．此書題西士利類思著，仝會安文思(58) (Magalhaes, Gabriel de) 南

(56) 見不得已下卷，第三八……六三頁，及跋第二頁．

(57) 參看王先謙東華錄，康熙朝，第五卷，第五……六頁．北京欽文書局重印本，光緒一三年 (1887)；王之春國朝柔遠記第五卷，第五……六頁，廣雅書局刻本，光緒六年 (1880)；清文獻通考第二五六卷，第六頁．

(58) "安文思葡萄牙人，崇禎一三年 (1640) 入中國，康熙一六年 (1677) 卒於北京"．見張蔭麟明清之際西學輸入中國考略，附錄，清華學報，第一卷，第一期，第六八……六九頁間．

懷仁[59] (Verbiest, Ferdinand) 訂.

康熙五年丙午(1666)三十四歲.

○湯若望(Schall von Bell, Johann Adam)卒.[60]

康熙八年己酉(1669)三十七歲.

文鼎稱"憶歲己酉桐城方位伯言籌算之善,然未見其書. 無何,家澹如兄至自都門,有所攜算籌一握,而缺算例. 余爲補之. 澹如大喜,因問余曰:能易之以直寫,不更便乎?子彥姪亦以爲然,遂如言作之,凡三易稿而後成[61]".

○康熙八年康熙帝命大臣傳集西洋人,與監官

(59) 南懷仁號敦伯,比利時 Courtrai 附近之 Pitthem 人. 1623 年西曆十月九日生,1688 年一月二十八卒於北京,1659 年入中國. 見 Bosmans, H., "Ferdinand Verbiest", Revue des quest. scientifiques, pp. 195, 375 (Brussels, 1912),及"La problème des relations des relations de verbiest avec la Court de Russie", Annales de la Société d'Émulation pour l'étude de l'hist.……de la Flandre, p. 193 (Bruges, 1913).

(60) 湯若望,日耳曼之哥倫(Cologne)人. 生於1591年,至1666年西曆八月十五卒於北京. 以1622年入中國. 見 Smith, D. E., History of Mathematics, Vol. I. p. 436 (1923).

(61) 見勿菴歷算書目第三八頁.

質辯. 南懷仁因言吳明烜所造康熙八年歷之誤. 帝命大學士圖海等同赴觀象臺測驗. 明烜所造果誤. 圖海等請將康熙九年歷書交南懷仁推算. 欽天監正馬祐等又力辯前此楊光先所指摘西法之不當. 帝乃詔後用西洋新法[62].

○是年南懷仁改造觀象臺儀器,成新儀六式[63].

康熙十一年壬子(1672)四十歲.

妻□氏卒[64].

方程論六卷成於是年之冬[65].

按中西經星同異攷序稱"年近三十,始從倪觀湖

---

(62) 參看清文獻通考,第二五六卷,第六……九頁.

(63) 參看清通志,第二三卷,第一頁及第一二頁,浙江書局本,光緒一三年(1887).

(64) 歷算全書方程論第一卷發凡,第四……五頁,稱"歲壬子拙荆見背". 毛際可稱其"中年喪妻,更不復娶". 見勿菴歷算書目傳,第二頁.

(65) 歷算全書方程論,第一卷文鼎自序,第一頁,稱"論成於壬子之冬".

先生受臺官通軌算交食法……如是者數年.而和仲(文鼐)已前卒久矣''[66].是文鼐蓋卒於文鼎四十歲前一兩年也.

○是年楊燝南造眞歷書一卷,實測不驗.交刑部懲治[67].

康熙十二年癸丑(1673)四十一歲.

"康熙癸丑,宣城施副使閏章[68],總裁郡邑之志,以分野一門相屬.郡邑志中所刻,皆其稿也[69]."是年成"寧國府志分野稿一卷(已刻志中).康熙癸丑奉同侍講施愚山先生纂修郡乘,諸友人咸以此項見屬,因具錄歷代宿度分宮之同異及各種分野之法,皆以諸書爲徵''.是年又成"宣城縣志分野稿一卷(已刻志中).大體同府志[70]''.

(66) 見中西經星同異考.

(67) 東華錄,康熙朝,第一二卷,第七頁.

(68) "施尙白,名閏章,號愚山,宣城人,順治己丑(1649)進士,康熙己未(1679)博學鴻詞,授林院侍講,有學餘集".見陸耀切問齋文鈔,第二三卷,第一六頁.

(69) 見道古堂文集,第三〇卷,第八頁.

(70) 見勿菴歷算書目,第五……六頁.

康熙十三年甲寅(1674)四十二歲.

方程論六卷,是年之夏乃寫定成帙[71].

○南懷仁靈臺儀象志成於此年[72].

康熙十四年乙卯(1675)四十三歲.

文鼎嘗從金陵顧昭借鈔穆尼閣[73]天步眞原,及薛鳳祚天學會通,迄未獲交薛氏. 乙卯(1675)晤馬德稱(儒驥)諸君,始知其刻書南都,則薛氏歸已久[74].

---

(71) 見曆算全書方程論,第一卷,自序.

(72) 參看張蔭麟明清之際西學輸入中國考略,清華學報,第一卷,第一期,第四八頁. 文鼎稱"儀象志成於康熙甲寅,非蒙求本法",見勿菴歷算書目第一八頁.

(73) Le Rév Père Vanhée-Bibliotheca Mathematica Sinensis Pé-Fou, T'oung Pao, 1914稱"穆尼閣爲波蘭教士". 又"穆尼閣久居白門,方中通薛鳳祚皆從之學算,薛從穆傳對數術",語見數度衍凡例,第二頁,及道古堂文集,第三一卷,第九……一〇頁. 并參勿菴歷算書目,第四〇頁.

(74) 參看勿菴歷算書目,第三三……三四頁.

是年文鼎"始購得(新法)曆書於吳門姚氏，偶缺是(比例規)[75]解".

康熙十五年丙辰(1676)四十四歲.

○是年陳訏姪陳世仁(1676—1722)[76]生. 世仁著有少廣補遺一卷[77].

○李子金[78]是年成算法通義五卷(1676). 其後續成幾何易簡集(1679)，天弧象限表(1683)[79].

---

(75) 歷算全書度算釋例第一卷原序，第三頁，並參看勿菴歷算書目，第三八……三九頁.

(76) "陳世仁字元之，號換吾，康熙戊子(1708)舉人，生康熙丙辰(1676)正月二十三日，卒壬寅(1722)二月十一日，享年四十有七". 語見海寧陳氏宗譜，民國一四年(1925)，由海寧圖書館朱伯君向陳逵齋君徵得.

(77) 參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七三……七四頁.

(78) "李子金原名之鉉，以字行，鹿邑人，柘邑增廣生. 性高尚，隱居讀書，博學，贍文詞. 尤精算數………有隱山鄙事十二種". 見蔣炳歸德府志，第二五卷，第一四……一五頁，乾隆甲戌(1754)官修刻本.

(79) 參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七三頁.

康熙十六年丁巳(1677)四十五歲.

按丁卯(1687)方中通與梅定九書,稱"目不睹足下者十年於茲. ……初遇晤金陵者四[80]". 是文鼎於此年在南京.

康熙十七年戊午(1678)四十六歲.

是年愚山侍講欲偕之入都,不果[81].

文鼎"初購歷書佚此卷(即比例規解). 戊午,黃俞邰[82]太史,爲借到晥江劉潛柱先生本,乃鈔得之. 頗多譌誤,殊不易讀. 蓋攜之行笈半年,而通其指趣[83]"。

"戊午秋,介亡友黃俞邰太史虞稷借到晥江劉潛柱先生本(比例規解)抄補之. 蓋逾時而後能通其條貫,以是正其訛闕[84]."

---

(80) 見數度衍卷首,與梅定九書,第一頁.

(81) 勿菴歷算書目第六頁.

(82) "黃俞邰(六三),虞稷,崇禎二年己巳(1629)生,康熙三十年辛未(1691)卒",見續疑年錄,第四卷,第一一頁.

(83) 歷算全書度算釋例第一卷原序,第四頁.

(84) 勿菴歷算書目第三八……三九頁.

"古算書載程大位算法統宗者,惟劉徽九章尚爲宋版. 鼎嘗於黃俞邰處見其方田一章. 算書中此爲最古[85]". 是年九月自序所著籌算二卷[86].

康熙十八年己未(1679)四十七歲.

文鼎稱"己未愚山奉命纂修明史,寄書相訊,欲余爲歷志屬稿. 而余方應臬臺金長眞先生之召,授經官署,因作此(卽歷志贅言一卷)寄之[87]".

"己未與山陰友人何奕美言測算之理,爲作渾蓋地盤. 而苦之銅工,爰作此(璇璣)尺以代天盤[88]……"。

(85) 勿菴歷算書目第四四頁. 黃俞邰所藏宋元豐七年(1084)本九章後歸毛扆(1640-?). 見康熙甲子(1684)毛扆算經跋,附緝古算經後. 知不足齋叢書第八集. 戴敦元九章算術細草圖說序,以爲定九未見九章,蓋屬失考.

幷參看黃虞稷,周在浚徵刻唐宋祕本書目第一七頁,長沙葉氏刻本.

(86) 歷算全書,籌算第一卷自序,第一頁.

(87) 勿菴歷算書目,第六頁.

(88) 勿菴歷算書目,第三〇頁,"璇璣尺解一卷"條.

"己未始為山陰友人何奕美作尺,亦稍以己意增損推廣之,而未暇為立假如[89]".

康熙十九年庚申(1680)四十八歲.

文鼎稱"表景生於日軌之高下,而日軌又因於里差.獨四省者陝西河南北直江南也.……或當初只此四處耶.然其中亦有傳訛之處.庚申歲,余養痾白下,西域友人馬德稱儒驥以此致詢.遂為訂定,并附用法,以補其缺[90]".

文鼎稱"歲庚申晤桐城方素伯中履[91]見鼎所作尺,驚問曰,君何從得此.蓋家兄久欲為此而未能.履遊豫章拾得遺本,寄之,乃明厥製耳[92]".

梅文鼎薛鳳祚本不相聞知[93],是年因汪發若先

(89) 歷算全書,度算釋例,第一卷原序,第三……四頁.

(90) 勿菴歷算書目,第一二……一三頁,"四省表景立成一卷"條.

(91) "方中履字素伯,中通三弟,曾序數度衍",見數度衍卷首,家序,第一……三頁.

(92) 勿菴歷算書目,第三八……三九頁.

(93) 勿菴歷算書目,第三四頁.

生燦作宰緇川託致一書,而薛(鳳祚)先生方病革,遂未奉其回示[94]".

康熙二十年辛酉(1681)四十九歲.

是年夏歷四月初二日亥時,長孫穀成生[95].

○是年江永[96](1681—1762)[97]生.

○杜知耕[98]是年著數學鑰六卷(1681),又作幾何論約七卷(1700).文鼎著方程論,曾與知耕

---

(94) 仝上.

(95) 語見梅氏宗譜.

(96) "江永字愼修,婺源人,因梅文鼎歷算全書爲之發明訂正,作數學八卷續一卷等書",見中西算學叢書初編第一四,……一九册,上海鴻寶石印本光緒二二年(1896).

(97) "江愼修(八二)永,康熙二十年辛酉(1681)生,乾隆二十七年壬午(1762)卒". 見錢大昕疑年錄第四卷,第二二頁,鈔本,葉友芝舊藏.

(98) "杜知耕字端甫,康熙丁卯(1687)舉人……好讀書,尤精數學.著有數學鑰六卷.李子金序而傳之". 見何熠柘城縣志第一〇卷,第一〇……一一頁,乾隆三八年(1773)官修刻本.文鼎稱"杜端甫數學鑰圖註九章,頗中肯綮". 見勿菴歷算書目第四五頁.

及孔興泰[99],袁士龍[100]共相質正,乃重加繕錄,以爲定本[101].

康熙二十一年壬戌(1682)五十歲.

勿菴籌算七卷,宣城梅定九先生著.康熙□□□年蔡璣先刻於金陵.後江常鎭道魏公荔彤重刻於歷算全書內[102].文鼎稱"友人蔡璣先見而悅之,爲雕版於金陵[103]".

---

(99) "孔興泰字林宗,睢州人.著大測精義,求半弧正弦法與梅氏正弦簡法補說,不謀而合".見杭世駿道古堂文集第三一卷,第三一頁.並參看勿菴歷算書目第四七……四八頁.

(100) "袁士龍字惠子,錢塘人,受星學於黃弘憲.西域天文有三十雜星之占,未譯中土星名.士龍有考,與梅氏不謀而合".見杭世駿道古堂文集第三一卷,第三一頁.並參看勿菴歷算書目第一二及二二頁.

(101) 見歷算全書方程論第一卷發凡,第四頁.

(102) 見梅瑴成增删算法統宗卷首,古今算學書目,第一一頁,江蘇書局校刻,光緒戊戌(1898).

(103) 見勿菴歷算書目第三八頁.

"金陵文學蔡君璣先璿,於康熙二十□年,首刻籌算於金陵[104]".

"蔡璿字璣先,江寧人.從文鼎學算爲刻中西算學通[105]".按施彥恪徵刻歷算全書啓,亦稱,"惟昔璣先蔡子,首鋟籌算於白門[106]".觀此則梅氏算籍之見於雕版者,籌算爲最先.時在康熙二十年以後也.

是年長夏述輕重比例三線法[107].

○是年王錫闡卒,年五十五[108].

---

(104) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(105) 見杭世駿道古堂文集,第三一卷,張一四頁.按中西算學通乃以勿菴籌算七卷爲第一書,勿菴筆算五卷爲第二書,勿菴度數二卷爲第三書,比例數解四卷爲第四書,三角法舉要五卷爲第五書,方程論六卷爲第六書,幾何摘要三卷爲第七書,句股測量二卷爲第八書,九數存古十卷爲第九書.參看勿菴歷算書目,第三七……四四頁.蔡璿所刻,祇中西算學通之第一種也.

(106) 見勿菴歷算書目啓第三頁.

(107) 見歷算全書度算釋例,第二卷,第五〇頁.

(108) "王曉庵(五五)錫闡,生崇禎元年戊辰,卒康熙二十一年壬戌",見陸心源三續疑年錄,第八卷,第二四頁,引王濟撰墓志.

康熙二十三年甲子(1684)五十二歲.

文鼎稱"康熙甲子制府于(成龍)[109]公,檄修通志,鼎以事辭,未往. 皖江太史陳默公先生焯專函致書,以江南分野稿見商,介家叔瞿山清督促至再.余方病瘧小愈,力疾爲之潤色,頗費經營. 無何,默翁亦辭志局矣 聊存茲稿[110]". (即江南通志分野擬稿一卷).

道古堂文集,梅文鼎傳於康熙癸丑(1673)句下稱,"明年制府于成龍檄修通志,亦以分野相屬,力疾成稿,而志局易人,存於家[111]",蓋誤記也.

(109) "于北溟名成龍,永寧人,官兩江總督,謚清端,有政書'. 見陸燿切問齋文鈔第一一卷,第五頁. "于北溟(六八)成龍,萬歷四十五年丁巳(1618)生,康熙二十三年甲子(1684)卒",見錢椒補疑年錄,第四卷,第八頁. 陸心源案經義齋集有墓誌.

(110) 見勿菴歷算書目,第七頁.

按梅清,1620年生,1697年卒,見三續疑年錄卷之八,第一七頁.

(111) 見道古堂文集,第三〇卷,第八頁.

按"康熙二十年于成龍由直隸巡撫,遷爲江南江西總督",見東華錄康熙二八,第八頁. 則檄修通志,不在癸丑之明年,明甚.

是年自序弧三角舉要於柏梘山中[112].

康熙二十五年丙寅(1686)五十四歲.

潘耒[113]序方程論稱"吾邑有隱君子曰:王寅旭先生,深明歷理,兼通中西之學.余少嘗問歷焉.……今寅旭亡久矣.余徧行天下,求彷彿其人者,而不可得.歲丙寅過宣城,始得梅子[114]".

文鼎稱"吳江王寅旭先生錫闡,深明算術,著撰極富.初太史潘稼堂先生爲鼎稱述之……鼎嘗評近代歷學以吳江爲最.識解在青州以上.惜乎不能蚤知其人與之極論此事.稼堂屢相期訂,欲盡致王書,屬余爲之圖註,以發其義類,而皆成虛約,生平之一憾事也[115]".

(112) 見歷算全書,弧三角舉要,舊序,第一……二頁.

(113) "潘耒字次畊,吳江人,王錫闡與其兄檉善.館於其家,講論常窮日夜,勸其學歷……",見道古堂文集第三一卷,第一三頁.

"潘次畊,名耒,號稼堂,吳江人,康熙己未(1679)博學鴻詞.以布衣入翰林,官檢討,有遂初堂文集".見切問齋文鈔,第一五卷,第一六頁.

(114) 見梅氏叢書輯要第一一卷,方程論敘,第一頁.

(115) 見勿菴歷算書目,第三四……三五頁.

○是年莊亨陽(1686-1746)生[116]. 著有莊氏算學八卷[117].

○是年陳訏子陳世佶(1686-1749)[118]生. 著有弧矢割圜一卷,開方捷法一卷[119]. 句股演法一卷,少廣補遺發明一卷[120]. 又校閱其父所著句股引蒙五卷.

康熙二十六年丁卯(1687)五十五歲.

文鼎於方程著論校刻緣起稱"歲丁卯薄遊錢塘,

(116) "莊復齋(六一),亨陽,生康熙二十五年丙寅(1686),卒乾隆十一年丙寅(1746)",見陸心源三續疑年錄,第九卷,第七頁引望溪集.

(117) 李儼所藏光緒己丑(1889)刊秋水堂算法(即莊氏算學),無卷數. 內分八種,第一種爲梅勿菴開方法. 四庫著錄爲八卷.

(118) "陳佶,字士常,號純齋,陳訏第六子,康熙癸巳(1713)舉人,生康熙丙寅(1786)二月六日,卒乾隆己巳(1749)二月二十五日,享年六十有四",見海寧陳氏宗譜.

(119) 錢寶琮藏開方捷法一卷,弧矢割圓一卷,陳世佶輯,玄孫塈校刊一册.

(120) 詳見裘冲曼所編天文算學書目彙編(未刊).

同里阮於岳鴻臚付貲授梓,屬以理裝北上,未遂殺青[121]".

又於勿菴歷算書目稱"初稼堂賞余此書(卽方程論),阮副憲于岳爲付刻貲,而余未及爲.嘉魚明府李安卿鼎徵[122]乃刻於泉州[123]".

是年方中通有與梅定九書[124].

康熙二十七年戊辰(1688)五十六歲.

毛際可稱"曩者歲在戊辰,余與梅定九先生晤於西湖.遂傾蓋定交,日載酒賦詩.余爲題其飲酒讀書圖而別[125]".

梅文鼎亦稱"是年自武林歸[126]".

---

(121) 見歷算全書方程論第一卷發凡,第四頁.

(122) "李鼎徵,字安卿,文貞公(李光地)次弟,舉人,嘉魚令.爲梅氏刻方程論於泉州.幾何補編成,手爲謄寫".見道古堂文集,第三一卷,第一三頁.

(123) 見勿菴歷算書目,第四三頁.

(124) 見方中通數度衍卷首與友書,第一……四頁,太原王氏重校,刊於成都,光緒庚寅(1890).

(125) 見勿菴歷算書目傳,第一頁.

(126) 見中西經星同異考.

○是年南懷仁(Verbiest, Ferdinand)卒[127].

康熙二十八年己巳(1689)五十七歲.

是年入都,獲交李光地(1642–1718)[128].

在京續遇無錫顧景范(祖禹),北直劉紀莊(獻廷),嘉禾徐敬可(善),朱竹坨(彝尊),淮河閻百詩(若璩),寧波萬季野(斯同)[129].

是年"始從嘉禾徐敬可善鈔得王錫闡圜解一卷,為之訂其缺誤.又續讀其測食諸稿,歷法書二卷,并其所定大統法及三辰儀晷,加以附論,成王寅旭書補註[130]".

---

(127) 見註59.

(128) 見勿菴歷算書目,第一四頁."李晉卿名光地,號厚菴,安谿人.康熙庚戌(1670)進士.官大學士.諡文貞.有榕村集".見陸燿切問齋文鈔第一卷,第一三頁."李晉卿(七七),光地.明崇禎一五年壬午(1642)生,(清)康熙五十七年戊戌(1718)卒".見吳修續疑年錄第四卷,第四三頁,鈔本,莫友芝舊藏.

(129) 參看歷算全書方程論,第一卷發凡,第四頁.

(130) 參看勿菴歷算書目,第三四……三五頁.

在都門成明史歷志擬稿三卷[131]，手自步算，凡篝燈不寢者二月．黃宗羲(1610–1695)[132]子百家[133]於此時從問曆法[134]．

方苞作文鼎墓表，稱"劉輝祖嘗與同舍館，告苞曰，吾每寐，覺漏鼓四五下，梅君猶篝燈夜誦，昧爽則已興矣[135]"．

是年與廣昌揭暄通訊，摘錄其所寄寫天新語草稿，成寫天新語鈔存一卷[136]．

康熙二十九年庚午(1690)五十八歲．

---

(131) 按大統歷志四庫本作八卷，附錄一卷 刊入明史作四卷．而勿菴歷算書目作明史歷志擬稿三卷．

(132) "黃太冲(八六)宗羲，明萬歷三八年庚戌(1610)生，(清)康熙三四年乙亥(1695)卒"．見錢大昕疑年錄，第四卷，第二〇頁，鈔本，莫友芝舊藏．

(133) "黃百家，字主一，餘姚人．著句股矩測解原上下卷"．參看勾股矩測解原．

(134) 參看勿菴歷算書目，第七……八頁．

(135) 道古堂文集，第三一卷，八頁引．

(136) 參看勿菴歷算書目，第三六頁．

是年潘耒序文鼎所著方程論[137].

文鼎稱"庚午蜡月既望,晤遠西安先生,談及算數,云量田可以不用履畝[138]".

康熙三十年辛未(1691)五十九歲.

是年夏,移榻於中街李光地寓邸,始着手作歷學疑問.如是數月,得稿三十餘篇,授徒直沽,又陸續成其半[139].

是年與滄州老儒同客天津[140].

康熙三十一年壬申(1692)六十歲.

文鼎稱"劉文學介錫,滄洲老儒也.頗留心象數.辛未,壬申與余同客天津.承有所問,並據歷法正理告之".成答劉文學問天象一卷[141].

壬申春月,文鼎偶見館童屈篾爲燈,詫其爲有法

(137) 見梅氏叢書輯要,第一一卷,第一頁.

(138) 見歷算叢書,句股闡微,第四卷,第二一頁.

(139) 見勿菴歷算書目,第一四……一五頁.

(140) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

(141) 見勿菴歷算書目,第一三頁.

之形. 因以測量全義[142], 幾何原本[143] 量體諸率, 攷其根源, 成幾何補編四卷[144].

文鼎稱"歲壬申, 余在都門, 有三韓林□□寄訊楊時可及丁令調, 屬問四乘方, 十乘方法, 因稍爲推演, 至十二乘方, 亦有條而不紊". 成少廣拾遺一卷[145].

文鼎又稱"嘗見九章比類[146], 歷宗算會[147], 算法

---

(142) 測量全義十卷, 明徐光啓, 與羅雅谷, 湯若望共編. 明崇禎四年 (1631) 八月第二次進呈, 爲崇禎歷書之一.

(143) 幾何原本六卷, 明徐光啓與利瑪竇共譯, 萬歷三十五年 (1607) 春譯成, 並在京出版.

(144) 參看勿菴歷算書目, 第四六頁, 及歷算全書幾何補編, 自序第一頁.

(145) 見勿菴歷算書目, 第四五頁.

(146) 文鼎稱"錢塘吳信民九章比類, 西域伍爾章遵韜有其書, 余從借讀焉". 見勿菴歷算書目, 第四四頁.

"九章比類算法, 景泰庚午 (1450) 錢塘吳信民作, 共八本". 見算法統宗卷一三.

(147) 文鼎稱"山陰周述學著歷宗算會, 於開方, 弧矢, 頗詳". 見勿菴歷算書目, 第四四頁. 李儼藏鈔本歷宗算會一五卷八册, 前有嘉靖戊午 (1558) 周文燭撰序.

統宗[148]俱載有開方作法之圖,而僅及五乘,…….同文算指[149]稍變其圖,具七乘方算法…… 西鏡錄演其圖爲十乘方[150],…… 康熙壬申余在都門,有友人傳遠問,屬詢四乘方十乘方法……[151]''. 是年秋在北京,晤袁士龍[152].

康熙三十二年癸酉(1693)六十一歲.

是年二月自序所撰筆算五卷[153].

---

(148) 算法統宗十三卷,明新安程大位撰. 萬歷癸巳(1593)浙江吳繼綬爲之序.

(149) 同文算指前編二卷,通編八卷,別編一卷,題利瑪竇授,李之藻演. 刻於天學初函. 前編有萬歷癸丑(1613)李之藻序,及萬歷甲寅(1614)徐光啓序.

(150) 文鼎稱"西鏡錄不知誰作,然其書當在天學初函之後知者……寫本殊多魯魚,因稍爲之訂". 見勿菴歷算書目第四六及四七頁.

(151) 見歷算全書,少廣補遺,第一卷,小引第一頁.

(152) 見梅氏叢書輯要,第六〇卷,雜著西國三十雜星考. 或歷算全書,揆日候星紀要,第一卷,第四〇頁.

(153) "見歷算全書,筆算序凡,自序第一……二頁.

是年四月李光地序所著歷學疑問[154].

子以燕中癸酉科舉人[155].

是年南旋,計去京師凡五載[156].

康熙三十三年甲戌(1694)六十二歲.

是年中秋,序其弟文鼏所著中西經星同異攷,其後此書收入四庫[157]. 文鼏又撰南極諸星攷一卷,刻入檀几叢書[158]. 又刊刻利瑪竇(Ricci, Matteo)[159]所譯經天該及附圖[160].

---

(154) 見歷算全書,歷學疑問序第一……三頁.

(155) 見梅氏宗譜,及梅穀成增删算法統宗凡例,第一頁,江蘇書局校刻,光緒戊戌(1898).

(156) 見勿菴歷算書目,第一五頁.

(157) "中西經星同異考一卷,一册",見壬子文瀾閣所存書目第三卷,第二〇頁. 指海本,同.

(158) 檀几叢書,武林王丹麓編刻.

(159) "萬歷九年(1581)利瑪竇(1529—1610)始汎海九萬里,抵廣州之香山澳……至二八年(1601)入京師中官馬堂以其方物進獻,自稱大西洋人",見明史第三二六卷,第五頁. 上海中華書局印,民國一二年(1923). 並參看李儼中國數學源流考略,北京大學月刊,第一卷,第五號,第六八頁.

(160) 劉鐸古今算學書錄天文第七,第三頁載"經天該附圖,明利瑪竇譯,康熙年梅文鼐刊本". 按文鼐乃文鼏之誤.

康熙三十四年乙亥(1695)六十三歲.

是年文鼎由郡廩生應歲貢[161].

○是年黄宗羲卒,年八十六[162].

康熙三十五年己卯(1699)六十七歲.

是年文鼎在閩遇林同人(侗)(1627–1714)[163],借鈔其寫本古曆列星距度因成古曆列星距度考一卷[164].

是年自閩北歸,遊西湖[165].

穀成亦稱其祖"南至閩,北抵上谷,金臺,中歷齊楚,吳,越[166]".

是年同里施彥恪讓徵刻歷算全書啓時,文鼎已

(161) 見梅氏宗譜.

(162) 見註132.

(163) "林同人(八八),侗生天啓七年乙卯(1627),卒康熙五三年甲午(1714)". 見陸心源三續疑年錄,第八卷,第一八頁,引福建通志,參年譜.

(164) 參看勿菴歷算書目,第三六……三七頁.

(165) 見勿菴歷算書目傳,第一頁.

(166) 見梅穀成增删算法統宗凡例,第五頁.

著歷學書五十八種，算法書二十二種共成八十種[167].

施彥恪又謂"疑問三卷見燕山節度之新刊，方程一編得泉郡孝廉而廣布[168]"，是李光地刻其歷學疑問於大名，李安卿刻其方程論於泉州，均前此數年事.

康熙三十九年庚辰(1700)六十八歲.

是年中秋，偶誥寒疾，諸務屏絕，成環中黍尺五卷，重九前七日自序其書[169].

文鼎稱"十餘年前曾作弧三角，所成句股書一册，稿存兒輩行笈中，覓之不可得也. 庚辰年，乃復作此[170]"(卽正弧句股).

○杜德美(Jartoux, Pierre, 1670－1720)[171]來中國

(167) 見勿菴歷算書目，啓，第三頁.

(168) 見勿菴歷算書目，啓，第三頁.

(169) 見梅氏叢書輯要第三四卷，環中黍尺，小引，第一頁.

(170) 見歷算全書，弧三角舉要，第二卷，第五頁.

(171) 參看李儼中國數學源流考略，北京大學月刊，第一卷，第五號，第七〇……七一頁. 並參看梅氏叢書輯要，第六一卷，附錄一，赤水遺珍，求周徑密率捷法(譯西士杜德美法).

介紹求周徑密率捷法.

康熙四十年辛巳(1701)六十九歲.

梅穀成稱"籌算七卷,筆算五卷,平三角法五卷,弧三角法五卷,塹堵測量二卷,環中黍尺五卷,方程論六卷,以上六種,俱宣城梅先生著. 安溪李文貞公併歷學疑問(三卷),歷學駢枝(四卷),交食蒙求(三卷),俱刻於上谷[172]".

穀成又稱"安溪相國李文貞公厚菴督學畿輔,校刊歷學疑問進呈御覽,有恭紀刻於本卷. 又巡撫直隸,校刊三角法舉要,環中黍尺,塹堵測量等書九種於上谷[173]".

文鼎於弧三角舉要有康熙辛巳七夕前二日識語一則,是上谷九種之刻,至早在辛巳年[174].

康熙四十一年壬午(1702)七十歲.

---

(172) 見梅穀成增刪算法統宗卷首,書目,第一一頁.

(173) 見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(174) 見歷算全書,弧三角舉要第二卷,第五頁. 今北京大學藏書室藏有勿菴歷算全書九種,九冊,未知是否李光地刻本.

古越圖書館藏有李光地,上谷刻本;梅文鼎撰,弧三角舉要五卷.

是年十月李光地以撫臣扈蹕德州,進所刻歷學疑問三卷,文鼎以是知名(175).

是年自序所著勿菴歷算書目於坐吉山中. 計歷學書六十二種,算學書二十六種,共八十八種(176).

康熙四十二年癸未(1703)七十一歲.

文鼎稱"歲癸未,匡山隱者毛心易乾乾,惠訪山居,偶論周徑之理. 因復推論及方圓相容相變諸率,益覺精明……(177)".

文鼎又稱"癸未歲匡山隱者毛心易乾乾,偕其壻中州謝野臣(廷逸),惠訪山居,共論周徑之理,因復反復推論方圓相容相變諸率(178)".

文鼎又稱"康熙癸未,季弟爾素有比例規用法假如之作". "方爾素撰此書時,安溪相國以冢宰

---

(175) 見勿菴歷算書目,第一五頁. 及歷算全書,恭紀歷學疑問,第一頁.

(176) 參看勿菴歷算書目,知不足齋叢書本,自序第一頁.

(177) 見勿菴歷算書目,第五一頁,疑壬午以後所記.

(178) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說,第一頁.

開府上谷，公子世得，鍾倫[179]銳意歷算之學，余兄弟及兒以燕下榻芝軒[180]"．

文鼎稱"授時歷於日躔盈縮，月離遲疾，並云以算術垜積招差立算，而今所傳九章諸書，無此術也．……"余因李世得[181]之疑．而試爲思之．其中原委，亦自歷然．爰命孫瑴成衍爲垜積之圖，得書(平立定三差詳說)一卷[182]．

康熙四十四年乙酉(1705)七十三歲．

是年閏夏康熙南巡，召見文鼎於德水舟次者三．進三角法舉要五卷[183]．

康熙四十五年丙戌(1706)七十四歲．

---

(179) "李鍾倫字世德，文貞公(長)子，康熙癸酉(1693)舉人，……甲數乙數用法甚奇，本以赤道求黃道．鍾倫準其法以黃求赤，作爲圖論，又製器以象之"．見道古堂文集，第三一卷，第一三頁．

(180) 見歷算全書，度算釋例，第一卷，原序，第三……四頁．

(181) 歷算全書平立定三差詳說，第一卷，序，第一頁，李世得作李世德，梅氏叢書輯要卷首仝．

(182) 見勿菴歷算書目，第二五……二六頁．

(183) 參看梅氏宗譜及勿菴歷算書目，第四一頁．

文鼎稱"方爾素撰此(比例規用法假如)書時,安溪相國以冢宰開府上谷,……,無何爾素挈兒燕南歸,相國入參密勿.而世得亡兒相繼亡去,余亦大病瀕死,……(184)".

○是年李鍾倫卒,年四十四(185).

康熙四十六年丁亥(1707)七十五歲.

文鼎稱"爾素有比例規用法之作,又五年丁亥(1717)重加校錄,示余屬爲序(186)".

康熙四十九年庚寅(1710)七十八歲.

文鼎稱"庚寅在吳門,又得錫山友人楊崑生(定三)方圓訂註圖說,益覺精明(187)".

---

(184) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第四頁.

(185) "李世得(四四)鍾倫,生康熙二年癸卯(1661),卒康熙四十五年丙戌(1706)". 見陸心源三續疑年錄,第九卷,第四頁,引榕村集. "以燕年五十二,先文鼎卒",見宣城縣志. 錢寶琮君因文鼎有"世得亡兒相繼化去"之語,假定以燕之卒亦在丙戌年(1706),則以燕當生於順治一二年乙未(1655),文鼎二三歲.

浙江圖書館藏有康熙四五年梅文鼎筆算五卷刻本,一册.

(186) 見歷算全書,度算釋例,第一卷,原序第三頁.

(187) 見梅氏叢書輯要,第二四卷,方圓冪積說第一頁.

文鼎又稱"庚寅之冬,偶有吳門之遊,(楊)學三(作枚)[188]同吾友秦子二南,挐舟過訪於陳泗源學署,出示此(楊學山歷算書)書.余亦以幾何補編相質[189]".

楊學山以遡源星海四册,王寅旭歷書圖註二册,三角法會編二册,借文鼎[190].

康熙五十一年壬辰(1712)八十歲.

是年臘月序錫山友人楊學山歷算書於坐吉山中[191].孫瑴成供奉內廷,欽賜監生[192].

康熙五十二年癸巳(1713)八十一歲.

---

(188) 楊作枚字學山,定三之孫,著有解割圓之根一卷,刻入歷算全書為魏荔彤訂補梅勿菴歷算全書.

(189) 見歷算全書,錫山友人楊學山歷算書序第一……二頁.

(190) 見上書.

(191) 見歷算全書第一册,卷首,題三角法會編梅序第一……二頁.

(192) 見梅氏宗譜.

孫瑴成賜舉人，彙編製律歷淵源[193].

瑴成亦稱"余於康熙五十二年間充蒙養齋彙編官[194].

康熙五十三年甲午(1714)八十二歲.

○是年王元啟(1714—1786)生[195].著有句股衍，角度衍，九章雜論[196].

康熙五十四年乙未(1715)八十三歲.

是年三月十九，文鼎寄書與楊學山[197].

孫瑴成賜進士，給假省親，賜第於(北京)宣武門外

---

(193) 見梅氏宗譜. 按律歷淵源一百卷，計歷象考成上編一六卷，下編一〇卷，表一六卷. 律呂正義上編二卷，下編二卷，續編一卷 數理精蘊上編五卷，下編四〇卷，表八卷.

(194) 見梅氏叢書輯要，第六二卷，操縵巵言.

(195) "王惺齋(七三)元啓，生康熙五十三年甲午(1714)，卒乾隆五十一年丙午(1786)". 見陸心源三續疑年錄，第九卷，第一一頁，引復初齋集.

(196) 見阮元疇人傳，第四一卷，第二〇……二四頁，觀我生室彙稿本.

(197) 見歷算全書，歷學問答，第一卷，第三四……三五頁.

之日南坊[198].

康熙五十六年丁酉(1717)八十五歲.

是年仲冬文鼎自序所著度算釋例二卷,蓋因年希堯[199]談及尺算,乃以舊稿,并其弟文鼐所作算例,重加參校,比校整齊而授梓人[200].

廣寧年希堯爲序度算釋例於金陵藩署[201].

康熙五十七年戊戌(1718)八十六歲.

魏荔彤稱"歲在戊戌偶攝法司,因與諸同人設館白下,延致(文鼎)先生,訂正所著.輸資刊行.先生旣以寧澹爲志,不樂與俗吏久處.而世會變遷,雲散蓬飛,竟未卒事.閱二載,僻居海中,官齋閒寂,復馳函敬求存稿十餘種.……不意哲人遂萎矣[202]".

(198) 見梅氏宗譜.

(199) "廣寧廣東巡撫,年公允公(希堯)校刊方程,度算於江寧藩署".見梅氏叢書輯要卷首,校閱助刻姓氏.

(200) 見歷算全書度算釋例,第一卷,自序,第一頁.

(201) 見歷算全書度算釋例,第一卷,年序,第一頁.

(202) 見歷算全書卷首,魏序,第一……二頁.

○是年年希堯自序測算刀圭三卷(203).

○是年陳萬策成進士(204). 萬策曾與徐用錫(205), 魏廷珂(206), 王蘭生(207), 王之銳(208), 同校文鼎歷算書(209).

康熙五十九年庚子(1720)八十八歲.

○是年杜德美卒, 年五十一(210).

---

(203) 見李儼所藏測算刀圭三卷鈔本.

(204) "陳對初名萬策, 又字謙季, 晉江人, 康熙戊戌進士, 官詹事府詹事. 有近道齋集". 見切問齋文鈔, 第二四卷, 第一〇頁.

(205) "徐用錫字公壇, 宿遷人, 官翰林院待讀", 參看梅氏叢書輯要, 卷首, 校閱助刻姓氏.

"徐用錫字壇長, 順治十三年(1656)生". 見續疑年錄卷四.

(206) "魏廷珍字君璧, 景州人, 官大司空", 參看上書.

(207) "王蘭生字振聲, 交河人, 官少宗伯", 參看上書.

(208) "王之銳字仲退, 河間人, 官國子監", 參看上書.

(209) 參看勿菴歷算書目, 第五〇頁, 梅氏叢書輯要卷首, 校閱助刻姓氏, 道古堂文集第三一卷, 第八頁.

(210) 參看李儼中國數學源流考略, 北京大學月刊, 第一卷, 第五號, 第七〇頁.

康熙六十年辛丑(1721)八十九歲.

是年文鼎歿[211].

"穀成內廷供奉,越數年,給假歸省,值公病,得侍疾數月而卒. 特命江寧織造曹公治喪事,營葬地[212]."

按文鼎卒時,孫穀成玕成尙健在. 穀成卒於乾隆二十八年癸未(1763)十月十六日,時年八十三[213]. 玕成卒年未詳,宗譜稱年七十四卒[214]. 穀成長子鈖,曰子鈁,各年二十六,先穀成卒[215].

---

(211) 見梅氏宗譜.

(212) 見上書.

(213) 見上書.

(214) 見上書. 按魏荔彤雍正癸卯(1023)兼濟堂刻歷算全書序,尙稱玉汝昆季,乾隆辛巳(1721)穀成所輯梅氏叢書輯要,除第一……五卷,第五五……五六卷,及第六〇……六二卷外,均與玕成同校輯. 又庚辰(1760)所作增删算法統宗,亦有玕成校字. 是玕成於乾隆辛巳(1721)尙健存也.

(215) 見增删算法統宗,凡例,第五頁.

中算史論叢

（二）

李儼著

序

民國十七年曾將中算史論文之發表於各雜誌者,輯成中算史論叢第一册.其後續輯得二,三兩册,交商務印書館排印.民國二十一年一月二十九日該館被焚,全稿盡失.事後多方搜求,始將各文之散在各雜誌者收集完全,再重加修正,今幸告成.第二册所收者,計有下列各篇:

中國數學史導言(學藝百號紀念增刊,二十二年三月,第一三九至一六〇頁);中算史之工作(科學雜誌第十三卷第六期,十七年六月,第七八五至八〇九頁);二十年來中算史料之發見(科學雜誌第十七卷第一期,第一至一五頁);二十年來中算史論文目錄(國立北平圖書館館刊,第六卷第二號,第五七至六五頁);永樂大典算書(圖書館學季刊,第二卷第二期第一八九至一九五頁);宋楊輝算書考(圖書館學季刊,第四卷第一期,第一至二一頁);東方圖書館善本算書解題(國立北平圖書館館刊,第七卷第一號,第七至一一

頁);明清算家之割圜術研究(科學雜誌第十二卷第十一期,第十二期:第十三卷第一期,第二期,十六年十一月,十二月;十七年一月,二月第一四八七至一五二〇頁,第一七二一至一七六六頁,第五三至一〇二頁,第二〇〇至二五〇頁),李善蘭年譜(清華學報第五卷第一期,第一六二五至一六五一頁).

中華民國二十三年一月二十五日

李儼記於西安

中國數學史導言

目　次

1. 小引。
2. 史前結繩之傳說。
3. 古代數字。
4. 黃帝隸首作數之傳說。
5. 九九之傳說。
6. 古代數學教育。
7. 算經十書佚文。
8. 九章條目
9. 魏劉徽注九章。
10. 南宋祖冲之著綴術。
11. 後周甄鸞注算經。
12. 唐代印度數名輸入中國。
13. 元代回回算法輸入中國。
14. 明清之際西洋算法輸入中國。

1. 小引

近十餘年來,修治中國數學史事,研求所得,計出版單行本三種,論文三十餘篇.前後凡百數十萬言.而意有未盡,乃復多方探討,時圖整理冀其早成定本.但中算史料尙時有發見,而海內外學者之所貢獻,足備

考訂者,爲事至多.惟以見聞不一,時地限制,所得時復參差.爲徵古今殘佚之典,兼求中外折衷之論,計惟時貢一得之愚,藉獲他山之助.去年十月爲應中華學藝社之約,寫成中國數學史導言一文,隨筆散記,未留原稿.一二八之變,此稿在上海商務印書館印刷者,全成灰燼.今適一週年,重寫此篇,再應學藝百號紀念增刋之徵,倘望海內外通達與以教正是幸.

民國二十一年十月十日記於鄭州

2. 史前結繩之傳說

史前結繩之傳說,見於舊籍者,則:

易繫辭云:「上古結繩而治,後世聖人,易之以書契」.

劉知幾(661–721)史通,「古今正史」稱:「易曰:上古結繩以理,後世聖人易之以書契.儒者云:伏羲氏始畫八卦,造書契以代結繩之政,由是文藝生焉」.

宋祝穆新編古今事文類聚別集卷三三,引書序云:「始造書契,以代結繩之政」.

北堂書鈔卷一二引典論云:「(伏羲立)結繩而治」.

後漢武梁石室像贊云:「伏戲,倉精,初造王業,畫卦結繩,以理海內」.

唐李善文選卷六注引:「莊周曰:昔者軒轅氏,赫胥氏,

尊盧氏,虙戲,神農氏,當是時人結繩而用之.」

是爲史前結繩傳說之一般.前此日本能登,駿河二國,在德川時代[1],及今日北美土人[2],及西藏[3],琉球[4],尙有用之者.

3. 古代數字

易繫辭云:「上古結繩而治,後世聖人,易之以書契」,書契之作,似遠在殷周以前.考釋名云:「契,刻也,刻識其數也」,墨子備城門篇云:「必數城中之木,十人之所舉爲十挈,五人之所舉爲五挈,凡輕重以挈爲人數」.挈假借爲契,十挈五挈卽刻以紀數者,故書契始用於算數.而今之可考者,祇有殷之甲骨文,周秦之金文,及東漢許愼之說文.

一, 二, 三, 四, 五, 六, 七,

八, 九, 十.

殷甲骨文, 一; ═; ☰; 亖; 㐅; ∧,∩;十;

(1) 見日本八木奘三郎,滿洲考古學,第508頁日本昭和三年。

(2) 見前書。

(3) 見陳重生,西行豔異記,民國十九年(1930)十一月二十七日時報。

(4) 見日本矢袋喜一,琉球古來之數學,日本大正四年。

)(; 𠆤; |;

周秦金文, 一, 二, 三, 亖, 亖,㐅;介; 十;

)(; 九; ⧫;

許愼說文, 一; 二; 三; ㄖ, 㐅, 宂, 𠆤;

)(; 九; .十.

其積畫不過於五,與算經之說暗合.按孫子算經云:「六不積,五不隻」,夏侯陽算經云:「六不積聚,五不單張」是也.其自五以上各字之意義,許愼以後,小學家意見,極不一致[5].

說文又以弌,弍,弎爲古文一,二,三.唐,宋以後以壹,貳,叁,肆,伍,陸,柒,或漆,捌,玖,拾,伯,仟爲一至千之商業用數字[6].

當時官書亦習用之,作者曾於廣東韶州南華寺見一南漢銅鐘,銘文如下:

「大漢皇帝維大寶七年歲次

甲子,(西元964.)正月一日戊寅,鑄造洪

(5) 參看:丁山,數名古誼,中央研究院歷史語言研究所集刊第一本第一分,第89-94頁,民國十七年(1928)十月廣州。方國瑜,數名古誼,東方雜誌第二十八卷第十號,第83-88頁,民國二十年(1931)五月。

(6) 參看:梁岵廬字馬考,東方雜誌第二十八卷第十七號第97-100頁,民國二十年(1931)九月。

鍾一口,重銅壹阡貳伯陸

拾斤,於長壽寺,永充供奉.」

4. 黃帝隸首作數之傳說

黃帝隸首作數之傳說,實始於世本.劉知幾史通「古今正史」條稱:「楚漢之際,有好事者錄自古帝王公侯卿大夫之世,終乎秦末,號曰世本十五篇」.梁啓超:中國歷史研究法稱:「史學界最初有組織之名著,則春秋戰國間得二書焉,一曰左丘之國語,二曰,不知撰人之世本」.其自注稱:「漢書藝文志著錄世本十五篇原注云:『古史官記黃帝以來迄春秋時諸侯大夫』,漢書司馬遷傳,後漢書班超傳,皆言:『司馬遷删據世本篇目以校遷書,可以知其淵源所自矣.原書宋鄭樵,王應麟尙及見,其佚當在宋元之交.清錢大昭,孫馮翼,洪飴孫,秦嘉謨,茆泮林,張澍,各有輯本,茆,張二家較精審』[7].各家引述世本,時見異文.唐六典卷二十一引世本:隸首造數,宋高承事物紀原卷一數條引世本:隸首作數;宋李籍九章算術音義隸首條引世本黃帝時隸首作數是也.唐釋法琳辨正論注引鄭玄六藝論云:隸

(7) 見梁啓超中國歷史研究法,第21-23頁萬有文庫本.

首作算數,宋范曄後漢書卷十一云:隸首作數,似并本世本之說也.晉張華博物記云:隸首黃帝之臣,一說隸首善算者也[8].其在算經則漢徐岳數術記遺云:「隸首注術,乃有多種」,又謂;「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉」.後周甄鸞五經算術亦謂:「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉」.至是黃帝隸首作數之說,始稱完備.故入唐而唐司馬貞史記索隱稱:「隸首作算數」,唐房玄齡晉書稱,「隸首作算數」,唐李賢後漢書馬融傳註稱:「隸首黃帝時善算者也」.漢,唐諸家,雖輾轉傳述,實本於世本之傳說耳.

5. 九九之傳說

西漢以前有關於九九之傳說.如:

管子輕重戊云:「伏羲作九九之數,以應天道」.

呂氏春秋云:「東野有以九九見者,(齊)桓公使戲之曰:『九九足以見乎!』曰:『九九薄能耳,而君禮之,況賢於九九者乎!』」.此外韓詩外傳,三,戰國策,劉向說苑尊賢篇,所記與上文大同小異.

楊雄太玄經云:「陳其九九,以爲數生」.

(8) 其後梁劉昭補註後漢書卷十一引博物記,及宋高承事物紀原卷一引博物記并同。

漢書梅福傳云:「福上書曰:『吾聞齊桓之時,有以九九見者,桓公不逆,欲以致大也,……』」.

三國志魏書二十一云:「……九九不忽於齊……」」.

是則僅舉九九之名也.至九九果爲何物,古今論者有下列諸條:

魏劉徽九章算術序(263)云:「包羲氏……作九九之術,以合六爻之變」.

隋書經籍志有九九算術二卷,楊淑撰.

唐顏師古註漢書云:「九九:若今九章,五曹之輩」.

宋,李籍九章算術音義於劉徽序:「九九之術」條注引前漢書梅福傳,師古註,及隋書經籍志.按顏師古,李籍似并以九九之術爲九章算術之前身.但隋書經籍志內孫子算經三卷,其算法九九,由九九迄一一,似九九又爲專指九九迄一一之算法而言.關於九九歌訣.戰國趙人荀況著荀子,呂氏春秋,漢初淮南王劉安輯淮南子,劉向戰國策,晉王肅輯孔子家語,唐司馬貞史記索隱,唐張守節史記正義并引及之.

1. 荀子: 九九八十一;
   六六三十六;

2. 呂氏春秋: 三七二十一;

3. 淮南子: 二八十六;

三三如九, 三四十二, 三七二十一,

三九二十七;

四四十六;

五八四十, 五九四十五,

六六三十六;

又三三而九;

九九八十一, 八九七十二, 七九六十三,

六九五十四, 五九四十五, 四九三十六,

三九二十七, 二九一十八;

4. 戰國策:

卷一, 九九八十一,

卷八, 三七二十一;

5. 孔子家語: 三三如九;

九九八十一, 八九七十二, 七九六十三,

六九五十四, 五九四十五, 四九三十六,

三九二十七, 二九一十八;

6. 史記索隱: 二九十八,

五六三十,

六六三十六;

7. 史記正義: 二七十四, 二八十六,

七七四十九, 八八六十四;

6. 古代數學教育

古代數學教育之見於記載者,有下列各條:

1. 內則云:「六年教之數,與方名,十年出就外傅,居宿於外,學書計」.

2. 白虎通云:「八歲毀齒,始有識知,入學學書計」.

3. 周禮保氏教民六藝,六曰九數.

4. 前漢書食貨志云:「八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.

5. 魏王粲(177–217)儒吏論云:「古者八歲入小學,學六甲,五方,書計之事」.

見隋虞世南北堂書鈔卷八十三引,及太平御覽(977)卷第六百十三,學部七引.

6. 唐徐堅(659–729)初學記云:「古者子生六歲而教數與方名,十歲入小學,學六甲,書計之事」.

7. 宋王應麟(1223–1296)困學紀聞卷五,儀禮條,釋內則之說,云:「六年教之數與方名,數

者一至十也.方名,漢書(食貨志)所謂五方也.九年教數日,漢志所謂六甲也.十年學書計,六書九數也.計者數之詳.十,百,千,萬,億也.漢志六甲,五方,書計,皆以八歲學之,與此不同」.

古代六歲八歲入學學書計之傳說,雖有異同,而古代之注重小學數學教育,固至明顯也.

7. 算經十書佚文

古代算書之流傳於現代者,首推算經十書.其刊刻則以宋元豐七年(1084)刻本爲定本.但其佚文遺義分見於宋代前後記載者,尚可輯錄得若干條,足備考證.

1. 九章算術

魏劉徽九章算經序「……」

宋王應麟玉海卷四十四,及困學紀聞卷四曾引及之.

九章算經李淳風注云:舊術求圜,皆以周三徑一爲率,若用之求圜周之數,則周少而徑多.徑一周三,理非精密,蓋術從簡要,略舉大綱而言之.今依密率,以七乘周二十二而一,即徑;以二十二乘徑七而一,即周.

上文見宋李誡營造法式(1091)看詳引九章算經

(卷一)李淳風注.

王莽時劉歆斛尺弱於今尺四寸五釐,比魏尺其斛深九寸五分五釐.

上文見晉書卷十六律曆志上,及隋書卷十六律歷志引魏陳留王景元四平劉徽注九章(卷一).

粟率五十,糲米三十,粺二十七,糳二十四,御二十一.

上文見詩大雅「彼疎斯粺」疏,引九章粟米之法.

粟(率)五十,糲率三十,一斛米得六斛米爲糲也.

上文見唐李賢注後漢書卷五十六伏湛傳引九章算術.

玉方寸,重七兩;石方寸,重六兩.

上文見攷工記玉人疏引盈不足術.語見宋王應麟玉海卷四十四,下三條同.

海島邈遠,不可踐量,

上文見禹貢疏引九章算術

穿地四,爲壤五,爲堅三.

上文見詩緜疏引九章算術

粟率五十　糳二十四

上文見春秋疏引九章算術

2.　周髀算經

周公問於殷高曰:「寡人聞子大夫善數」

上文見太平御覽(977)卷七百五十,工藝部七引周髀.

周公問於商高曰:聞大夫善數,數安從出.高曰數之法出於圓方,方出於矩.周公曰請問用矩之道.曰平矩以正繩,偃矩以望高,覆矩以測深,臥矩以知遠,環矩以爲圓,合矩以爲方.

上文見元舒天民六藝綱目卷下九數條引周髀.

昔者周公問於商高曰,數安從出.商高曰,數之法出於圓方,圓出於方,方出於矩,矩出於九九八十一.萬物周事,而圓方用焉;大匠造制,而規矩而設焉.或毀方而爲圓,或破圓而爲方,方中爲圓者,謂之圓方;圓中爲方者,謂之方圓也.

上文見宋李誡營造法式(1091)看詳引周髀算經.道光丙戌(1826)聞箏道人營造法式跋稱:可補今本之脫佚.僅按今本萬物周事至謂之方圓也四十九字在卷上七衡圖之前.

夫天不可階而升.

上文見唐李賢註文選引周髀.

天不可階而升,地不可尺寸而度.

上文見太平御覽卷二十六地部地上引周髀算經.

天圓地方,蓋以寫天,天青黑爲表,丹黃爲裏,故天象蓋覆,中高四旁下也.

上文見隋虞世南北堂書鈔卷一百四十九,天一,天象蓋覆條引周髀.清孔廣陶校注北堂書鈔稱:是本鈔數句,足補算經之闕.

日中樹表,則無影矣.

上文見世說言語篇引周髀,清顧觀光周髀算經校勘記,以爲卽原文「日中立竿測影」下之脫文.

日益南,晷益長.

上文見華嚴經音義四引周髀,清顧觀光周髀算經校勘記以爲卽原文「日益表南,晷日益長」,此表字日字,幷衍.

冬至三光微,夏至三光盛.

上文見太平御覽卷二十三,范子計然內引周髀.清顧觀光周髀算經校勘記以爲卽原文「三光之精微,以成其道遠」內脫文.

3. 孫子算經

十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一釐,十釐爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引是.

上文見唐慧琳一切經音義卷二十五,涅槃經第四卷,毫釐條注引孫子算經.

十釐爲分,十分爲寸.

上文見適園叢書本宋彭百川太平治蹟統類卷六引孫子.

凡稱之所起,始於黍.十黍爲一絫.十絫爲一銖,六銖爲一錙.錙卽分也,音汾問反.四分爲一兩,十六兩爲一斤,三十斤爲鈞,四鈞爲一石,卽一百二十斤也.

上文見一切經音義一百卷,念佛三昧寶王論上卷錙銖條注引孫子九章算經.

量之所起,初起於粟,六粟爲一圭,六十粟爲一撮,六百粟爲一秒,六千粟爲一勺,六萬粟爲一合,六十萬粟爲一升,六百萬粟爲一斗,六千萬粟爲一斛.

上文見一切經音義卷二十五,涅槃經第十卷滿足百斛條注引孫子算經.

十十爲百,十百爲千,十千爲萬,自萬至億有三等,上中下數變之也.

上文見續一切經音義卷二,新大方廣佛華嚴經卷第一,百洛義爲一俱胝條注引孫子算經.

古者積錢上至於天,天不能容,下至於地,地不能載,天

不能蓋地不能載,故名曰載.

上文見太平御覽卷七百五十,工藝部七引孫子算經明陳耀文天中記卷四十一數下載數之極條引同,疑亦出於太平御覽.清孫詒讓札迻卷十一稱:檢今本孫子算經無此語,疑傳錄失之.

4. 夏侯陽算經

算數起自伏羲,而黃帝定三數爲十等.隸首因以著九章,漢備五數云云.五曹孫子,述作滋多.甄鸞劉徽爲之注釋.

上文見宋王應麟玉海卷四四引.

黃帝定三數爲十等,隸首因以著九章,漢備五數.

上文見明陳耀文天中記卷四十一,數下,九數條引.

5. 數術記遺

世人言「三不能比兩」,乃云捐悶與四維.甄鸞注藝經曰:捐悶者周公作.先布本位,以十二時相從.徐援稱捐悶是奇兩之術.三不能比兩者,孔子所造,布十干於其方,戊巳在西南.四維東萊子所造,布十二時四維.

上文見宋王應麟困學紀聞卷九,天道條引數術記遺.玉海卷四四引同.

按太平御覽卷七百五十五,工藝部十二,於捐悶,四維亦有解析.而清杭世駿諸史然疑,後漢書條則以甄鸞注數術記遺謂孔子作三不能比兩,爲離經畔道.玆錄其文如下.

太平御覽卷第七百五十五,工藝部十二,「四維」:

晉李秀四維賦序,四維戲者衞尉贄侯所造也.畫紙爲局,截木爲碁,取象元一,分而爲二,準陰陽之位,擬剛柔之象,而變動無爲生乎其中.

太平御覽卷第七百五十五,工藝部十二,「指於天反悶」:

藝經曰:捐悶先布本位,以十二時相從.文曰,同有文章,虎不如龍豕者何爲,來入兔宮.王孫晝卜,乃造黃鍾.犬往就馬,非類相從,羊奔蛇穴,牛入雞籠.

清杭世駿道古堂外集,諸史然疑,「後漢書」:

東漢崇尙緯讖者,多非聖無法,動引孔子,以實其說,……甄鸞注數術記遺謂:

孔子作三不能比兩,……其離經畔道也至矣.

黃帝爲數,法有十等,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.及其用也,有三.謂上,中,下.下數十萬曰億,中數百萬曰億,上數萬萬曰億.

上文見唐慧琳一切經音義二十七卷,引笇經.

黃帝算法總有二十三數,謂一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,百,千,萬,億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.從萬已上,有三等數法,其下者十十變之,中者百百變之,上者倍變之.

上文見唐慧琳一切經音義,二十一卷,引黃帝算法.又見明胡應麟少室山房叢集(1593)卷四七引.

上文二條疑出算術記遺.因幷列於此.

8. 九章條目

九章條目之見於諸家載記者,有下開各條:

1. 漢鄭衆(約公元83)云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,鈎股.

上文見漢鄭玄周禮保氏九數注引,鄭衆周禮注.

按唐孔穎達禮記少儀鄭注九數正義引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,勾股.

唐賈公彥周禮地官大司徒鄭注九數引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

宋李昉等太平御覽卷七五〇引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今

有重差,勺桀,勾股.

宋李籍九章算術音義序引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

宋邢昺論語七何晏注六藝疏引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要.

宋王應麟玉海卷四四,漢制考卷一,漢藝文志考證九,同引作:

方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

清馬國翰玉函山房輯周禮鄭司農解詁二引與前同.

2. 漢馬融(約公元166)云:今有夕桀.

上文見唐孔穎達禮記少儀正義引馬融周官傳按唐賈公彥周禮地官保氏鄭注九數引作:

今有重差,夕桀.

清馬國翰玉函山房輯馬融周官傳引與前同.

3. 魏劉徽(公元263)云:九章算術:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,鈎股.

上文見今本九章算術.

按宋王應麟玉海卷四四,漢制考卷一,及清鄂爾泰等周官義疏十三引並與前同.

4. 晉干寶云:今有夕桀.

上文見唐孔穎達禮記少儀正義引干寶周官禮注.

按清馬國翰輯周官禮干氏注與前同.

5. 後周沈重云:夕桀.

上文見唐陸德明經典釋文八周禮音義上引沈重周官禮義疏.

按清馬國翰輯沈重周官禮義疏,與前同.

6. 唐陸德明云:差分,重差,夕桀.

上文見經典釋文及周禮注疏引.

7. 唐長孫無忌云:一方田,二粟米,三衰分,四少廣,五商功,六均輸,七盈朒,八方程,九勾股.

上文見隋書律曆志上,及宋李籍九章算術音義序引.

8. 唐孔穎達云:九數:一方田,二粟米,三差分,四少廣,五商功,六均輸,七方程,八贏不足,九旁要;今有重差,勾股.

上文見孔穎達禮記少儀正義引儒者解.宋王應

麟玉海卷四四,及漢制考卷一引與前同.

9. 唐賈公彥云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,贏不足,旁要;今有重差,夕桀,勾股.

上文見周禮保氏疏內賈公彥周禮義疏.

按宋王應麟漢制考一引與前同.

宋王應麟玉海四四及漢藝文志考證九引作:

重差,夕桀,勾股.

10. 唐李賢云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見李賢注後漢書卷五四,馬援列傳第十四引.

按宋王應麟漢制考一引馬援傳注與前同.

又玉海四四引馬援傳注作:

商功五,均輸六,盈不足七,方程八.

唐李賢云:九章算術;方田,粟米,差分,步廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

上文見李賢注後漢書卷六五,張曹鄭(玄)列傳第二五引.

按宋王欽若等册府元龜八六九明算引作:

方田,粟布,差分,少廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

宋王應麟玉海四四及漢制考——引鄭玄傳注作:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方程,旁要,盈不足,鈎股.

11. 唐李林甫唐六典注云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,嬴不足,旁要.

上文見唐六典卷二一,算學博士注引.

12. 唐白居易,宋孔傳云:九數:乘除之術凡九篇:一曰,方田,以度田畝;二曰,算粟,以制變易;三曰,衰分,以辨隆殺;四曰,少廣,以求積冪;五曰,商功,以計功程;六曰,均輸,以量遠近;七曰,盈不足,以較盈減;八曰,方程,以御正負;九曰,鈎股,以測高遠.

上文見唐白居易,宋孔傳,白孔六帖卷三十三,算十引.

按明陳仁錫潛確類書卷八一引孔帖與前同.

13. 宋陳彭年等廣韻云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,嬴不足,旁要.

上文見廣韻卷四.十遇韻,數字注.

14. 宋高承云:方田,粟布,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見事物紀原卷一引.

15. 宋李石云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方

程,旁要,盈(不)足,鉤股.

上文見李石續博物志卷九引.

16. 宋秦九韶云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,鉤股;附重差,夕桀.

上文見宋,秦九韶數學九章(1247)引.

17. 宋楊輝云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,鉤股;附旁要.

上文見宋楊輝詳解九章算法(1261)引.

元明以後九章條目,多因通行本九章算術篇目,其有互異之處,略引數條以見例.

18. 元托托等宋史律曆志云:九章:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,方程,盈朒,旁要.

上文見宋史卷六八,律曆志二一,引.

19. 元馬端臨文獻通考云:九章:方田,算粟(一本作算米),衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見文獻通考卷二二九引.

20. 明姚廣孝等永樂大典(公元1407)云:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈不足,勾股.

上文見永樂大典目錄.

21. 明焦竑云:九章算法:方田,粟米,差分,少廣,均輸,方

程,傍要,盈不足,鈎股.

上文見明焦竑輯焦氏說楛卷三引.

22. 明徐袍云:九數:方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,贏朒,方程,鈎股.

上文見明徐袍事典攷略卷二,或周學制條引.

23. 明吳敬九章比類 (1450) 云:方田,粟米,衰分,少廣商功,均輸,盈不足,方程,勾股.

上文見九章詳註比類算法大全目次.

按吳敬同書乘除開方起例引九章名義作:方田,粟米,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

24. 明程大位算法統宗(1593)云:九章:方田,粟布,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見算法統宗目次.

25. 明陳仁錫云:九數:方田,粟布,衰分,少廣,商功,均輸,盈朒,方程,勾股.

上文見明陳仁錫潛確類書卷八一,崇禎三年(1630)刻本.蓋本算法統宗其後明李篤培中西數學圖說(1630),清梅穀成增删算法統宗所引並與前同[9].

(9) 參看:孫文青九章算術篇目考(上)金陵學報第二卷,第二期,第1-43頁,民國二十一年(1932)十一月.

9. 魏劉徽注九章

魏劉徽撰注九章算術,其見於唐人記載者:

唐李賢後漢書馬援列傳注云:劉徽九章算術,方田,粟米,差分,少廣,商功,均輸,盈不足,方程,鈎股.

宋王應麟玉海卷四四引同.

隋書律歷志云:「魏陳留王景元四年(263)劉徽注九章云:王莽時劉歆斛尺,弱於今(魏)尺四分(原誤作寸)五釐,比魏尺其斛深九寸五分五釐」.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

隋書律歷志又云:「魏陳留王景元四年(263)劉徽注九章商功曰:當今(魏)大司農斛圓徑一尺三寸五分五釐,深一尺,積一千四百四十一寸十分之三」.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

「蓋 $\frac{1}{2}\times 13.55=6.775$ 寸 (半徑)

$(6.775)^2=45.900625$ 方寸 (半徑冪)

$\pi = 3.14$ (徽率)

則 $10\pi(6.775)^2=1441\frac{3}{10}$ (魏斛容積)」

隋書律歷志又云:「王莽銅斛於今(魏)尺深九寸五分五釐;徑一尺三寸六分八釐七毫,以徽率計之,於今(魏)斛爲容九斗七升四合有奇.此魏斛大而尺長,王

莽斛小而尺短也.

上文見隋書卷十六,律歷志第十一,律歷上.

「蓋 王莽銅斛徑$=14.332136$寸

$(0.55)(14.332136)=13.687$寸 (內徑)

$\frac{1}{2}\times 13.687=6.8435$寸 (半徑)

$(6.8435)^2=46.83349225$方寸

(半徑冪)

$\pi = 3.14$ (徽率)

則 $10\times 0.955\pi(6.8435)^2=1404.3959.$

(王莽斛容積)

* * *

$$\frac{\text{王莽斛容積}}{\text{魏斛容積}}=\frac{1404.3959}{1441\frac{3}{10}}=0.974^+$$

10. 南宋祖冲之著綴術

唐長孫無忌隋書卷十六,律歷志卷十一云:

「……古之九數,圓周率三,圓徑率一,其術疏舛.自劉歆,張衡,劉徽,王蕃,皮延宗之徒,各設新率,未臻折衷.宋末南徐州從事史祖冲之更開密法,以圓徑一億爲一丈,圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽;朒

數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽,正數在盈朒二限之間.密率圓徑一百一十三,圓周三百五十五,約率圓徑七,周二十二.又設開差冪,開差立,兼以正圓參之,指要精密,算氏之最者也.所著之書,名爲綴術.學官莫能究其深奧,是故廢而不理」.

「蓋 $3.1415926<\pi<3.1415927$

$$\pi=3.14159265,$$

$$\pi=\frac{355}{113},$$

$$\pi=\frac{22}{7}.$$ 」

$\frac{355}{113}$率,尋常稱爲安托尼玆(Adriaen Anthonisz,十六七世紀時人)率(10).

隋書卷十六,嘉量條,晉書卷十六嘉量條幷稱:「周禮㮚氏爲量,鬴深尺,內方尺,而圓其外,其實一鬴.……祖冲之以算術考之,積凡一千五百六十二半方寸,而圓其外,減傍一釐八毫,其徑一尺四寸一分四毫七秒二忽有奇,而深尺,卽古斛之制也」.

(10) 見 Smith, D. E. 著,鄭太朴譯,圓周率 π 之歷史及其超越性,第 113 頁萬有文庫本,

「蓋 $\frac{1}{2}\times 14.10472=7.05236$ (半徑)

$(7.05236)^2=49.7357815696$ (半徑冪)

$\pi=3.14159265$ (祖冲之率)

$10\pi\times(7.05236)^2=1562.47915391993122344$

$=1562.5$(立)方寸 (容量)」

其校劉歆斛銘,亦用祖冲之率,$\pi=3.14159265$.

祖冲之綴術,曾爲唐代學官所選用,故其圓率亦爲世人所習知,時見引用.如隋書卷十六,載後周武帝保定元年玉斗:「內徑七寸一分,深二寸八分……今若以數計之,玉升積玉尺一百一十寸八分有奇,斛積一千一百八寸五分七釐三毫九秒」.

「蓋 $\frac{1}{2}\times 7.1=3.55$寸 (半徑)

$(3.55)^2=12.6025$平方寸 (半徑冪)

$\pi=3.14159265$ (祖冲之率)

$10\times 2.8\pi(3.55)^2=1108.5737984055$

$=1108.5739.(?)$立方寸 (容量)

祖冲之造綴術,其子繼之,其見於記載者,有下開各條.

綴述數十篇,祖冲之造,……………………………(南史)

綴術六卷,口口撰,…………………………(隋書經籍志)

綴術六卷,口口撰,……………………(日本見在書目錄)

綴術五卷,祖冲之撰,李淳風注,……(舊唐書經籍志)

綴術五卷,祖冲之撰,李淳風釋,………………(新唐書)

綴術六卷,祖冲之撰,…………………………(通志略)

綴術五卷,祖冲之撰,…………(宋李籍周髀算經音義)

綴術口口,祖暅之,……………(王孝通上輯古算經表)

綴術二卷,祖暅,…………………………(沈括夢溪筆談)

其於九章.海島,據日本見在書目錄所載,有:

九章九卷,祖中注,

九章術義九卷,祖中注,

海島二卷,祖仲注,

疑幷爲祖冲之所撰,因南史曾稱祖冲之注九章也.

綴術一書,在國中則亡於宋天聖之頃,在日本則與梅文鼎同時之關孝和似曾見及,但亦已成一段疑案.相傳日本關孝和(1642-1708)於奈良得一算書,學乃大進,其遺著括要算法多採中法,據岡本則錄且稱當時梶山,主和次俊尙藏有祖冲之之綴術,今書亦散亡,眞僞不可得知.[11]

(11) 見三上義夫,圓理,發明ニ就テ,東京物理學校雜誌第472,473,474,475,號別刷。(1930.)

隋書所記祖冲之率一段記事,宋王應麟玉海卷四十四,曾引及之.今百衲本二十四史元大德丙午(1306)刊本隋書亦記此文.西人 Van Hee 疑爲明末西算輸入後之僞作,識者已議其非.[12]

11. 後周甄鸞注算經

甄鸞撰注算經,各書所載,互有詳略,茲引列如下,以備攷證.

九章

九章算經九卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

九章算術二卷,徐岳撰,甄鸞重述,……………(通志)

九章算經二十九卷,徐岳,甄鸞等撰…………(通志)

孫子

孫子算經口卷,甄鸞注,………………(一切經音義)

孫子算經三卷,甄鸞撰注,…………………(舊唐書)

孫子算經三卷,甄鸞撰,李淳風注,………(新唐書)

孫子算經三卷,甄鸞撰,李淳風注,………(通志略)

(12) 見三上義夫,日本中等教育數學會第十三回總會陳列關於和算書籍允許狀等之解說,內:「隋書律歷志中祖冲之圓周算法之記事」, 1931.

Mikami, Y. The Ch'ou-Jeu Chuan of Yüan Yüan-Isis No. 35, (Vol. XI) Sept. 1928, Bruges, (Belgium).

五曹

五曹算經五卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

五曹算經三卷,甄鸞撰,……………………(舊唐書)

五曹算經五卷,甄鸞撰,…………(日本見在書目)

甄鸞五曹算經五卷,…………………………(新唐書)

甄鸞五曹算經五卷,…………………………(通志略)

甄鸞五曹算術二卷,……………………………(宋史)

李淳風注,甄鸞五曹經算一卷,………………(宋史)

張丘建

張丘建算經一卷,甄鸞撰,…………………(舊唐書)

張丘建算經三卷,甄鸞注,………(直齋書錄解題)

張丘建算術三卷,甄鸞注,李淳風注釋,劉孝孫細草

……………………………………………………(通考)

夏侯陽

夏侯陽算經三卷,甄鸞注,…………………(舊唐書)

周髀

周髀一卷,甄鸞重述,…………………(隋書通志)

周髀一卷,甄鸞注,…………………………(舊唐書)

周髀算經二卷,趙君卿注,甄鸞重述,李淳風等注釋

……………………………(崇文總目及中興館目)

周髀算經二卷,趙君卿注,甄鸞重述,李淳風等注釋
……………………………………………(玉海及通考)

五經

甄鸞五經算術一卷,……………………(通志略)

五經算術二卷,甄鸞注,李淳風注釋,(玉海引書目)

甄氏五經算術,…………(元程瑞禮,讀書分年日程)

紀遺

數術記遺一卷,徐岳撰,甄鸞注,……………(舊唐書)

甄鸞注,徐岳大衍算術注一卷,………………(宋史)

三等數

三等數一卷,董泉撰,甄鸞注,………………(舊唐書)

海島算經

海島算經一卷,甄鸞撰,李淳風等注釋,……(玉海)

甄鸞算術

甄鸞算術云:周朝市尺,得玉尺九分二釐,…(隋書)

甄鸞算術云:玉升一升,得官斗一升三合四勺……
……………………………………………………(隋書)

12. 唐代印度數名輸入中國

印度數名由佛經連帶輸入者,在唐于闐國三藏沙門實叉難陀譯大方廣佛華嚴經有一百二十數,唐

慧琳一切經音義於此經「一百洛叉爲一倶胝」條註稱:「今案此經十,百,千,萬,十十變之;從萬至億,百倍變之;從億已去,皆以能數量爲一數,復數至與能數量等」,其在倶舍論有六十數,遼希麟續一切經音義稱:「慈恩法師,引倶舍說本數六十,傳失其八」.

其名義各經亦有異譯,如:

洛叉亦作洛沙,

倶胝亦作拘胝,倶知,倶致,

阿庾多亦作那由他,

那由他亦作那,那由多,

矜羯羅亦作薑羯羅,

迦羅亦作哥羅,緊迦羅,

阿僧祇亦作阿僧企耶,是也.

其言小數,則:

大般若波羅密多經卷四,有:鄔波尼殺曇分,

大方廣佛花嚴經卷中,作:優波尼沙陀分,

大波羅密多經卷四,作:鄔波尼殺曇分,

言分至極小分也.

13 元代回回算法輸入中國

元王士點商企翁元祕書監志十一卷,所記自至

元至至正,凡秘書建置遷除,典章故事,一一備載,司天監亦附錄焉.其卷七回回書籍,在至元十年(1273)者計有:

兀忽列的四擘算法段數十五部,

罕里連窟允解算法段目三部,

撒唯那罕答昔牙諸般算法段目并儀式十七部,

呵些必牙諸般算法八部.(13)

14. 明清之際西洋算法輸入中國

明末西算輸入首賴利瑪竇(Metteo Ricci 1552-1610).利瑪竇以萬歷九年(1581)來華,抵香山澳.(14)萬

(13) 見南京國學圖書館藏舊鈔本元王士點,商企翁祕書監志卷七.

并據倉聖大學學術叢編卷七景元鈔本校過.

(14) 主萬歷八年(1580)來華者,有:正教奉褒,天主教傳行中國考第108-頁.

主萬歷九年(1581)來華者,有:明史,不得巳辯,澳門紀略.艾儒略大西利先生行蹟.

主萬歷十年(1582)來華者,有:「利瑪竇,湯若望二君傳略」,格致彙編第五年冬季册(1890).

Brucker, J., Catholic Encyclopedia, vol. 13, pp. 34 et seq. New York, c. 1909-1913; Abel-Remusat, Nouveau melanges asiatiques, vol 2. p- 207, Paris, 1829; Lettres edifiantes, vol. 3, p. 2, Paris, 1843.

歷二十七年(1599)曾一度到北京,又折回南京.[15]時徐光啓(1562-1633)聞利瑪竇名,特來南京問道.[16]二十九年(1601)入北京遂居焉.[17]萬歷三十八年(1610)卒於北京.[18]在京於傳教之外,譯著算書,計有:

幾何原本前六卷,徐光啓,利瑪竇同譯.萬歷三十五年(1607)在京出版.此書疑出於Clavius(1537-1612),Euclidis Elementorum Libri XV, 1517.

圜容較義,李之藻(?-1631),利瑪竇同譯,此書疑出於Clavius, Trattato della figura isoperimetre. 書前有萬

(15) Purchas, His pilgrimes, vol 3, p. 339, London, 1625. Serriere, Les anciennes missions de la Compagnies de Jesus en Chine (1552-1814) Shanghai, 1924.

(16) 徐宗德,明末清初灌輸西學之偉人, p. 6, 上海,民國十五年(1926).

Huc, Christanity in China, Tartary and Thibet, vol 2, p. 142 London, 1857-1858.

(17) 明史,澳門紀略,

William, S. Wells, The middle kingdom, vol 2. pp. 289-295. Rev. edition, New York, 1883.

Purchas, His pilgrimes, vol. 3, pp. 354-358、London, 1625.

(18) 明史,澳門紀略,徐光啓題幾何原本再校本;徐光啓簡平儀序,西洋新法算書.

Huc, Christanity in China, Tartary and Thibet, vol. 2, pp. 213-220, London, 1857-1853. Purchas, His pilgrimes, vol 3, p. 407, London, 1625.

歷甲寅(1614)李之藻序,稱殺青於戊申(1608)十一月

同文算指前編二卷,通編八卷,李之藻,利瑪竇同譯.此書疑出於 Clavius, Epitome Arithmetiae Practicae, Rome, 1583. 前編有李之藻萬歷癸丑(1613)序徐光啓萬歷甲寅(1614)序.

乾坤體義三卷,利瑪竇撰[19].

測量法義,徐光啓,利瑪竇同譯.

而徐光啓因亦有測量異同,鉤股義,孫元化有幾何用法(1608).至利瑪竇萬歷庚戌(1610)卒後,西士來者漸衆.徐光啓(1562-1633)以崇禎二年(1629)爲始,督修歷法,西士入局者,有:龍華民(Nicolas Longobardi, 1597來華, 1559-1654),鄧玉函(Jean Terrenz, 1621來華, 1576-1630),湯若望(John Adam Schall von Bell, 1622來華 1591-1666),羅雅谷(Jacques Rho 1629來華, 1593-1638)於是辛未(1631)進歷書二次,第一次二十四卷,第二次二十卷,幷一摺,壬申(1632)三次進書三十卷.翌年徐光啓(1562-1633)逝世,遺摺以李天經(1579-1659)自

(19) 式訓堂叢書本拜經樓藏書題跋記(1847)卷四有法界標旨,乾坤體義二種合爲一册,釋智貴輯,廣溱校梓,明萬歷間余永寧重刻而序之.書各三卷.

代,時則歷書大體已具,而算學中之筆算,籌算,幾何,三角術,三角函數表,及割圓術,并從歷書中連帶輸入矣.惟新法迄明亡(1644)迄未實行.

清聖祖留心歷算,其先後入宮教授算學者,有:南懷仁(Ferdinard Verbiest, 1659 來華, 1623-1688),張誠(J.-Fr. Gerbillon, 1654-1707),安多(Antoine Thomas, 1644-1709),白晉(Joachim Bouvet, 1656-1730),巴多明(Dominique Parrenin, 1665-1741)杜德美(Pierre Jartoux, 1670-1720.11-30)等,并有將算書譯成滿文及漢文者.現北平故宮博物院圖書館藏七卷本幾何原本一種,裴化行氏(Henri Bernard)疑其出於 Pardies Practical Geometry,同時故宮博物院圖書館又藏有幾何原本七卷一册,鈔本有序,附算法(原本)一卷,有序.又國立北平圖書館藏有孔繼涵(1739-1783)舊西算鈔本四種.計有:

幾何原本七卷二册,內缺第六卷一册,

測量高遠儀器用法無卷數,比例規解無卷數,八線表根無卷數,合一册

句股相求之法無卷數一册.

借根方算法節要上下卷一册.

以上所舉三種鈔本七卷本幾何原本文句互有不同,蓋其譯本曾幾經校勘也.關於西士入宮教授,及幾何原本七卷本譯述之經過,Du Halde 中國書志第四卷第二九五頁,所載有一六九〇年一月二十七日張誠(Gerbillon)氏日記一則,今轉於下:

"Le 27. Ayant achevé d'expliquer la geometrie practique avec les demonstrations, l'Empereur déclara qu'il vouloit recommencer a lire les éléments de géométrie que nous lui avions expliquer en langue Tartare: & comme il les fait traduire en chinois, il dit qu'on lui aporteroit tous les jours quelque propositions de la traduction, qu'il la reverroit avec nous & la corigeroit lui- même; & qu'après avoir corigé la version chinoise, il reverroit encore la texte Tartare: que cependant nous continuerions à venir tour à tour au palais le P. Bouvet (白晉) & moi,"

* * *

清聖祖於編纂律歷淵源(1723刻)之前,蓋深致力於西算.現北平故宮博物院圖書館藏有:

幾何原本十二卷四册無序,附算法(原本)二卷無序(懋勤殿,洪五九二,16號). 疑爲數理精蘊本之底本,因其

字句略有更改也,例如:

洪五九二,16

幾何原本十二卷,無序

卷一,

第一.

『凡論數度,必「先」始於一點.自點引之而爲線,自線廣之而爲面,自面積之而爲體.是名三大綱.是以有長而無闊者,謂之線.有長與闊而無厚者,謂之面.長與闊厚俱全者,謂之體.「只有一」(惟)點「併」無長闊厚薄「者」,其間不能奇分,「故」不可以數度.然線之兩端「又俱係」(卽)點,(而線面體,皆由此生),點雖不「能」入於數,實(爲)衆數之本.』

* * *

上文作「……」者,在數理精蘊已省去.作(……)爲數理精蘊增多之字.附算法原本二卷,無序

算法原本卷一

第一.

『「夫」一者數之原也.衆一相合,而數繫焉.「然」不能無大小多寡之不齊.而欲知其所以分合之故,必有一定之法,始可以考其準「耳」.若夫累積小數與大數

等者,此小數卽度盡大數之準也.如大數有八,小數有二,四倍其二,與八必等,則二卽爲度盡八之準.苟累積小數,不能與大數等者,此小數卽非度盡大數之準也.
....

* * *

上文作「……」者,在數理精蘊已省去.

主編纂律歷淵源(1723刻)者有何國宗,梅瑴成(1681-1763),而明安圖,顧陳垿(1678-1747)亦在攷測之列.此時代數學及割圓術中解析法幷連帶輸入.明清以來西算輸入至此乃告一段落.

雍正二年(1729)有放逐教士之舉,惟仍留教士之有數學知識者在歷局服務.在歷局者,乾隆三十四年(1769)有彌納和,乾隆五十三年(1788)有 Raux,道光十八年(1838)有 Pries 過此便無西教士之足跡矣.

中算史之工作

吾國向乏中算專史,而大部材料,往往於通史中尋其斷片.卽清阮元所作疇人傳(1799)亦大半取材於二十四史.在前則宋景德二年(1005)敕撰册府元龜一千卷,其卷八百六十九,總錄部一百一十九,"明算"條稱:

「自隸首作籌,容成造歷,後之學者,不絕英華;或妙盡其能,或略盡其理,忘寢廢食,精騖心游,耳不聞於雷霆,行或墜於坎窞.嘗齠齔而耽味,射隱伏以宴衎,小則括毫釐之形,大則周天地之數,聊屈指而洞明,運隻筯而無爽,若非苦志名山,尋師遠道,則何以臻此哉.」

其後又附載各家小傳,是爲中算史之嚆矢.

而元祖頤:松庭先生四元玉鑑後序,稱:

「平陽蔣周撰益古,博陸李文一撰照膽,鹿泉石信道撰鈐經,平水劉汝諧撰如積釋鎖,絳人元裕細草之,後人始知有天元也.平陽李德載因撰兩儀羣英集臻,兼有地元;霍山邢先生頌不高弟劉大鑑,潤夫撰乾

坤括囊,未僅有人元二問;吾友燕山朱(世傑)漢卿先生演數有年,探三才之頤,索九章之隱,按天地人物,立成四元, 書成名曰四元玉鑑.」

明程大位算法統宗(1593)卷末,"算經源流"條,稱:宋元豐七年(1084)刊十書入祕書省,又刻於汀州學校.

黃帝九章 周髀算經 五經算法 海島算經
孫子算法 張丘建算法 五曹算法 緝古算法
夏侯陽算法 算術拾遺

元豐,紹興,淳熙以來,刊刻者多,且以見聞者著之:

議古根源 益古算法 證古算法 明古算法
辨古算法 明源算法 金科算法 指南算法
應用算法 曹唐算法 賈憲九章 通微集
通機集 盤珠集 走盤集 三元化零歌 鈐經
鈐釋

嘉定,咸淳,德祐等年又刊各書:

詳解黃帝九章 詳解日用算法 乘除通變本末
續古摘奇算法 已上俱出楊輝摘奇內.

…………………………………………………………

其事又往往不著於史.則二十四史所遺留科學史料,蓋亦僅矣.

直至清阮元(1764–1848)始有疇人傳之作.乾隆乙卯(1795)阮元與李銳(1798–1817),周治平共撰此書,至嘉慶己未(1799)畢業,一時明算若錢大昕(1728–1804)丁杰(1738–1807),凌廷堪(1755–1809),談泰,焦循(1763–1820),幷爲印正.編中明以前諸疇人各傳,除採二十四史傳志外,所引曆算書及他類書籍有:

山海經　文選　藝文類聚　開元占經　五代會要　玉海　四庫全書總目　癸辛雜識　景定建康志　李梅亭集　齊復謙郭太史行狀　明史稿　明史紀事本末　荆川文集　續學堂文鈔　浙江通志　嘉興府志　蘇州府志

算經十書　數學九章　算法統宗　測圓海鏡　益古演段　算法全能集　測圓海鏡分類釋術　測圓算術　句股算術　弧矢算術　新法算書　圓容較義　同文算指　幾何原本　測量異同　句股義　度測　新儀象法要　革象新書　回回歷法　太陰通軌　七政推步　授時歷法撮要　歷宗通議　周相大統歷法　歷法新書　聖壽萬年歷　律歷融通　古今律歷考　歷體略

其清代疇人各傳引用書目,可於下表見之.

第一表

姓名	引用書名
* 王錫闡	四庫全書總目，曉菴新法，王寅旭先生遺書，道古堂文集
潘聖樟	王寅旭先生遺書，道古堂文集.
* 薛鳳祚	天學會通
楊光先	不得已，池北偶談.
胡亶	中星譜.
游藝	四庫全書總目，天經或問.
揭暄	四庫全書總目，梅氏全書.
* 方中通	數度衍.
* 杜知耕	幾何論約，數學鑰，道古堂文集.
* 李子金	四庫全書總目，池北偶談，數學鑰.
* 李長茂	勿菴算書目.
徐發	天元歷理.
* 黃宗羲	浙江通志，南雷文約.
子* 黃百家	句股矩測解原，勿菴算書目.
* 梅文鼎	四庫全書總目，梅氏全書. 梅氏叢書輯要，勿菴書目，道古堂文集，錢（大昕）少詹說.
子* 梅以燕	道古堂文集，增删算法統宗.
孫* 梅瑴成	梅氏叢書摘要，增删算法統宗，道古堂文集.
曾孫* 梅鈖	增删算法統宗.
曾孫* 梅鈁	增删算法統宗.
弟* 梅文鼐	道古堂文集.
弟* 梅文鼏	道古堂文集，中西經星同異考，梅氏書目.
李光地	曆象本要，切問齋文鈔.
子 李鍾倫	道古堂文集.
弟 李鼎徵	道古堂文集.
弟 李光坡	切問齋文鈔.
秦文淵	四庫全書總目.
張雍敬	曝書亭集，道古堂文集.
* 孔興泰	道古堂文集.
* 袁士龍	測量全義新書，道古堂文集.

* 毛乾乾	道古堂文集.
女壻*謝廷逸	道古堂文集.
* 沈超遠	道古堂文集.
* 年希堯	測算刀圭, 面體比例便覽, 對數表, 對數廣運.
劉𤏡湘	識學錄.
* 陳萬策	切問齋文鈔, 梅氏叢書輯要.
* 楊作枚	梅氏全書.
* 陳厚耀	四庫全書總目, 春秋長歷, 增删算法統宗, 陳氏家譜. 召對紀言.
惠士奇	潛研堂文集.
* 陳 訏	句股引蒙, 句股述.
* 陳世仁	少廣補遺.
* 莊亨陽	莊氏算學.
* 顧長發	四庫全書總目.
* 屠文漪	九章錄要.
邵昂霄	四庫全書總目.
許伯政	四庫全書總目, 全史日至源流.
* 余 熙	四庫全書總目.
顧 琮	御定考成後編, 四庫全書總目.
* 何國宗	大清會典則例, 梅氏叢書輯要, 錢(大昕)少詹說.
* 丁維烈	赤水遺珍.
張永祚	杭州府志, 道古堂文集, 漢書疏證.
* 王元啓	惺齋雜著, 句股衍.
* 江 永	數學, 五禮通考, 戴氏遺書.
* 戴 震	戴氏遺書, 算經十書.
盛百二	尙書釋天.
* 錢 塘	潛研堂文集.
李 惇	焦里堂: 李孝臣先生傳.
* 吳 烺	周髀算經圖注.
褚寅亮	錢少詹說.
* 屈曾發	九數通考.
* 龔 淪	述古適.
厲之鍔	惢緯瑣言.

表中凡有算學著作或說述者,幷作星點爲誌,後倣此.

道光二十年(1840)羅士琳續疇人傳由卷四十七至五十二凡六卷.其卷四十七楊輝,元好問,蔣周,朱世傑,趙城諸人傳記,則用下列各書:

楊輝算法;金史元好問本傳,金詩源,堯山堂外紀,郝經遺山墓銘,遺山年譜,四元玉鑑;益古演段;算學啓蒙,赤水遺珍.

其清代疇人各傳引用書目,於下表見之.

第二表

姓名	引用書名
* 明安圖	割圜密率捷法,衡齋算學,董方立遺書.
子* 明新	上書
* 陳際新	上書
* 張肱	上書
* 孔廣森	顨軒孔氏所著書,漢學師承記,校禮文堂集.
* 博啓	句股容三事拾遺,方(履亨)監正說.
許如蘭	乾象拾遺,春暉樓集.
陳懋齡	算學天文考,雕菰樓文集,求已堂集,董方立遺書.
范景福	上書
錢大昕	錢氏叢書,四史朔閏考,地球圖說,漢書師承記,經韻樓文集.
姪 錢侗	四史朔閏考.
* 凌廷堪	校禮堂文集,漢學師承記,揚州畫舫錄.
* 李潢	九章細草圖說,輯古算經考注.
* 程瑤田	通藝錄,漢學師承記.
* 李銳	李氏遺書,知不足齋叢書,潛研堂文集,十駕齋養新錄,句股算術細草,揅經堂文集,通藝錄,雕菰樓文集,漢學師承記.
* 黎應南	上書.

* 談　泰	鄭司農年譜，經義叢鈔，潛研堂文集，雕菰樓文集，
* 汪　萊	衡齋算學，通藝錄，漢學師承記，雕菰樓文集，研六堂文集.
徐朝俊	高厚蒙求，藝海珠塵.
* 梅　沖	句股淺述.
* 焦　循	里堂學算記，雕菰樓文集，揅經堂文集，漢學師承記，揚州畫舫錄.
子* 焦廷琥	事略，雕菰樓文集.
楊大壯 附	上書.
* 許桂林	宣西通，算牖，曾子注釋.
周治平 附	上書.
吳蘭修	學海堂二集，緝古算經考注.
* 董祐誠	董方立遺書.
張成孫 附	上書.
* 張敦仁	緝古算經細草，求一算術，開方補記.
姚文田	邃雅堂學古錄，皇清經解經義叢鈔一千三百八十三，求已堂集.
施彥士 附	上書.
* 戴敦元	九章算術細草圖說.
* 陳　潮	綴術輯補，徐(松)禮部說.
* 張作楠	翠微山房歷算叢書.
* 劉　衡	緝古算經考注、循吏劉公傳，行狀，六九軒算書.
* 謝家禾	謝穀堂算學三種.

時則阮元在家食俸尙爲製序.(1840)

由道咸迄同光又數十年,此期疇人輩出,宜當續傳.而李善蘭,張文虎,吳嘉善,均熟知中算界掌故,皆驚於李銳,羅士琳之名,未敢續成.華蘅芳曾於學算筆談,"論疇人傳必須再續"中,深論其事.并附其弟世芳近代疇人著述記.此記所引凡二十八人,附見者五人,凡

三十三人,後有光緒十年 (1884) 世芳自識,全篇不記引用書名.

其後二年即光緒十二年 (1886) 錢塘諸可寶作疇人傳三編七卷,補清代疇人各傳,引用書目,則於下表見之.

第三表

姓名	引用書名
吳任臣	四庫全書總目,今世說,鶴徵前錄,疇人傳,梅文鼎傳,道古堂集,鮚埼亭集.
龔士燕	武進縣志,道古堂文集.
楊文言 附	上書.
* 馬負圖 附	上書.
* 方正珠	安徽通志.
* 胡宗緒 附	上書.
王蘭生	道古堂文集,鮚埼亭集.
顧棟高	國史儒林傳,詞科掌錄,春秋大事表序.
子 顧炳	上書.
吳鼐 附	上書.
華玉淳	蒲褐山房詩話,湖海文傳,春秋朔閏表.
華綱 附	上書.
胡天游	詞科掌錄,小倉山房文集,春秋夏正.
嚴燧	道古堂文集.
* 何夢瑤	廣東通志,粵臺徵雅錄,南海縣志.
* 馮經 附	上書.
萬光泰	詞科掌錄,鮚埼亭集,鶴徵後錄.
* 沈大成	湖海文傳,東原集,學福齋雜著.
董達存	武進縣志,續疇人傳,許如蘭傳.
* 淩霄	江寧府志.

*	孔繼涵		復初齋文集，算經十書序.
	汪廷榜		安徽通志.
*	張裕業	附	上書.
*	余　煌	附	上書.
*	程尚忠	附	上書.
*	許宗彥		揅經室二集，鑑止水齋集，衎石齋記事稿，湖州府志.
*	徐養原	附	上書.
*	紀大奎		愼齋全集，梅刻算經十書，江西通志.
*	傅九淵	附	上書.
*	史大壯	附	上書.
*	胡文翰	附	上書.
*	歐陽敬	附	上書.
*	黃　俊	附	上書.
*	朱　鴻		緝古算經音義序，算法大成上編，董方立遺書序，衎石齋記事稿，刻楮集詩注，務民義齋算學，海昌備志.
*	張豸冠	附	上書.
	時　銘		養一齋文集.
	黃承吉		安徽通志.
	周　濟		古微堂外集.
*	臧壽恭		湖州府志.
	齊彥槐		安徽通志，續疇人傳一張作楠傳，翠微山房算學叢書，算學大成上編，江寧府志.
*	江臨泰	附	上書.
	王大善		程侍郎遺集.
	程恩澤		揅經堂續集，癸巳類稿，存稿，程侍郎遺集.
	俞正燮	附	上書.
	鄭復光	附	上書.
	劉逢祿		養一齋文集，武進縣志.
*	湯治名	附	上書.
*	牟　庭		投壺算草，周公年表.
	劉日義		上書.
*	顧廣圻		養一齋文集，思適齋集.
	黃汝成		養一齋文集，嘉定縣志.
*	安清翹		書目答問.

阮元	雷塘庵主弟子記，揅經室全集.
* 駱騰鳳	開方釋例，藝游錄，舒藝室雜著甲編.
吳玉楫 附	上書.
李兆洛	藝舟雙楫，養一齋文集，恆星赤道經緯圖，皇輿全圖.
* 張鑑	墨林今話，湖州府志，藝舟雙楫，舒藝室詩存注.
* 沈欽裴	養一齋文集，九章算術細草，數書九章札記， 舒藝室雜著甲，詳解九章算法札記，楊輝算法札記.
* 宋景昌 附	上書.
* 毛嶽生 附	上書.
錢儀吉	衎石齋記事稿,續稿， 緝古算經音義序. 曾文正公文集.
陳杰	緝古算經細草圖解音義，算法大成上編，舒藝室詩存注， 戴府君行狀，湖州府志.
* 丁兆慶 附	上書.
* 張福僖 附	上書.
* 項名達	下學庵句股六術，算術大成上編，嘉慶丙子科鄉試齒錄. 戴府君行狀.
* 王大有 附	上書.
金望欣	安徽通志，算法大成.
* 岑建功 附	上書.
岑淦 附	上書.
* 李時溥	安徽通志.
* 董桂科 附	上書.
周成 附	上書.
* 羅士琳	比例匯通，觀我生室彙稿，養一齋集，舒藝室詩存注.
* 易之瀚 附	上書.
* 沈齡	上書.
* 田普寶	上書.
朱駿聲	說文通訓定聲附錄行狀，蘇州府志.
* 徐有壬	務民義齋算學，鄒徵君遺書，白芙堂算學叢書序跋.
馬釗	顯志堂稿.
* 熊其光	舒藝室雜著賸稿.
鄒漢勳	國朝先正事略，數學拾遺，輿地經緯度里表.
弟 鄒漢池	上書.

	施勤	步算筌蹏.
*	戴煦	戴府君行狀，兩浙忠義錄，求表捷術，鄒徵君遺書.
	楊寶臣 附	上書.
	諸可繼 附	上書.
	諸可炘 附	上書.
*	顧觀光	九數外錄，舒藝室雜著.
	韓應陛	上書.
*	夏鸞翔	洞方術圖解，致曲術圖解，少廣縋鑿.
*	馮桂芬	顯志堂稿，弧矢算術細草圖解，續纂江寧府志.
*	陳暘 附	上書.
	管嗣復 附	上書.
	尹錫瓚	顯志堂稿，蘇州府志.
	錢綺	上書.
*	鄒伯奇	南海縣志，鄒徵君遺書，舒藝室雜著甲編，又詩存注，昨非集，傳習錄.
*	劉熙載 附	上書.
*	伊德齡 附	上書.
*	時曰淳	養一齋文集，百雞術衍，嘉定縣志.
	陳瑑 附	上書.
*	丁取忠	白芙堂叢書.
*	李錫蕃	上書.
*	吳嘉善	白芙堂叢書，舒藝室詩存注.
*	汪曰楨	歷代長術輯要，古今推步諸術考，推策小識，超辰表，如積引蒙，舒藝室詩.
*	左潛	白芙堂算學叢書.
*	曾紀鴻	白芙堂算學叢書.
*	張文虎	舒藝室全集.
*	李善蘭	舒藝室詩存注，同文館本測圓海鏡，則古昔齋算學，幾何原本全書，重學附曲線說，代微積拾級，談天.

附錄:

葛宜	國朝閨閣詩鈔甲之十……小傳.
沈綺	國朝閨閣詩鈔甲之八……小傳.
王貞儀	金陵詩徵，衎石齋記事稿.

光緒戊戌(1898)澧州黃鍾駿撰疇人傳四編十一卷幷附卷,由華蘅芳鑒定.此編起自上古,幷補清代疇人各傳.其明以前諸疇人,則於阮羅所引各書外兼採次之各書:

內經素問. 抱樸子. 管子. 大戴禮記. 論語.
范子. 文子. 關尹子. 墨子. 莊子. 孟子.
尸子. 離騷. 呂氏春秋. 淮南子. 桓子新論.
太平御覽. 册府元龜. 華陽國志. 廣韻.
長歷. 物理論. 渾天記. 舜典正義. 崇文書目.
中興書目. 通志. 國史補. 北夢瑣言.
十國春秋. 困學紀聞注. 王氏談錄.
皇極經世書. 正蒙參兩篇. 文獻通考.
明焦竑經籍志. 尚友錄. 長術輯要. 內經注.
畿輔志. 陳氏讀書目. 通雅.
丁巨算法. 幾何要法.

雖所收不免較濫,而用力之勤,已足多矣.其清代疇人各傳引用書目則於下表見之.

第四表

姓名	引用書名
邱維屏	國朝先正事略.
吳守一	四庫全書提要.
何文熏	桂陽州志.
孫蘭	焦里堂北湖小志.
謝文英 附	上書.
戴梓	嘯亭雜錄.
王德昌	濟南府志.
孔貞瑄	曲阜縣志.
顏光敏	上書.
柴紹炳	文獻徵存, 國朝先正事略.
劉獻廷	國朝先正事略.
倪觀湖	方田通法序, 梅氏歷算全書凡例.
楊定三 附	上書.
鮑祖述 附	上書.
王雲	吳門耆舊記.
*顧陳垿	國朝詩人小傳.
段爔生	國朝詩人小傳.
董以寧	國朝先正事略.
王芝蘭	嵩縣志.
葉左寬	國朝先正事略.
李鍾佐	國朝先正事略.
汪一元	上書.
秦蕙田	國朝先正事略, 觀象授時.
余廷燦	國朝先正事略.
*殷長明	上書.
丁杰	上書.
孫星衍	上書.
李賓	圜天圖說.
*陳昌齊	廣東通志, 測天約術.
江聲	國朝先正事略.
姚光晉	庸閒齋筆記.

何紹業	國朝先正事略.
* 葉棠	天元一圖說, 籌算針度
* 鄒安鬯	近代疇人著述記.
* 陳澧	三統術詳說, 弧三角平視法.
殷家儁	格致補箋, 自鳴鐘說補正.
黃炳垣	交食捷算, 五緯捷算, 測地志要, 方平儀象.
胡秉成 附	上書.
* 董毓琦	星算補遺.
* 廖家綬	廖氏算書.

合阮元,羅士琳,華世芳,諸可寶,黃鍾駿各疇人傳記,引用書籍至四百餘種,爲文前後六十餘萬言,宜可無憾矣.而各傳,記將天文家算學家合稱疇人,著於一篇,於各家之生卒年月及著者年代,都未深考;往往序文凡例連篇記入,而製作此序文之年月,反漏而不記.卽各書之精華,學派之流傳,與乎社會之背影,亦全未顧及.學者雖熟讀此六十餘萬言之大著,而於中算源流仍無所多得.且晚近數十年算家續著之書,與乎新發見之史實亦將如諸,黃之例,勉強賡續乎?或將翻昔日之成案,而重編一算史乎?近十餘年來有志於後說者,有李儼,錢寶琮,裘沖曼諸人.

李儼於民國八,九年間,在北京大學月刊發表所撰中國數學源流考略(見民國八年四月,第一卷第四號,第一至一九頁:八年十一月,第一卷第五號,第五九至

七四頁,九年七月,第一卷,第六號,第六五至九四頁.)頗引起研究此學之興會.趙繚所編數學辭典 (1923) 其"數學小史內篇之部",卽八九採自攷略.李儼以中算史卷帙太繁,乃於其中抽取短文,分投於各雜誌,計有三十餘篇.[1]其單行本計有:中國數學大綱(1931) 中國算學小史(1930)二種.

錢寶琮曾於學藝雜誌,科學雜誌,南開週刊上,發表中算史論文,又編有中國算學史講義在南開教授,其單行本有:古算考源(1930)中國算學史(1932)二種.

李儼以爲作史首重史料,乃廣搜中國算學書,其目錄及目錄續編先後載於科學雜誌五卷四,五期;十卷四期;十一卷,六期;十二卷十二期;十三卷八期;十五卷一期;十六卷五期,十一期;十七卷六期中,又請裘沖曼以所編中國算學書目彙編登於清華學報三卷一期,曾遠榮復爲增補.

據最近所知,清代算家之有著述可考者,以筆畫多寡爲序,可得下表諸人.

(1) 詳見'二十年來中算史論文目錄,'國立北平圖書館館刊,第六卷第二號,第57-65頁,民國二十一年(1932)三,四月.

第五表

畫	姓					
二畫	丁	丁 枚	丁兆慶	丁取忠	丁福保	
四畫	孔	孔興泰	孔廣牧	孔廣森	孔繼涵	孔慶霽
		孔慶靄				
	尹	尹錫瓚				
	支	支寶枏				
	方	方 愷	方士鑅	方正珠	方本恭	方中通
		方克猷	方貞元			
	毛	毛元存	毛宗旦	毛宗藩		
	王	王 世	王 猷	王 韜	王 鑾	王大有
		王元啓	王正樞	王季同	王季鍇	王宗文
		王樹枏	王貞儀	王達春	王煥奎	王嘉玉
		王澤沛	王錫恩	王錫闡		
五畫	史	史大壯				
	左	左 潛				
	石	石振埏				
六畫	伊	伊德齡				
	安	安清翹				
	年	年希堯				
	朱	朱 煦	朱 熙	朱 培	朱仁積	朱世增
		朱駿聲	朱憲章	朱葆琛	朱培業	朱湘澄
	江	江 永	江 衡	江 熹	江大鍵	江臨泰
	牟	牟 庭				
七畫	何	何步瀛	何壽章	何夢瑤		
	余	余 熙	余 煌			
	吳	吳 誠	吳 烺	吳中順	吳和翱	吳延齡
		吳起潛	吳傳綺	吳應召	吳興讓	吳壽萱
		吳緒雲	吳嘉善	吳蘭修	吳礪珉	
	李	李 元	李 潢	李 鏐	李 銳	李 潢
		李 藩	李子金	李方溁	李玉如	李長茂
		李問松	李炳章	李時溥	李愼齋	李祥麟

畫數	姓					
		李善蘭	李錫蕃	李鑒青		
	杜	杜知耕	杜煒孫			
	沈	沈 宏	沈 蓮	沈大成	沈士桂	沈光烈
		沈保樞	沈欽裴	沈善蒸	沈祖綿	沈炳晢
		沈嘉澍				
	汪	汪 萊	汪曰楨	汪光恒	汪香祖	
	阮	阮 元				
八畫	周	周 達	周 藩	周道章	周登瀛	周毓英
		周廣詢				
	宗	宗森寶				
	屈	屈曾發				
	明	明安圖				
	林	林文釗	林紹清	林傳甲		
	易	易之瀚				
	知	知 彌				
	金	金殿祥	金鷹揚			
九畫	侯	侯 度				
	姚	姚申錫				
	洪	洪錫禧				
	紀	紀大奎				
	范	范景福	范霞亞			
	胡	胡 豫	胡文翰	胡支淵	胡先塵	胡宗緒
		胡約堂	胡煥文			
十畫	倪	倪思寬	倪紹高			
	唐	唐再豐	唐國熊			
	夏	夏允彝	夏鸞翔			
	孫	孫家鼐				
	席	席 淦				
	徐	徐 安	徐 異	徐 善	徐 鄂	徐 壽
		徐世倫	徐有壬	徐春和	徐建寅	徐樹勳
		徐虎臣	徐錫麟	徐鳳誥	徐紹楨	
	時	時 銘	時曰醇			
	殷	殷家儁				

	馬	馬守忠	馬守愚	馬負圖		
十一畫	崔	崔朝慶				
	張	張　琛	張　煜	張　潮	張　爔	張　鑑
		張宗孟	張作楠	張東烈	張貢九	張裕華
		張裕業	張景光	張敦仁	張豸冠	張鼎祐
		張福僖	張迪襄	張楚鍾	張德昭	張茂浣
	強	強汝詢				
	曹	曹汝川	曹汝英			
	梅	梅　沖	梅文鼎	梅文鼐	梅啓照	梅瑴成
	淩	淩　霄	淩步芳			
	章	章德棨				
	莊	莊亨陽				
	莫	莫占衢				
	許	許桂林				
	陳	陳　沚	陳　采	陳　杰	陳　訏	陳　棠
		陳　善	陳　澧	陳　瑑	陳　暘	陳方墀
		陳有霖	陳平瑛	陳世仁	陳世明	陳世佶
		陳希齡	陳忠恕	陳其晉	陳啓沅	陳壽田
		陳維祺	陳致堅	陳厚耀	陳藎謨	陳修齡
		陳懋齡	陳鶴齡			
	陶	陶耕書	陶駿良			
	陸	陸　采				
十二畫	傅	傅九淵	傅雲龍			
	勞	勞乃宣	勞絅章			
	彭	彭致君	彭瑞熙	彭祖賢	彭聘求	
	屠	屠文漪				
	揭	揭廷鏘				
	曾	曾紀鴻				
	湯	湯金鑄	湯洽名			
	焦	焦　循	焦廷琥	焦騰鳳		
	盛	盛鍾聖				
	程	程　祿	程之驥	程尚志	程瑤田	
	童	童世亨				

筆畫	姓	人名				
	華	華世芳	華蘅芳			
	鄂	鄂 諾				
	項	項元哲	項名達			
	馮	馮 經	馮 徵	馮世徵	馮桂芬	
	黃	黃方慶	黃百家	黃啓明	黃宗憲	黃伯瑛
		黃慶澄	黃傳祁	黃炳垕	黃泰生	黃遠埴
		黃緣爲	黃鍾駿	黃關叔		
十三畫	楊	楊之培	楊定三	楊光鋆	楊作枚	楊榮袞
		楊承烈	楊履恭			
	萬	萬 惠				
	葉	葉 棠	葉振鐸	葉鳳藻	葉耀元	
	葛	葛朝模				
	董	董恩新	董桂科	董斅江	董祐誠	董夢庚
		董毓奇				
	解	解崇輝				
	賈	賈步緯				
	鄒	鄒立文	鄒伯奇	鄒祖蔭		
十四畫	熊	熊其光				
	維	維福生				
	翟	翟 覞	翟寶書			
	臧	臧壽恭				
	趙	趙元益				
十五畫	劉	劉 湙	劉 掦	劉 衡	劉 鶚	劉 鐸
		劉大觀	劉光照	劉永錫	劉昌言	劉維師
		劉澤楨	劉彝程	劉嶽雲	劉熙載	劉鶚華
		劉執經	劉湘煃	劉霆輪		
	歐	歐陽僑				
	潘	潘逢禧	潘應祺	潘紹經		
	蔣	蔣士棟	蔣士榮	蔣維鍾		
	褚	褚寅亮				
	談	談 泰				
	鄧	鄧之秀				
	鄭	鄭毓秀				

十六畫	盧	盧朋	盧靖			
	諸	諸可寶	諸可繼			
	錢	錢綺	錢大昕	錢志儀	錢佩青	
	駱	駱騰鳳				
十七畫	應	應文清				
	繆	繆朝銓				
	蕭	蕭開泰	蕭邦彥	蕭履安		
	薛	薛乃疇	薛光錡	薛鳳祚		
	謝	謝唐	謝洪賚	謝家禾	謝程九	謝錫九
	韓	韓保徵				
十八畫	戴	戴侃	戴源	戴震	戴煦	
	瞿	瞿方梅				
	聶	聶祖訂				
十九畫	羅	羅士琳	羅長崎	羅致勳		
	譚	譚文	譚學元			
二十畫	嚴	嚴杏林				
二十一畫	顧	顧澄	顧長發	顧觀光	顧鼎銘	顧儒基
二十二畫	龔	龔傑	龔淪	龔銘鳳		

此表雖尚不免缺漏,已較第一,二,三,四表所有增益,且更實在矣.私家搜集,應多不周,乃印"徵求中國算學書啓事"分發各界,并登廣告於雜誌,報章上.此舉雖收效至微尚冀有萬一之獲也.

十六年十一月第三次汎太平洋學術會議在日本東京開會時,日人三上義夫著有"Mathematics in China and Japan"一文末節述中,日研究算史之經過其文

如下.

22. "of historical studies on the old Japanese mathematics, mention must be made first of T. Endo's History of Japanese Mathematics (in Japanese) (1896) and the revised and enlarged edition of 1918. After Endo's work appeared the studies of D. Kikuchi, T. Hayashi, Y. Mikami, K. Yanagihara and others, in whose hands details as well as general and historical views were given. Besides these, there are C. Kawakita, N. Okamoto, K. Kano, J. Kawai and others who are deeply versed in the subject but whose works have, for the most part, not been published.

The Chinese have published a number of studies based on European and American histories of mathematics. The Chinese Li Yen 李儼 has published a number of historical articles and his works are well known. Besides Mr. Li, there are also others who occasionally bring out their writings on the subject, and the historical studies of the Chinese are gradually advancing."

中國研究中算史者爲數尙少,深願研究者漸衆,俾

中算早得完滿整理,其算學家後裔與藏書家留有中算舊籍之鈔稿本者,亦望交與研究此學者,愼加批評,舊算精華,不至墮失,則幸甚矣.

二十年來中算史料之發見

目次

1. 小引。
2. 敦煌石室算書。
3. 永樂大典算書。
4. 算經十書。
5. 楊輝算書。
6. 明代算書。
7. 籌算制度。
8. 珠算制度。
9. 數學教育制度。
10. 縱橫圖說。
11. 幾何原本。
12. 對數表。
13. 數理精蘊。
14. 清代算書。
15. 清代算家生卒年表。

1. 小引

民國二十一年八月,中國科學社開年會於西安,儼曾應王理事長季梁之命,演說中國數學史大意.該項演述,未留底稿,惟念二十年來中算史料之發現,事較重要.前雖發表「二十年來中算史論文目錄」一文,

於國立北平圖書館館刊第六卷第二號.記錄年來國內人士關於中算之單篇論文.而於近年中算史料發現之經過,尚未記及.茲更就所知,臚舉下條.顧以見聞所限,或恐未備,尚望社內外同志,隨時指示,俾陸續有所發現,則幸甚矣.

2. 敦煌石室算書

敦煌石室藏書,於一千九百零七年五月二十日,經斯坦因 (A. Steine) 發現,搜括二十四箱寫本而去.繼之者爲法人伯希和 (Paul Pelliot). 經此兩次搜括,已所餘無幾,中國官廳最後乃將所餘者掃數運回北京.計今日所知敦煌石室漢文書.在倫敦有六千卷,在巴黎有一千五百卷,在北平有二千五百卷.其散在私家,究有若干,尚不得知.現在亦未有敦煌寫本全部目錄行世.僅在巴黎者已編有目錄,在倫敦,北平者至今尚未刊出,其中究有若干史料,尚未得知.惟在法國巴黎圖書館所編敦煌將來目錄第二六六七號內有「敦煌石室算書」一種,首尾殘缺.李儼於民國十五年六月爲發表於中大季刊,後復收入中算史論叢(一)之內.查該算書一開,記有

「儀同, 營主, 都督, 將, 帥, 火, 駄, 人.」

各名稱,吾人可由此種邊疆軍制,進而考求該書時代.原書算法雖甚粗淺,但爲吾國最古之寫本算書,則無疑義.現在敦煌寫本,散在全世界,將來全部整理之後,或有他種算書之發現,亦未可知.

3. 永樂大典算書

永樂大典以明永樂二年(1404)成書.隆,萬,(1567-1619)以後,便有殘缺.今國立北平圖書館藏有寫本大典目錄一册,上有翰林院印.館長袁同禮疑即乾隆四庫開館時(1772)館官核查之底册.(見國立北平圖書館館刊第六卷第一號—「永樂大典存目」).今查此目錄,永樂大典關於算學之

「算卷一萬六千三百二十九至一萬六千三百四十八 十本

算至斷卷一萬六千三百四十九至一萬六千三百六十七 十本」

尙完全存在.故戴震(1724-1777)尙得於此中輯出算經十書二十五卷,及益古演段三卷,數學九章十八卷.惜其中尙有他種算書,尙未輯出.庚子(1900)之役,全部散出,流入全世界各地.今英國劍橋大學藏有「永樂大典算卷一六三四三之一六三四四共二卷」,國立

北平圖書館亦有影攝本.吾人尚可於此中見透簾細草,丁巨算法,楊輝詳解算法,楊輝纂類,錦囊啓源,詳明算法,嚴恭通原算法,有爲知不足齋叢書,宜稼堂叢書,鈔本諸家算法及序記所未記者.而鈔本諸家算法及序記爲莫友芝(1811-1871)子繩孫所藏,疑亦出於永樂大典.李儼於民國初元,在上海收得此書.吾人於劍橋大學藏本永樂大典,及諸家算法及序記得考定宋楊輝算書時代,并考知 Pascal 三角形,中國之發見,先於 Petrus Apianus 二百六十六年.

4. 算經十書

算經十書爲吾國算學古籍,據明程大位算法統宗(1593)卷末,稱:

「宋元豐七年(1084)刋入祕書省,又刻於汀州學校:

黃帝九章, 周髀算經, 五經算經, 海島算經,
孫子算經, 張丘建算經, 五曹算經, 緝古算經,
夏侯陽算經, 算術拾遺.」

宋元豐七年刋刻算書之事,史書不載.據宋王應麟玉海卷四四稱:元豐間趙彥若校孫子,五曹,緝古,海島.宋馬端臨通考,卷二一九稱:元豐京監本夏侯陽算經一卷,則有明證.淸乾隆四庫開館時(1772)僅於永樂

大典輯出算經十書,今萬有文庫尚有此書翻刻本行世.但汲古閣藏有鈔本宋刻十書.爲毛晉 (1599-1659)季子扆(1640-?)所收藏.蓋從太倉王世貞家得孫子,五曹,張丘建,夏侯陽四種,從章邱李開先家得周髀,緝古二種;從黃虞稷(1629-1691)處得九章;皆元豐七年祕書省刊本.此項十書輾轉流入清宮,天祿琳瑯書目之御題算經十册卽爲其書.該鈔本與永樂大典本頗有出入,二百餘年來,收入禁中,外間無從得見.近年故宮博物院圖書館開館,世始有知之者.本年故宮博物院輯刻天祿琳瑯叢書第一集內有:

「汲古閣景宋鈔本: 周髀算經, 九章算經, 孫子算經, 五曹算經, 張丘建算經, 夏侯陽算經, 緝古算經.」

自此中外學人可多一參攷資料矣.宋刻宋印本算經十書近發見五種,此項祕笈尚藏人間,亦留心中算史事者所樂聞也.(1)

(1) 見趙萬里芸盦羣書題記:孫子算經三卷,張邱建算經三卷,殘本九章算術五卷,五曹算經五卷,數術記遺一卷,以上宋刻印本,在民國二十二年(1933)十二月七日大公報圖書副刊第六期之內。

5. 楊輝算書

宋楊輝算書,清代僅散見於知不足齋叢書,及宜稼堂叢書,惜已殘缺不全,中有卷頁錯亂者.時以阮元(1764-1849)李銳(1768-1817)羅士琳(?-1853)輩之留心中算,於楊輝算書,尙無所多知.近年以日本宮內省,內閣文庫,大塚高等師範學校三處所藏七卷本楊輝算法,及楊守敬舊藏七卷本楊輝算法之重出,及永樂大典殘本,諸家算法及序記之發現,楊輝算書之事實,始見明顯.李儼曾有「宋楊輝算書考」一文載於圖書館學季刊四卷一期,記錄其事.楊輝算法一書中縱橫圖(magic square)之記載,在中算史上,富有價值.因通常始載縱橫圖者,多推程大位(1593),自七卷本楊輝算法發見後,知其所記歲在宋德祐乙亥(1275),實先於程氏三百二十年.其在西洋則十四世紀始有人研治其法.

6. 明代算書

清阮元以明代爲中算黑暗時代,因不務搜求.疇人傳(1795-1799)所載明代算家爲數寥寥.實則明代介於宋元及清,其所貢獻,亦多可記.李儼因於民國十五年十二月,就搜求所得,作「明代算學書志」一文,刻入

圖書館學季刊一卷四期.二十年三月更因續有搜獲,作「增删明代算學書志」一文,刻入圖書館學季刊五卷一期.計所收近七十種.近日續有發現,再整理所得收入中算史論叢中.

7. 籌算制度

吾國古代計算器具,稱策,算,籌,籌算,籌策,算籌,或算子.其始形式甚長,如今籤籌,且有長及尺許者.

說文,前漢書律曆志幷作長六寸;隋書律曆志僅作三寸,清勞乃宣於古籌算考釋僅略記一二事.近年考據所得,知其始用竹,繼有用鐵,用牙,用玉者.其盛算之器,有算袋,算幐,算子筩,說詳李儼「籌算制度考」,見燕京學報第六期.

8. 珠算制度

珠算之發明人,今雖未考得.但向來以爲程大位(1592) 所獨剏. 近年得見吳敬九章詳註比類算法大全(1450),柯尙遷數學通軌 (1578),及朱載堉算學新說.知各書幷在程大位之前,述及算盤.而珠算中撞歸起一歌訣,則丁巨算法 (1355),安止齋何平子詳明算法,幷已題及.說詳李儼「珠算制度考」,見燕京學報第十期.

9. 數學教育制度

中國數學教育制度,以唐,宋,元,明爲最著.唐承隋制,其算學興廢之制,見於唐六典,舊唐書,新唐書,唐會要,大唐新語(日知錄卷十一,明經條引),唐文粹,資治通鑑,唐摭言,通典,通志,通考.宋代數學教育制度,見於宋史,洪邁容齋三筆,通考,李攸宋朝事實,鈔本宋會要各書,元明制度,散見於續通志,元通制條格,明太祖實錄(日知錄卷十一,經義論策條引),嚴恭通原算法序(1372)日知錄,皇明太學志諸書,說詳李儼「唐宋元明數學教育制度」,見科學第十七卷第十期.

10. 縱橫圖說

國內縱橫圖說,始見於宋楊輝續古摘奇算法(1275),再見於明程大位算法統宗(1593).明清之際似曾一度由西洋輸入此項學說.最近北平故宮博物院圖書館,發現鈔本三三等數圖一册,未著撰人姓氏.其書原藏敦本殿,後移入故宮博物院圖書館.著書時代,亦已無考.疑爲明清之際西洋輸入之作.其第二度復於清季由西洋輸入傅蘭雅(Dr. John Fryer)主編格致彙編(西名 The Chinese Scientific and Industrial, Magazine)其第三年(1878?)第二册載十六字方圖.李提摩太(Dr.

Timothy Richard)廣學類編(西名 Handy Encyclopaedia, 1903)有方面奇圖.頗引起研究此圖說之興味.說詳李儼「中算家之縱橫圖 (Magic Squares) 研究」,見學藝雜誌第八卷第九號.

11. 幾何原本

利瑪竇(1552-1610)於萬歷間(1603-1607)與徐光啓(1562-1633) 共譯幾何原本前六卷,利瑪竇萬歷丁未(1607)序稱:

「至今世又復崛起一名士,爲竇所從學幾何之本師,曰丁先生,開廓此道,益多著述.竇昔游西海,所過名邦,每遘顓門名家,輒言:後世不可知,若今世則丁先生之於幾何無兩也.先生於此書覃精巳久,旣爲之集解,又復推求續補凡二卷,與原書都爲十五卷.」

陳寅恪以爲利瑪竇所譯丁先生十五卷本幾何原本卽 Clavius(1537-1612),Euclidis Elementorum Libri XV, 1517, 以 Clavius 拉丁文爲 Clavus, 意爲丁(nail) 也.同文算指言

$$\frac{13946007693}{30800000}=46\frac{109207693}{30800000},\sqrt{20}=4\frac{5473}{11592},$$

亦引據 Clavius, Epitome Arithmetiae Practicae, Rome, 1583 之說也.

利徐共譯本幾何原本曾幾經校刻,徐光啓「題幾何原本再校本」稱:

「是書刻於丁未(1607)歲,板留京師.戊申(1608)春利先生以校正本見寄,令南方有好事者重刻之,累年來竟無有.校本留置家塾,曁庚戌(1610)北上,先生沒矣.遺書中得一本,其別後所自業者,校訂皆手跡,追惟篝燈函丈時,不勝人琴之感.其友龐(迪我),熊(三拔)兩先生,遂以見遺.庋置久之,辛亥(1611)夏季,積雨無聊,都下方爭論歷法事.余念牙絃一輟,行復五年,恐遂遺忘,因偕二先生重閱一過,有所增定,比於前刻差無遺憾矣.續成大業,未知何日,未知何人,書以竢焉.吳淞徐光啓.」

徐光啓孫爾默(1610–1669)「跋幾何原本三校本」稱:

「昔萬曆丁未(1607)泰西利氏譯,而授之先文定公,先文定筆受而述之簡册,正其訛舛,删其複蔓,而付之剞劂民.越五年辛亥(1611)再校而復刻之.今此本仍多點竄,又辛亥以後之手筆也.捧讀之餘,儼然對越,因念吾輩讀書,如拂塵几,愈拂愈淨,不厭其煩也.譯本曾轉寄西土,彼中學人,謂經先公訂正之後,

較之原文,翻覺屈志發疑,心計成數,以此知公之於數學,出自性成,特藉西文以發皇耳.」(見徐氏宗譜)(2)

利徐共譯本曾譯成滿文,法蘭西人支那學書目,(H. Cordier, Bibliotheca Sinica Vol. II, p. 1092),稱天學初函於乾隆二十三年(1758)譯爲滿文,其幾何原本自亦在翻譯之列也.

清初七卷本幾何原本,及十二卷本幾何原本二種,又有幾何原本滿文譯本一種.(3)

今北平故宮博物院圖書館藏:

「滿文. 律一二一九,45

幾何原本七卷三册.鈔本. 子 景陽宮

漢文 律八三五,29

幾何原本七卷一册.鈔本.(有序) 景陽宮

附算法(原本)一卷.鈔本.(有序).」

又國立北平圖書館亦藏有:

(2) 參看:徐宗澤,泰教閣老與科學,聖教雜誌第二十三年,第十一期,第61頁,民國二十二年(1933)十一月,上海。

(3) 參看:陳寅恪,幾何原本滿文譯本跋,中央研究院歷史語言研究所集刊第二本第三分,第281-282頁。民國二十年(1931)四月,北平。

「幾何原本七卷二册,內缺六卷一册.」

李儼已於「中國數學史導言」一文論述其事.北平故宮博物院圖書館又藏有:

「洪五九二,16.

幾何原本十二卷四册鈔本　(無序).　懋勤殿

附算法(原本)二卷鈔本　(無序).」

似爲數理精蘊本幾何原本之底本.

12. 對數表

「對數之發明及其東來」李儼已於十六年二,三,六月刊入科學中.其關於三角函數之對數表則李儼於「三角術及三角函數表之東來,」亦有記及.近年則此項對數表尙時有發現.如北平故宮博物院圖書館藏:

「律八四一,28.

御製對數闡微十卷五册　鈔本　景陽宮」

與數理精蘊略同,惟卷前多「一至一萬內數根」九葉,前無序,後無90001至99991表.

此外袖珍本對數廣運年希堯撰一册鈔本一百零四頁,及袖珍本數表一册.則并爲小數四位之常用數對數表及三角函數對數表.

13. 數理精蘊

清聖祖受業西洋教士,因而編纂數理精蘊(1723年刻).其書曾經修正,向無知者.自七卷本幾何原本十二卷本幾何原本,十卷本御製對數闡微,一卷本算法原本,及二卷本算法原本等之發見,其事始顯.李儼曾於「中國數學史導言」內略舉一二例可參觀焉.

14. 清代算書

清代算書,卷帙雖富,向無人加以整理.劉鐸古今算學書錄所記,亦多未備.民國十五年六月裘冲曼「中國算學書目彙編」,刋入清華學報三卷一號,曾遠榮又爲增補.其書以各書字畫多寡爲序,頗便檢查.李儼於十七,八年,又按人名字畫多寡爲序.但年來搜求所得,與書目之散見於各家著述,及各省縣志書者,尚可得若干種.當爲另編「清代算學書志」

15. 清代算家生卒年表

清代算家生卒年之見於各家疑年錄,或未見於疑年錄者,今總錄如下,以備學者參考

薛鳳祚(? -1680)
王錫闡(1628-1682)
梅文鼎(1633-1721)
陳厚耀(1648-1722)
陳　訏(1650-1732)
陳世仁(1676-1722)
江　永(1681-1762)
梅瑴成(1681-1763)
莊亨陽(1686-1746)
陳世佶(1686-1749)
沈大成(1710-1781)
王元啓(1714-1786)
褚寅亮(1715-1790)
戴　震(1724-1777)
李　潢(? -1811)
錢大昕(1728-1804)
錢　塘(1735-1790)
龔　綸(1739-1799)
陳昌齊(1743-1820)
紀大奎(1746-1825)
孔廣森(1752-1786)
張敦仁(1754-1834)
凌廷堪(1755-1809)
徐養原(1758-1825)
安清翹(1759-1830)
焦　循(1763-1820)
顧廣圻(1766-1835)
汪　萊(1768-1813)
李　銳(1768-1817)
許宗彥(1768-1819)
戴敦之(1768-1834)
駱騰鳳(1770-1841)
劉　衡(1776-1841)
許桂林(1778-1821)
羅士琳(? -1853)
朱駿聲(1778-1858)
項名達(1789-1850)
董祐誠(1791-1823)
顧觀光(1799-1862)
徐有壬(1800-1860)
戴　煦(1805-1860)
陳　暘(1806-1863)
張文虎(1808-1885)
馮桂芬(1810-1874)
李善蘭(1810-1882)
汪曰楨(1812-1881)
劉熙載(1813-1881)
熊其光(1817-1855)
徐　壽(1818-1884)
鄒伯奇(1819-1869)
李錫蕃(1823-1870)
夏鸞翔(1823-1864)
強汝詢(1824-1894)
華蘅芳(1830-1902)
趙元益(1840-1902)
勞乃宣(1842-1920)
席　淦(1845-1917)
曾紀鴻(1848-1877)
左　潛(? -1874)
劉嶽雲(1849-1917)
黃泰生(1852-1893)
華世芳(1854-1904)
何步瀛(1856-1917)
廖家綬(1860-1890)
蔣維鍾(1868-1899)

(完)

二十年來中算史論文目錄

序

民國以來,曾以研治中算史事,發表論文於各雜誌,爲拋磚引玉之助.玆復參考人文雜誌,國學論文索引,國學論文索引續編,并因北平圖書館及友人孫文青君之助,寫成此目,爲有志研究中算史者之參考.民國二十一年二月.

題	作者	所載雜誌	出版期	號	頁	備考
海鏡新題	崔朝慶	數學雜誌(南通)	中華民國元年十二月	二册	50-51	
古人喜用平方數	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	84-85	
若干與幾何之別	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	85	
常用數學	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	86	
九九	崔朝慶	數學雜誌(南通)	元年十二月	二册	86-87	
某君來書論著述中國算學史事		科學	五年二月	二卷二期	235-237	
中國數學史餘錄	李儼	科學	六年二月	二卷二號	238-241	
中國圓周率略史	茅以昇	科學	六年四月	三卷四號	411-423	
π之略史	楊荃駿	北高數理雜誌	七年	一號	84-89	
圓周率考	齊汝璜	北大數理雜誌	八年一月	一卷一號	67-77	
中國數學源流考略	李儼	北大月刊	八年四月 十一月 九年七月	一卷四號 五 六	1-19 59-74 65-94	

中國數學源流考略識語	張崧年	北大月刊	八年四月	一卷四號	21-22	
圓率進化史	孫　塘	學生雜誌	九年四月	七卷四號	120-132	
李儼所藏中國算學書目錄	李　儼	科學	九年四月 九年五月	五卷四號 五卷五號	418-426 525-531	
大衍術論	高　均	工科雜誌（震旦大學院）	九年	二號	7-64	
大衍術	傅種孫	北京高師數理雜誌	九年	三期		
中國數學書籍考	劉應先	武高數理	十年一月至四月	六期 七期 九期	51-53 53-56 57-61 （未完）	國立武昌高等師範學校「數理學會雜誌」自民國十年四月九期起改名「數理化雜誌」
九章問題分類考	錢寶琮	學藝	十年五月	三卷一號	1-10	互見單行本錢寶琮古算考源
方程算法源流考	錢寶琮	學藝	十年六月	三卷二號	1-12	互見單行本古算考源
百鷄術源流考	錢寶琮	學藝	十年七月	三卷三號	1-6	互見單行本古算考源
求一術源流考	錢寶琮	學藝	十年八月	三卷四號	1-16	互見單行本古算考源
記數法源流考	錢寶琮	學藝	十年十月	三卷五號	1-6	互見單行本古算考源
「以上」及「以下」之用語	黃際遇	武高數理	十一年一月	六期	49-50	
珠算歸除之歌訣	黃際遇	武高數理	十一年一月	六期	50-51	
朱世傑垜積術廣義	錢寶琮	學藝	十二年一月	四卷七號	1-9	互見單行本古算考源
中國算書中之圓率研究	錢寶琮	科學	十二年二月 十二年三月	八卷二號 八卷三號	114-129 254-265	
π之小史	周　沛	北師大數理雜誌	十二年六月	四卷二號	35-45	

易卦與代數之定律	沈仲濤	學燈（時事新報）	十三年一月三日			互見學燈合訂本第六卷第一册第三號二頁至三頁
明淸之際西學輸入中國考略	張蔭麟	淸華學報	十三年六月	一卷一號	38-69	
紀元後二世紀我國大科學家——張衡	張蔭麟	東方雜誌	十三年十二月	二一卷二三號	89-98	
四元開方釋要	鄭之蕃	淸華學報	十三年十二月	一卷二號	233-278	
策算淺釋	陳展雲	晨報六週年紀念特刊	十三年十二月		217-222	
張衡別傳	張蔭麟	學衡	十四年四月	四十期	1-13	
李儼所藏中國算學書目錄續編	李儼	科學	十四年七月 十五年六月 十六年十二月 十八年三月 十九年十一月	十卷四號 十一卷六號 十二卷十二號 十三卷八號 十五卷一號	548-551 817-820 1825-1826 1134-7113 158-160	
大衍求一術之過去與未來	李儼	學藝	十四年九月	七卷二號	1-45	互見李儼中算史論叢(一)
中算輸入日本之經過	李儼	東方雜誌	十四年九月	二二卷十八號	82-88	互見李儼中算史論叢(一)
梅文鼎年譜	李儼	淸華學報	十四年十二月	二卷二號	609-634	互見李儼中算史論叢(一)
印度算學與中國算學之關係	錢寶琮	南開週刊	十四年十二月	一卷十六號	4-8	
重差術源流及其新註	李儼	學藝	十五年四月	七卷八號	1-15	互見李儼中算史論叢(一)
敦煌石室算書	李儼	中大季刊	十五年六月	一卷二號	1-4	互見李儼中算史論叢(一)
中算家之Pythagoras定理研究	李儼	學藝	十五年十月	八卷二號	1-27	互見李儼中算史論叢(一)

中國算學書目彙編	裘冲曼	清華學報	十五年六月	三卷一號	附錄43-92	
又增補	曾遠榮	同上	同上	同上	附錄92-96	
李鄒顧戴徐諸家對於對數之研究	周明羣	清華學報	十五年十二月	三卷二號	1047-1068	
明代算學書志	李　儼	圖書館學季刊	十五年十二月	一卷四期	667-682	互見李儼中算史論叢(一)
對數之發明及其東來	李　儼	科學	十六年二，三，六月	十二卷二，三，六號	109-158 285-325 689-700	互見李儼中算史論叢(一)
九章算術盈不足術傳入歐洲考	錢寶琮	科學	十六年六月	十二卷六號	701-714	
中國算學書目彙編質疑	湯天棟	學藝	十六年六月	八卷七號	1-3	
三角術及三角函數表之東來	李　儼	科學	十六年九月	十二卷十號	1345-1393	
中算家之縱橫圖研究	李　儼	學藝	十六年九月	八卷九號	1-40	
明清之季西算輸入中國年表	李　儼	圖書館學季刊	十六年十二月	二卷一期	1-34	互見李儼中算史論叢(一)
九章及兩漢之數學	張蔭麟	燕京學報	十六年十二月	二號	301-312	
明清算家之割圜術研究	李　儼	科學	十六年十一，十二月 十七年一，二月	十二卷十一，十二號 十三卷一，二號	1487-1520 1721-1766 53-102 200-250	
永樂大典算書	李　儼	圖書館學季刊	十七年三月	二卷二期	189-195	
秦以前之數學	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十七年三月六日	二卷十九號	182-194	
整理中國算學材料之提議	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十七年五月十六日	三卷二九期	26-27	
中算史之工作	李　儼	科學	十七年六月	十三卷六號	785-809	
李善蘭年譜	李　儼	清華學報	十七年六月	五卷一號	1625-1651	

中國珠算之起源	呂　炯	東方雜誌	十七年七月	二五卷十四號	81-84	
數名古誼	丁　山	中央研究院歷史語言研究所集刊（廣州）	十七年十月	一本一分	89-94	
徐光啓著述考略	徐景賢	新月	十七年十月	八號	1-14	
新嘉量之校量及推算	劉　復	輔仁學誌	十七年十二月	一卷一號	1-30	
近代中算著述記	李　儼	圖書館學季刊	十七年十二月 十八年九月 六 十二	二卷四期 三卷二期 三卷三期 三卷四期	601-640 149-200 367-387 601-617	
關於算學之中國故事	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十八年一月三十日	六卷六六期	29-32	
九章算術補注	李　儼	北平北海圖書館月刊	十八年二月	二卷二號	127-133	
中算家之級數論	李　儼	科學	十八年四五月	十三卷九，十號	1139-1172 1349-1401	
天算大家海寧李善蘭的著述	顧頡剛 陳　槃	中山大學圖書館報	十八年六月	七卷四期	15-22	
盧木齋(靖)先生與木齋圖書館(插圖)		圖書館學季刊	十八年六月	三卷一，二號合刊	卷前	
中國天文學史之一重大問題——周髀算經之時代	劉朝陽	中山大學語言歷史研究所週刊	十八年八月	九四，九五，九六期合刊	1-11	
周髀算經考	錢寶琮	科學	十八年九月	十四卷一號	7-29	
中算家之Pascal 三角形研究	李　儼	學藝	十八年十月	九卷九號	1-15	
孫子算經考	錢寶琮	科學	十八年十月	十四卷二號	161-168	
夏侯陽算經考	錢寶琮	科學	十八年十一月	十四卷三號	311-320	
珠算開方法的原理	紹　先	學生雜誌	十八年十二月	十六卷十二號	47	

新舊幻方底介紹	衞寶怡	南開大學週刊	十八年十二月	七七號	51	
籌算制度考	李　儼	燕京學報	十八年十二月	六號	1129-1134	
宋楊輝算書考	李　儼	圖書館學季刊	十九年三月	四零一號	1-21	
孫子算經補注	李　儼	國立北平圖書館館刊	十九年七八月	四卷四號	13-29	
九九數的遊戲	徐子龢	中華教育界	十九年十月	十八卷十號	63	
中算家之方程論	李　儼	科學	十九年十一月	十五卷一號	7-44	
莽量函率考	顏希深	燕京學報	十九年十二月	八號	1493-1515	
明清兩代來華外人考略	張恩龍	圖書館學季刊	十九年十二月	四卷三四號合刊	447-472	
新收陳房伯(希齡)歷算書稿述記	王獻唐	山東省立圖書館季刊	二十年三月	一卷一期	57-69	
增修明代算學書志	李　儼	圖書館學季刊	二十年三月	五卷一號	2123-2138	
堆羅漢	劉薰宇	中學生	二十年三月	十三號	87	
九章算術源流考	孫文青	女師大學術季刊	二十年四月	二卷一號	1-60	
劉氏檢積籌說明書	劉增冕	工程季刊	二十年四月	六卷二號	197-201	
配合論中之一旁支	高　均	科學	二十年四月	十五卷四號	508-513	
數名原始	方國瑜	東方雜誌	二十年五月	二八卷十號	83-88	
測圓海鏡研究歷程考	李　儼	學藝	二十年六月十月	十一卷二，六，八號	1-26 1-15 1-36	
物不知總之普通算法	敖文宗 李　儼	科學	二十年九月	十五卷九號	1399-1413	
字號考	梁岵廬	東方雜誌	二十年九月	六卷一七號	97-100	
珠算制度考	李　儼	燕京學報	二十年十二月	十期	2123-2138	
附錄						
古算名原	黃　節	國粹學報	第四年（光緒戊申三十四年）	第三冊政篇 四六期 四九期	1-6 1-9	

永樂大典算書

永樂大典始於明永樂元年 (1403), 由解縉奉敕纂修,二年 (1404) 書成,賜名文獻大成,以多未備,復命姚廣孝等重修,又命禮部簡中外官,及四方宿學老儒有文學者充纂修,與其事者,凡二千一百六十九人,五年(1407)十一月書成,進呈,改名曰永樂大典.[1]

其時并有專家分與纂事,故明程大位算法統宗(1593)卷首,稱:

「夫難題昉於永樂四年 (1406), 臨江劉仕隆公,偕內閣諸君預修(永樂)大典,退公之暇,編成雜法,附於九章通明之後.」

而永樂大典事韻第一六三六二卷至一六三六四卷爲雜法,未知是否卽前稱之雜法,查大典中言算者,在事韻,計:

---

(1) 袁同禮,永樂大典考,學衡第二十六期,1924年二月.李正奮,永樂大典考,圖書館學季刊第一卷,第二期 1926年六月.

『事韻

一六三二九	算		
一六三三〇	算法一	目錄	起原
一六三三一	算法二	乘法	
一六三三二	算法三	因法	
一六三三三	算法四	除法	
一六三三四	算法五	歸法	
一六三三五	算法六	加法　減法	
一六三三六	算法七	九章總錄	
一六三三七	算法八	方田	
一六三三八	算法九	方田	
一六三三九	算法十	方田	
一六三四〇	算法十一	粟米	
一六三四一	算法十二	衰分	
一六三四二	算法十三	衰分	
一六三四三	算法十四	異乘同除	
一六三四四	算法十五	少廣	
一六三四五	算法十六	少廣	
一六三四六	算法十七	少廣	
一六三四七	算法十八	少廣	

一六三四八	算法十九	商功
一六三四九	算法二十	商功
一六三五〇	算法二十一	委粟
一六三五一	算法二十二	均輸
一六三五二	算法二十三	均輸
一六三五三	算法二十四	均輸
一六三五四	算法二十五	盈不足
一六三五五	算法二十六	句股
一六三五六	算法二十七	句股
一六三五七	算法二十八	句股
一六三五八	算法二十九	音義
一六三五九	算法三十	九章纂類
一六三六〇	算法三十一	端疋
一六三六一	算法三十二	斤稱
一六三六二	算法三十三	雜法
一六三六三	算法三十四	雜法
一六三六四	算法三十五	雜法　算竿』

隆,萬(1567-1619)以後,書便有缺,入清則續通考謂缺其什一,紀昀等亦屢言其缺而不完,四庫開館(1772)戴震(1724-1777)等尙於此中輯出:

周髀算經二卷,音義一卷	永樂大典本
九章算術九卷	永樂大典本
孫子算經二卷	永樂大典本
海島算經一卷	永樂大典本
五曹算經五卷	永樂大典本
夏侯陽算經三卷	永樂大典本
五經算術二卷	永樂大典本
數學九章十八卷	永樂大典本
益古演段三卷	永樂大典本(2)

天祿琳瑯書目於御題算經十册,稱:

『考四庫全書所錄張丘建,輯古二種,乃(王杰家藏)鈔本,其九章,孫子,五曹,夏侯陽,乃從永樂大典數篇編成.』

四庫全書中,由永樂大典輯出算書,曾以小部分付刻,如:周髀算經,九章算術,孫子算經,海島算經,五曹算經,夏侯陽算經,五經算術,并有武英殿聚珍版刋本,曲阜孔繼涵(1739–1783)因永樂大典本海島,五經;宋元豐本周髀,九章輯古,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,并戴

(2) 四庫全書總目卷一百六,子部十六,天文算法類一;卷一百七,子部十七,天文算法類二.

震所著策算一卷(1744),句股割圜記三篇(1758)二種合刻之,號爲算經十書.其他算書尚未輯出,已輯出各書亦未全出版也.

阮元(1764-1849)於此中鈔得百餘番,一時知算,如李銳(1768-1817)李潢(?-1811)輩幷錄副傳觀,阮元於補疇人傳「楊輝」傳,論稱:

「輝所著書,載於文淵閣書目,訪之三十年,通人學士,俱未之見,嘉慶庚午(1810)余以翰林學士,充文穎館提調官,於永樂大典中鈔得楊輝摘奇及(雜鈔算書)等約百餘番,嗣漕淮安,吾友江上舍鄭堂(藩)排比整齊之,然掇拾殘賸之餘,究非全帙也.……」

李銳於宜稼堂本楊輝算法嘉慶甲戌(1814)跋,稱:

「歲庚午(1810)應順天試,留京師,在李雲門侍郎(潢)寓邸,見雜鈔算書約百餘番,乃阮芸臺中丞(元)提調文穎館時,從永樂大典中摭錄者,中有楊輝摘奇數條,……」

宋秦九韶數書九章(四庫)館本作數學九章.李銳曾校四庫本數學九章,道光二十二年(1842)郁松年

曾用四庫本數學九章,以校明趙琦美本數書九章,[3]

李銳又校益古演段三卷(1797)刻於知不足齋叢書,此叢書由歙人鮑廷博,於乾隆丙申(1776)以後,陸續刋刻,至二十七集,未竟而卒,子孫繼之,成三十集.其二十七集中有:

透簾細草一卷　　撰人佚

續古摘古算法一卷　　宋楊輝撰

丁巨算法一卷　　元丁巨撰

疑卽出於阮元所謂之楊輝摘奇及雜鈔算書百餘番也.

永樂大典咸豐庚申(1860)又有遺失,光緒乙亥(1875)檢之,已不及五千册,至丙子(1876)僅三千餘册,癸巳(1893)僅六百餘册[4],庚子(1900)之亂,全書散佚,夢天餘話稱:

「庚子拳匪之亂,紅巾滿京華,……譯學館總辦劉可毅太史,於亂兵馬槽下,拾得永樂大典數十册.」[5]

(3) 宜稼堂叢書本數書九章札記.

(4) 見辭源.

(5) 王小隱,夢天餘話,丁巳(1917)元宵後五日,某年時報.

其分散各地者,今已有袁同禮,劉國鈞前後爲之編成存目.[6]

李儼先後得莫友芝(1811–1871)子繩孫舊藏諸家算法及序記,及永樂大典卷一六三四三及卷一六三四四,曾於李儼所藏中國算學書目錄,及續編記錄其事:

『(一六〇)諸家算法及序記,無卷數,不著撰人,鈔本,一册,(此書係獨山莫友芝次子繩孫舊藏本諸家算法中,有:楊輝日用算法,楊輝詳解算法,楊輝摘奇算法,透簾細草,丁巨算法,錦囊啓源,賈通全能集,詳明算法,嚴恭通原算法.諸家算法序記中,有九章算經序,楊輝通變算法序,楊輝田畝比類算法序,楊輝摘奇算法序,秦九韶數學九章序,敬齋先生益古演段序,詳明算法序,丁巨算法序,嚴恭通原算法序.)(詳明算法二卷,元儒安止齋撰序.序稱:「夫學者初習因歸,則口授心會,至於

(6) 袁同禮永樂大典考,學衡雜誌第二十六期.

袁同禮永樂大典現存卷目,中華圖書館協會會報,第一卷第四期,第4–10頁.

袁同禮劉國鈞永樂大典現存卷數續目,中華圖書館協會會報第二卷第四期第9–10頁,一九二七年二月.

擡歸起一,時有差謬,」足見珠算之術,元代已大備矣.』(7)

『(二五二)永樂大典卷一六三四三之一六三四四,十翰,算法十四之十五,影攝本,一册.

原書藏英國劍橋大學,法伯希和君影攝見贈.

本書爲「異乘同除,」及「少廣」兩節,其所引算書,有:九章算經,孫子算經,五經算術,五曹算經,夏侯陽算經,秦九韶數學九章,楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法,楊輝纂類,透簾細草,錦囊啓源,丁巨算法,賈通全能集,詳明算法,嚴恭通原算法.就中所引透簾細草,丁巨算法,楊輝詳解算法,楊輝纂類,錦囊啓源,詳明算法,嚴恭通原算法;有爲知不足齋叢書,宜稼堂叢書,鈔本諸家算法所未記者.』(8)

而九章算術,數書九章,賈亨算法全能集,則諸家算法及序記,及永樂大典卷一六三四三之一六三四四幷作九章算經,數學九章,賈通算法全能集,則諸家算法及序記亦當如知不足齋叢書本三書,幷出於永

(7) 科學第五卷,第五期,第531頁.

(8) 科學第十一卷,第六期,第820頁.

樂大典也.雖綴拾殘叢,非復全豹,就中已多中算史料,足供採擇,李儼已先後於所撰:

中國數學源流考略.[9]

大衍求一術之過去與未來.[10]

明代算學書志.[11]

及單行本中國算學小史,中國數學大綱上册,引述其說,而較重要者則爲楊輝之箸書年代,與其所記遞加圖(卽Pascal triangle).他日全書或可續出,則吾人所得必復更多;以戴震,阮元之善述中算,未嘗全爲輯錄,誠可惜矣.

(9) 北京大學月刊第一卷第四,五,六號,民國八年四月至民國九年七月.

(10) 學藝雜誌第七卷第二號,民國十四年九月.

(11) 圖書館學季刊第一卷第四期,民國十五年十二月.

宋楊輝算書考

1. 書錄

楊輝字謙光,錢塘人.景定辛酉(1261)作詳解九章算法,後附纂類,總十二卷.今所傳者,非其全帙[1].又嘗著詳解算法若干卷,以盡乘除,九歸,飛歸之蘊.景定壬戌(1262)作日用算法二卷,以明乘除,爲初學用,編詩括十有三首,立圖草六十六問,永嘉陳幾先爲之題跋[2].咸淳甲戌(1274)作乘除通變本末三卷,上中卷乘除通變算寶爲輝自撰,下卷法算取用本末則與史仲榮合撰.德祐乙亥(1275)作田畝比類乘除捷法二卷,是年冬因劉碧澗,丘虛谷及舊刋遺忘之文,而作續古

(1) 宜稼堂叢書本詳解九章算法存商功第五,均輸第六,盈不足第七,方程第八,句股第九,凡五章.脫去方田第一,粟米第二,衰分第三,少廣第四,凡四章,所存者不循舊次,朱景昌亦未爲之排比.從永樂大典殘本卷一六三四三之一六三四四,十翰,算法十四之十五尙可輯得衰分第三,少廣第四,兩章.

(2) 其序跋及標題,載入李儼所藏鈔本諸家算法中.原書爲莫友芝(1811-1871)之子繩孫舊藏本.又前記永樂大典殘本亦有楊輝日用算法題問.

摘奇算法二卷. 以上七卷稱爲楊輝算法. 洪武戊午(1378) 古杭勤德書堂新刋行世(3).

就中楊輝算法宋刻本,入淸尙存殘卷.

按淸羅士琳疇人傳卷四十七宋楊輝論稱:後聞蘇州黃蕘圃主事丕烈得宋刋楊輝算法,屬何君夢華元錫假錄其副,知輝於此學未云深造.

至明初洪武戊午(1378)有古杭勤德書堂刋本.

今國立北平圖書館藏宋楊輝算法第一册首頁大書『新刋宋楊輝算法,』其上橫書『古杭勤德堂書,』而目錄後記有『洪武戊午冬至,勤德書堂新刋』字樣.乃高麗覆明刻本.

明人著書如顧應祥句股算術 (1533),程大位算法統宗 (1593) 並引楊輝算法之說.

明顧應祥句股算術卷上:句股求弦一『圓材從二尺一寸得方面幾何』題註稱『此術楊輝摘奇算法作一尺四寸二百八十一分寸之二百四十五謬矣』云云.又明程大位算法統宗卷三:田畝演段根圖解『假如方田隅斜一十四步問積步

(3) 國立北平圖書館藏有高麗覆明洪武刋本宋楊輝算法,原書爲楊守敬舊藏本.

併方面各若干』題,引楊輝方求斜法,斜求積法,謂『楊輝用開平求斜,理明以合面積』[4].又算法統宗卷八:海島題解,稱『宋楊輝釋名圖解,以伸前賢之美』[5].

明文淵閣書目,(1441)明葉盛(正統進士)菉竹堂書目及算法統宗(1593)並列楊輝著書目錄.

文淵閣書目:有楊輝九章一部一册,通變算寶一部一册,摘奇算法一部一册[6].

菉竹堂書目:有楊輝九章一册,通變算寶一册,摘奇算法一册[7].

算法統宗卷十三,算經源流,稱『嘉定,咸淳,德祐等年又刊各書:

詳解黃帝九章

詳解日用算法

乘除通變本末

(4) 見日本早稻田大學藏明刻本算法統宗卷三,第十七及第十八頁.

(5) 見日本早稻田大學藏明刻本算法統宗卷八,第十七及第十八頁.

(6) 據南京國學圖書館藏鈔本明楊士奇正統六年(1441)文淵閣書目卷十四第二十三頁.

(7) 據粤雅堂叢書本崑山葉文莊公盛菉竹堂書目.

續古摘奇算法

以上俱出楊輝摘奇內』[8].

永樂大典頗引其書,阮元(1764-1849)曾於文穎館鈔得百餘番.即據現存之永樂大典殘本卷一六三四三之一六三四四,尚引有楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法,楊輝詳解九章算法,楊輝纂類.又清人莫友芝子繩孫藏諸家算法亦出於永樂大典,此中亦引有楊輝摘奇算法,楊輝詳解算法,楊輝日用算法及楊輝詳解九章序,楊輝日用算法序,楊輝通變算法序,楊輝田畝比類算法序,楊輝摘奇算法序.

入清則有毛晉(1598-1652)精鈔本,宋楊輝算法殘本.

清陸心源皕宋樓藏書志卷四十八,稱:

『田畝比類乘除捷法二卷,算法通變本末一卷,乘除通變算寶一卷,算法取用本末一卷,續古摘奇算法一卷汲古閣影元本……………………案是書每葉二十二行,行二十五字.卷中有毛晉私印,子晉,汲古主人,朱文三方印;仲雍故國

(8) 據古今圖書集成歷象彙編,歷法典第一百二十五卷,算法部彙考十七,算法統宗十三,第三十六頁.

人家,子孫寶之,朱文二方印;趙文敏書卷末云:吾家業儒,辛勤置書,以遺子孫,其志何如!後人不讀,將至鬻頹其家聲,不如禽犢,若歸他室,當念斯取非其有,无甯舍旃,五十六字,朱文大方印;毛扆之印,斧季,朱文二方印;毛晉二字連珠方印.汲古祕本書目所謂精鈔之書,每本有費四兩之外者,此類是也.』

案毛鈔本續古摘奇算法作一卷,蓋殘本也.

陸心源藏書輾轉流入日本,毛鈔楊輝算法亦與其列,日本明治四十三年河田羆靜嘉堂祕籍志第一帙卷七第三十七頁所載:

毛鈔楊輝算法宋楊輝 一匣影宋鈔二本,即是書也.

又毛嶽生(1791–1841)[9]家藏本楊輝詳解九章算法殘本,原寫本每葉二十行,行二十一字.每葉俱有石研齋鈔本五字,卷末有石研齋秦氏印,未知秦氏爲何許人也[10].

---

(9) 據光緒八年(1882)嘉定縣志.

(10) 見宜稼堂叢書郁松年道光壬寅(1842)詳解九章算法札記序第一頁,及宋景昌詳解九章算法札記第一頁.

清之中葉,書忽失傳,故阮元疇人傳(1799)卷二十二,宋楊輝論,稱:輝所稱算書,十書而外,今無一存者.又羅士琳疇人傳(1840)卷四十七稱阮相國(元)訪之三十年,通人學士,俱未之見.又宜稼堂叢書本嘉慶甲戌(1814)李銳楊輝算法跋稱:向聞錢景開言曾有楊輝算法售與一浙人,三十年來博訪通人,皆未之見.

阮元於嘉慶庚午(1810)以少詹事在文穎館總閱全唐文,於永樂大典中鈔得楊輝摘奇及議古等百餘番.嗣督漕淮安,屬江上舍鄭堂(藩),排比整齊之,然掇於殘賸之餘,究非全帙也.語見清羅士琳疇人傳四十七.

李銳楊輝算法跋(1814)亦稱:歲庚午(1810)應順天試,留京師,在李雲門侍郎(潢)寓邸,見雜鈔算書約百餘番,乃阮芸臺中丞(元)提調文穎館時,從永樂大典中摭錄者.中有楊輝摘奇數條,始得略覩梗概,究未見全書也.

歙人鮑廷博於乾隆丙申(1776)以後,陸續刊刻知不足齋叢書,至二十七集,未竟而卒,其二十七集中有續古摘奇算法一卷.與透簾細草及丁巨算法共刻一册.當幷出於永樂大典.惟未審卽阮元之所掇拾者

否?

嘉慶甲戌(1814)夏,黃丕烈於同郡故家得楊輝算法,皆散葉,且顚倒錯亂殊甚.暇日招李銳至百宋一廛相與驗其文義,排比整齊,得書六卷,首尾序目無缺失.亟命工裝成一巨册,櫝而藏之.由是識與不識,咸知爲希世寶矣[11].羅士琳聞黃丕烈得宋刋楊輝算法屬何元錫(1766-1804)假錄其副![12]

李銳排比所得六卷,蓋因田畝比類乘除捷法爲二卷,算法通變本末爲一卷,乘除通變算寶爲一卷,算法取用本末爲一卷,續古摘奇算法爲一卷,共得六卷也.而阮元研經室外集,阮氏經進書提要作楊氏算法三卷,或楊輝算法三卷.蓋分田畝比類乘除捷法及算法通變本末爲上卷,乘除通變算寶爲中卷,算法取用本末爲下卷,末附續古摘奇.清李兆洛養一齋文集卷七,跋楊輝算法,亦作三卷.惟深歎續古摘奇惜無從見,蓋續古摘奇之非全帙,顯而易見也.

道光壬寅(1842)郁松年刻毛嶽生家藏本詳解九章算法,又續刻楊輝算法六卷於其.楊輝所箸詳解

(11) 宜稼堂叢書本,李銳楊輝算法跋.

(12) 清羅士琳疇人傳四十七.

九章之後,並由宋景昌校讎,別作札記,附於書後,列於宜稼堂叢書之內.

就中續古摘奇算法一書,雖宜稼堂叢書本,知不足齋叢書本,及莫友芝藏諸家算法本所收互有詳略,終非全帙也.

其在國外,宋楊輝算法一書,頗有流傳.朝鮮於宣德八年(1482)曾重刊洪武戊午本行世.其田畝比類乘除捷法後,有跋,詳記其事,謂觀察使臣辛引孫,引奉內旨,屬府尹臣金乙辛,刊官李好信命工鋟梓云.而朝鮮重刊算學啓蒙金始振於順治十七年(1660)序,亦稱歲丁酉(1657)居憂抱病無外事,適得鈔本楊輝算書於今金溝縣令鄭君瀁.

日本石黑信由(1760-1836)算法書籍目錄載有:大明宣德八年宋楊輝算法三册,稱:本書爲關孝和所傳寫,時寬文元年歲次辛丑(1661).此書著錄乘除,加減,田畝算法,河圖,洛書,方陣,町見,窮管,等術[13].

現在日本東京所藏宋楊輝算法計有三部,一在

(13) 此書今藏日本帝國學士院.參看:和算圖書目錄第744頁,昭和七年四月東京.

宮內省[14]，一在內閣文庫，一在大塚高等師範學校.日人三上義夫在日本初發現闕鈔足本楊輝算法時，曾於大正二年四五月，數學世界第七卷五，六號，著有『關於楊輝算法之一節』一文，記錄其事.李儼亦於民國八年北京大學月刊第一卷第四號，中國數學源流考略內，引續古摘奇算法上卷縱横圖之說.

國立北平圖書館今亦藏有朝鮮刻本宋楊輝算法，爲楊守敬旅日本時所收購者.

此外楊輝所著書，惟日用算法二卷，及詳解算法二書，世尙無傳本.續古摘奇算法序稱:又以乘除加減爲法，秤斗尺田爲問，目之曰日用算法.又算法通變本末卷上稱:詳解算法第一卷，有乘除，立問一十三題，專說乘除.今於諸家算法及永樂大典殘本卷一六三四三之一·六三四四中，尙可輯得若干條.

2. 輯佚

楊輝日用算法

---

(14) (宮內省)圖書寮漢籍善本書目卷三第四十一頁記宋楊輝算法四種三册，稱:『……卷尾有宣德八年(1482)癸丑五月日慶州府板刊一行并列銜，文政中毛利出雲守高翰所獻幕府，首有「成山苗裔」，「南宮氏厚」，「佐伯侯毛利高標字培私藏書畫之印」諸印記』.

序

萬物莫逃乎數.是數也,先天地而已存,後天地而已立.蓋一而二,二而一者也.自非參錯妙用,隱括衆微,未易窮此.錢塘楊輝以廉飭己,以儒飾吏,吐胸中之靈機,續前賢之奧旨,從奇而耦,由晦而彰.內可以知外,表可以識裏.其用心豈爲運牙籌,計金穀而已哉?國學前廡永嘉陳幾先跋.

又序

夫黃帝九章乃法算之總經也.輝見其機深法簡,嘗爲詳註.有客諭曰:謂無啓蒙日用,爲初學者病之,今首以乘除加減爲法,稱斗尺田爲問,編詩括十三首,立圖草六十六問,用法必載源流,命題須責實有.分上下卷首少補日用之萬一,亦助啓蒙之觀覽云耳.景定壬戌季夏錢塘楊輝謹序.

稱則三百斤稱,謂之十鈞.一百二十斤稱,謂之一石.一百斤稱,謂之市稱.三十斤稱,謂之一鈞.十五斤稱,謂之一稱.一斤稱,謂之分兩稱.一兩等二,一管分釐毫,一管銖,絫,黍.一兩重十錢,一錢管十分,一分管十釐,釐下雖有數,細瑣衡不載.一兩重二十四銖.一錢管二十四絫,一分管二十四黍.

今有物一百一十二斤,足稱,問爲省稱幾何?

答曰:一百四十斤.

解題:此問足斤展省,用加爲法.題不帶零兩,驗其術.

術曰:以斤數爲實.實卽身也.身外加二五,身外卽是身後.從尾上加起,且如足稱一百,展省稱一百二十五斤.故占原數爲身,只身後加上二十五斤之數.草曰:斤數爲實,置足稱一百一十二斤爲本身,斤上只定得斤.身外加二五,得一百四十斤,合問.其一術曰:以斤數爲身,於上定十斤,三度折半,斤數爲身,以斤定十者,是借十爲百.凡三度折半,得十二斤半.草曰:以斤數爲身,置一百一十二斤,於一斤上定十斤,是借爲一千一百二十斤.三度折半,得一百四十斤合問.

今有物三百一十三斤,足稱,問爲省稱幾何?

答曰:三百九十一斤四兩.

解題:此問全斤展出零兩,於前法稍異.術曰:斤數爲實.題數爲身.身外,身尾上起.加二五,是増上二十五斤.如斤外零分,用加六爲兩,錢絹斗器,以十分爲率,今稱以一百六十爲斤,均爲十分.是以十六爲一分,故加六爲兩,今以零分爲兩,及零兩爲分,列成數在後.草

曰:斤數爲實,置足稱三百一十三斤爲身,斤上只定斤,身外加二五,自尾位加起得三百九十一斤,二分半.斤外零分加六爲兩,二分半上加六,得四兩,併上數,合問.

零分求兩定數. 一分足稱二十,省稱一兩六錢.二分足稱四十,省稱三兩二錢.三分足稱六十,省稱四兩八錢.四分足稱八十,省稱六兩四錢.五分足稱一百,省稱八兩.六分足稱一百二十,省稱九兩六錢.七分足稱一百四十,省稱十一兩二錢,八分足稱一百六十,省稱十二兩八錢.九分足稱一百八十,省稱十四兩四錢,十分足稱二百,省稱百六十,皆一斤.兩還分,用四折半.

零兩求分定數. 一兩六釐二毫半.二兩一分二釐半.三兩一分八釐七毫半.四兩二分半.五兩三分一釐二毫半.六兩三分七釐半.七兩四分三釐七毫半.八兩五分.九兩五分六釐二毫半.十兩六分二釐半.十一兩六分八釐七毫半.十二兩七分半.十三兩八分一釐二毫半.十四兩八分七釐半.十五兩九分三釐七毫半.十六兩十分.分還兩,用加二五.

今有物一百二十三斤五兩,足稱,問省稱幾何?

答曰:一百五十四斤二兩二錢半.

解題:此問斤中展出兩,其零腳又有兩,以驗歸併之術.術曰:各置斤兩數,斤兩不同,故用各置.身外加二五,如零斤外零分,用加六求兩,並如前解.草曰:各置斤數兩數,置一百二十三斤在上五兩在下.身外加二五,一百二十三斤加爲一百五十三斤七分半,其五兩加爲六兩二錢半.斤外零分加六求兩,七分半加六,爲十二兩,併所得一百五十四斤二兩二錢半,合前問.其一術曰:置斤數以零兩用四度折半,四折半卽是分爲十六處.求分併之,求見分數,可綴斤尾.用本法身外加二兩,斤外零分加六還兩,前術有解.草曰:置斤數一百二十三斤以兩數四折半求分,五兩得三分一釐二毫半,併之,共得一百二十三斤三分一釐二毫半.身外加二五,斤上定斤,身後加二五,得一百五十四斤一分一釐六絲二忽半斤外零分,加六還兩以一分四釐六絲二忽半,分上定兩,加六得二兩二錢半,併一百五十四斤,合問.其一術曰:通斤數爲兩,以零兩併之,用身外加二五.此法只展得省兩.仍以十六兩爲法,求原斤.蓋題中有斤,故求斤還原.草曰:通斤數爲兩,置一百二十三

斤,以每斤十六兩,通爲一千九百六十八兩,以零兩併之,併零五兩,共得一千九百七十三兩身外加二五,得二千四百六十六兩二錢五分,仍以十六兩爲法,還斤.得一百五十四斤二兩二錢半.

今有物一百四十斤,省稱,問爲足稱幾何!

答曰:一百一十二斤

解題:此問驗全斤,省稱歸足.術曰:以斤數爲實,用八因之,十斤上定斤,十斤省稱重一貫六百,其足稱八斤,亦重一貫六百.凡十斤省稱,卽是八斤足稱,故用八因.草曰:以斤數爲實,置一百四十斤,以八因之,得一百一十二斤,合問.

今有物三百九十一斤四兩省稱,問足稱幾何!

答曰:三百一十三斤.

解題:此問驗帶兩省稱歸足.術曰:以斤數爲實,用八因之.十斤上定得一斤.遇零兩欲爲分者折半,一兩省稱是十文,其一斤足稱,是二百.其一分卽是二十,故用折半.零分欲還兩者倍之,一分定二十文,卽是暗藏二兩,故倍之.草曰:以斤數爲實,三百九十一斤.用八因之,十斤上定得一斤,因得三百一十二斤,餘八兩.四兩零兩,欲爲分者,折半.四兩折半爲二

分,共爲三百一十三斤.合問.

今有錢六貫八百文,買物一斤,問一兩直幾何?

答曰:四百二十五文.

解題:以斤求兩價爲問,驗諸術,可以通用.其術有五:一曰:斤價爲實,四度折半,貫上定貫,暗分爲十六.草曰:斤價爲實,置六貫八百文,四度折半,即是四次折半,得四百二十五,合問.

二曰:念法,以數纍成念法.尾位求起,一求隔位六二五,斤價一貫,每兩該六十二文半是隔一位.二求退位一二五,斤價二貫,每兩該一百二十五文,即是退一位.三求一八七五記,斤價三貫,每兩一百八十七文五分.四求改曰二十五,斤值四貫,其一兩得二百五十.五求三一二五是,斤價五貫,共兩價三百十二文半.六求兩價三七五,斤價六貫,其兩價三百七十五文.七求四三七五置,斤價七百,其兩價四十三文七分半.八求轉身變作五,斤價八百,其兩價五十文.兩歸斤者,身外加六,十上定百.草曰:斤價爲實,置六貫八百文.如念法,於尾位求起.百上定十,先命八百爲五十,後命六貫爲三百七十五,共四百二十五.合問.

三曰:斤價爲實折半,取十六兩爲八兩價.八歸是取八兩爲一一兩[illegible]價.草見後圖.

斤價折半,貫上定百。

≣ 四十文

||| 爲三百

求第一位

≡ 加六

‖ 見三

求第二位

|||| 下四

二 起八,見二

|||| 或十

求第三位

||||| 見四作五

二

|||| 共得四百二十五合問

四曰:斤價爲身,身内存十減六. 斤價分爲十六兩,存留十兩價,減去六兩,於價貫上定百爲一兩之價.

草見後圖.

減第一位

𝍧　減去二百四十　𝍣　未減數四十

貫上定百　𝍮　借爲六百八十　存得數四百　𝍫　存得數四百

減第二位

𝍯　此位未減

𝍣　存二十減去十二　𝍡　存四百二十

定百　𝍫　存得四百　𝍫

減第三位

𝍯　存五減三十　𝍬　每兩得四百

𝍡　存四百二十　𝍡　二十五文

定百　𝍫　𝍫

五曰,斤價爲實,以十六兩爲法,除之,是以斤價分爲十六處,求一兩之價.草見後圖.

商第一位

		定百	兩價
商			
實		⊥	𝍧
法		一	⊥

上商四百

商		≣	
實		○	||||
法		一	T

貫四百　除實六

商第二位

次商二

得數	≣	||	
實	○	○	≐
法		|	T

除實三百二十

商第三位

次商五

得數	≣	||	≣
除實適盡	○	○	○
法		一	⊥

除實八十適盡,得四百二十五。

今買物三十七斤九兩,每斤一貫一百二十,問共值錢幾何!

答曰:四十二貫七十文.

解題:上問是以斤展兩,驗其通分,不以兩價爲問,而以斤價爲問.術曰:斤通爲兩,以兩併之,取其一也.以斤價乘之,一斤價不可折兩,或折兩法位頗繁,故以混成斤價爲乘.以兩法十六除之,先以斤價乘兩,故以斤中十六兩爲法,還求斤價.草曰:斤通爲兩,得五百九十二兩,以兩併之,得六百一兩.以斤價乘之,兩上定貫,以全斤之價一貫一百二十,乘得二百七十三貫一百二十.以十六除之,得所答數,合問.

今買物六百一兩,每斤價一貫一百二十,問共錢幾何!

答曰:四十二貫七十文.

解題:此問與前同,但不通分,直云幾兩,用法稍異.術曰:兩數爲實,以斤價求爲兩價乘之,斤價求兩者,免全斤爲乘,亦免乘訖再除之繁.草曰:兩數爲實,置六百一兩,以斤價求兩價一貫一百二十,用本法四折半求得兩價七十文.乘之,得四十二貫七十文,合問.

今出錢四十二貫三百五十,買物三十七斤一十三兩,問一斤價錢幾何?

答曰:一貫一百二十文.

解題:及前題以出錢買物爲問,以驗斤通兩爲法,求一斤之價.術曰:通斤倂兩爲法,取其一也,以法除之.以十六兩乘出錢總數爲實.兩爲法,只除得兩價,故以十六乘都錢,是得斤價也.草曰:通斤倂兩,通三十七斤爲兩,併上十三兩,共得六百五兩.以十六兩乘出錢總數爲實,十六乘四十二貫三百五十,得六百七十七貫六百文.以法除之,以六百五兩爲法,一百貫上定實.除得斤價一貫一百二十.

案以上楊輝日用算法殘本題問見諸家算法中.

菽每石七百八十五文,麥每石一貫一百六十文.用錢二百九十七貫,糴到菽麥共三百石,問本各幾何?

答曰:菽一貫三十六石,麥一百六十四石.

解題:菽麥爲問,分身爲法.分率術曰:共物爲實,以賤率乘之.俱爲賤價.以減總錢,餘爲貴實.貴物所多之數.貴賤二率相減,餘爲法,求見一價所多之差,除之先見貴物.以貴物減總數,餘爲賤也.

菽百三十六石　麥百六十四石

一貫一百六十文麥價

積一百二十八貫七百四十文

積一百六貫七百六十文

七百八十五文菽價

多菽三百七十五積六十一貫五百

菽麥共三百石，共錢二百九十七貫文。

草曰:共物爲實,粄麥共三百石,以賤率乘之,粄賤每石七百八十五文,乘得二百三十五貫五百文.以減總數,二百九十七貫,餘爲貴實,六十一貫五百.貴賤二率相減餘爲法,粄石價七百八十五,麥石價一貫一百六十文,相減餘三百七十五,爲法.除之.以法除六十一貫五百文.先得貴物.麥一百六十四石.以貴物麥也,減總數,粄麥總數,餘爲賤實.粄得一百三十六石.合問.

案此題見永樂大典卷一六三四三第十九及二十頁.

楊輝詳解算法.

香三千二百四十六兩,每三兩價錢四貫一百文,問錢幾何?

答曰:四千四百三十六貫二百文.

解題.先以三兩總價乘後,以三爲除,即是小乘除.草曰:香數爲實三千二百四十六兩,每三兩價錢爲法相乘,三兩價錢四貫一百,乘爲一萬三千三百八貫六百文,是三倍之數,以三除之.是去其二停多數,仍於兩上定百合問.

錢七貫九百八十文,買物每斤價錢二貫三百四

文,問買幾何?

答曰:三斤七兩十銖.

解題:本是商除,祇緣求斤之外,餘不及者,不以斤價求兩,而以兩以銖之數乘餘錢求之,可謂巧矣.草曰:錢數爲實,七貫九百八十,物價爲法,二貫三百四文.以法除實.貫上定斤得三斤,餘一貫六十八文,不滿一斤之數,祇可求之爲兩,若以斤價紐兩價求之,算不勝其繁也.故用斤之一十六兩乘餘錢.仍以斤價除之,又得七兩,尙餘九百六十,又不及兩價,祇當求之爲銖.如前以兩之二十四銖乘餘錢,仍以斤價除之,合問.

案以上楊輝詳解算法二題問見諸家算法中.

錢一十八貫七百文九十八陌,欲展七十七陌官省,問得幾何?

答曰:二十三貫八百文.

解題:卽粟米換易之問,蓋錢陌求錢陌所以不深於法也.草曰:九十八陌乘總錢,此要者乘以九十八陌,乘一十八貫七百,得十八貫三百二十六文足.以官省七十七除之.十上定百得所答數.又草曰:指南用加四減一,以代乘除.一貫一百文,九十八陌,可展七十七陌,錢一貫四百,故用加四減一之法.置

總錢,一十八貫七百文,加四,得二十六貫一百八十文.減一所得合問.

錢二十貫,買四百六十尺,綾每尺四十三,羅每尺四十四,問綾羅價幾何?

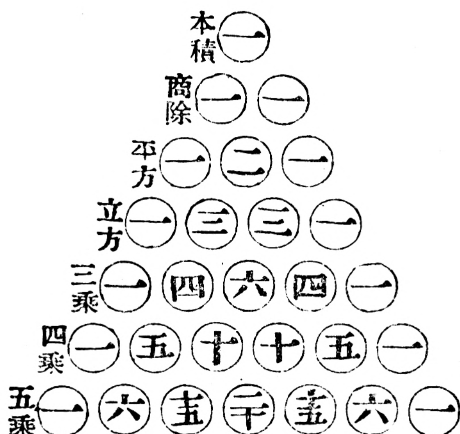
答曰:二百四十尺,尺四十三. 二百二十尺,尺四十四.

解題:反用前問,二價相和,俗曰,粟參分身.草曰:以貴價乘都數,貴價每尺四十四,乘四百六十,得二十貫二百四十,內多二百四十.以原錢減餘爲實.原錢二十貫減之餘二百四十.貴賤二價相減餘爲法.四十三減四十四餘一,以法除實得二百四十,卽賤物數.以減都數,求貴物之數.

開方作法本源.出釋鎖算書,賈憲用此術.

增乘方求廉法草曰:釋鎖求廉本源,列所開方數如前五乘方,列五位,隅算在外.以隅算一,自下增入前位,至首位而止.首位得六,第二位得五,第三位得四,第四位得三,下一位得二.復以隅算如前陞增,遞低一位求之.

右隅 左積



左衺乃積數。
右衺乃隅算。
中藏者皆廉。
以廉乘商方。
命實而除之。

求第二位.

六,舊數,五加十而止,四加六爲十,三加三爲六,二加一爲三.

求第三位.

六,十五,并舊數,十加十而止,六加四爲十,三加一爲四.

求第四位.

六, 十五, 二十,并舊數, 十加五而止,四加一爲五.

求第五位.

六, 十五, 二十, 十五,并舊 五加一爲六,

上廉,二廉, 三廉, 四廉, 下廉.

積一百六十四萬四千八百六十六尺四寸三分七釐五毫,問爲立圓徑幾何?

答曰:一百四十三尺.

解題:立圓其狀如毬,居立方十六分之九.立圓法曰:以方法十六乘積,如圓法九而一爲實.平圓居平方四分之三,更添一乘爲立圓立方,其立圓居立方十六分之九,取以爲法,十六乘.九而一,卽互換之意.開增乘立方除之.前注.草曰:置積題數,以方法十六乘之,以九除之爲實.得二百九十二萬四千二百七尺.開增乘立方除之.立草在九章卷首布置圖內.

積一百三十三萬六千三百三十六尺,問爲三乘方幾何?

答曰:三十四尺.

解題:三度相乘,其狀匾直.遞增三乘開方法草曰:

上商得數下法增爲立方除實,卽原乘意 置積爲實,別置一算名曰下法,於實末常超三位約實.一乘超一位,三乘超三位,萬下定實.上商得數三十乘下法生下廉三十,乘下廉生上廉九百.乘上廉生立方二萬七千.命上商除實,餘五十二萬六千三百三十六.作法商第二位卽數,以上商乘下法入下廉共六十.乘下廉入上廉共二千七百.乘上廉入方共一十萬八千.又乘下法入下廉共九十.乘下廉入上廉共五千四百.又乘下法入下廉共一百二十.方一,上廉二,下廉三,下法四退.方一十萬八千,上廉五千四百,下廉一百二十,下法定一.又於上商之次,續商置得數,第二位四.以乘下法入廉,一百二十四.乘下廉入上廉,共五千八百九十六.乘上廉併爲立方,一十三萬一千五百八十四.命上商除實盡.得三乘方一面之數.如三位立方.依第二位取用.又術曰:兩度開平方.開第一次平方得一千一百五十六,開第二次平方得三十四.

案以上楊輝詳解算法見永樂大典卷一六三四三之一六三四四中.

東方圖書館善本算書解題

民國十九年二月,由靈寶繞道武漢南下,至京滬杭閱書.於二月二十七日起,在上海東方圖書館觀所藏善本算書,先後影攝傳鈔得若干種.二十一年一月二十九之變,東方圖書館全毀,藏書不復留於天壤.幸當時或經影攝鈔藏,或曾題錄記跋,今舉要引述數種如左,爲修治吾國數學史者之參考.

其書籍號數,并依該館原有鈔本目錄所記次序,藉留原來面目,并資紀念.

子一三一號

數學舉要卷五,卷六,卷七,卷十,卷十三,卷十四,清陳世明撰,殘本二册.

數學舉要五册,清揚州陳世明撰,南海馮氏藏鈔本,現藏浙江義烏縣朱一新之長子家.裘沖曼中國算學書目彙編(見清華學報三卷一期,民國十五年六月)曾經著錄,裘君并於民國六年親見此書

東方圖書館所藏係殘本二册,計存卷五,卷六,卷七,卷十三,卷十四,凡六卷.

許宗彥鑑止水齋書目尙藏有數學舉要五册(見圖書館季刊五卷三四期,民國二十年十二月).

子三七三號

幾何用法一卷,明孫元化撰一册.

幾何用法一書,李儼曾箸錄於增修明代算學書志(見圖書館季刊五卷一期,民國二十年三月)今錄如左.

豐順丁氏持靜齋書目有幾何體論一卷,卷後有慶餘心齋諸印,又有幾何用法一卷,卷後題道光己酉春烏程慶餘校讀一過,又有慶餘疇人子弟諸印.

「孫元化嘉定人字初陽,天啓舉人,從徐光啓游,得西洋火器法,崇禎初起兵部員外郎,以孔有德變,棄市.」見中國人名大辭典第七五〇頁.

上海東方圖書館藏鈔本孫元化幾何用法一册,凡四十八葉,前有序,稱:「予先師受幾何於利泰西,自丙午始也.……戊申(1608)纂輯用法,別爲一編,以便類考.……十餘年無有問者,稍示究心,則

借鈔用法止矣.……庚申(1620)武水錢御冰忘年勢而下詢,當暑孜孜,似欲爲此書拂塵蠹者.而余因檢篋中原草,已烏有,聊復追而志之.然載於幾何者固在,若舊纂則多所推廣,究不能盡憶,尙冀異日者,幸遇友人鈔本借以補之.」

按徐光啓句股義稱:「句股自相乘,以至容方,容圓,各和各較相求者,舊九章中亦有之,第能言其法,不能言其義也.所主諸法,蕪陋不堪讀,門人孫初陽氏刪爲正法十五條,稍簡明矣.余因爲論撰其義.」是孫元化曾立正法十五條,而徐光啓爲之論撰成句股義也.

子四一八號

九章算法比類大全十卷明吳敬撰,明刻本,八册.

上海東方圖書館藏有九章算法比類大全十卷明吳敬撰,明刻本,八册,李儼曾影攝一份,共六百五十四頁,前有明景泰元年(1450)七月杭州府仁和縣儒學教諭臨川聶大年序,同年(1450)孟秋錢唐吳敬信民自序,弘治元年(1488)項麒序,吳興張寧及同郡孫暲像贊.吳書自序稱:

…………故算數之家,止稱九章算法爲宗,世傳

其書出於周公,然世罕口口,無習而貫通者.予以草茅末學,留心算數,蓋亦有年,歷訪九章全書,久之未見;一日口獲寫本,其目二百四十有六;內方田,粟米,衰分,不過乘除,互換,人皆易曉.若少廣中口多益少,開平方圓,商功之修築堆積,均輸之遠近勞費,其法頗雜.至於盈朒,方程,勾股,題問深隱,法理難明,古註混淆,布算簡略,初學無所口明,由是通其術者鮮矣.輒不自揆,採輯舊聞,分章詳註,補其遺闕,芟其紕繆,粲然明白,如指諸掌.前增乘除開方起例之法,中添詳註比類,歌詩之術,後續鎖積演段還源之方,增千二百題.通古舊題,總於四百餘問,數十萬言,釐爲十卷,題曰九章算法比類大全.積功十年,纔克脫藁,而年老目昏,乃請口宮雋士何均自磐書錄成帙,自便檢閱.金臺王均士傑見而重之,恐久遂湮沒,爰雲集好雅君子口口口口口口等命工鋟梓,以廣其傳.若夫聖人經天緯地之算,則固非區區之所敢聞也.

時景泰元年(1450)歲在庚午孟秋吉旦

錢唐吳敬信民識

弘治元年(1488)項麒序則稱吳敬杭州府仁和縣人,號主一翁.因善算,一時藩臬重臣,皆禮遇而信託之.初版刻後,板燬於火,十存其六.翁之長嗣怡庵處士命其季子名訥字仲敏而號循善者,重加編校,而印行之云.

是書首目錄起例,題爲九章詳註比類算法大全目錄,及九章詳註比類乘除開方起例.

次方田題爲九章詳註比類方田算法大全卷第一

次粟米題爲九章詳註比類粟米算法大全卷第二

次衰分題爲九章詳註比類衰分算法大全卷第三

次少廣題爲九章詳註比類少廣算法大全卷第四

次商功題爲九章詳註比類商功算法大全卷第五

次均輸題爲九章詳註比類均輸算法大全卷第六

次盈朒題爲九章詳註比類盈不足算法大全卷

第七

次方程題爲九章詳註比類方程算法大全卷第八

次句股題爲九章詳註比類句股算法大全卷第九

次開方題爲九章詳註比類還源開方算法大全卷第十

子四八四號

測圓海鏡十二卷;元李治撰,清孔廣森校,鈔本四冊,一函.

東方圖書館藏測圓海鏡十二卷,元李治撰鈔本四冊一函,中有孔廣森(1752-1786)硃筆批校二十七條,其一條題歲在乙巳(1785)九月初七日森識.廣森次年卽卒去,故批校僅及一,二,三,七,四卷.

孔廣森少曾師事戴震(1724-1777)及官翰林,與窺中祕,得見王(孝通),秦(九韶)李(治)三家之書,其批校測圓海鏡亦多精彩之處.李儼於測圓海鏡研究歷程考(見學藝十一卷二號,民國二十年六月)曾引其疏證諸雜名目一問.幷鈔藏其校語

一册收入李儼所藏中國算學書目續編(見科學十五卷一期民國十九年十一月).

明清算家之割圓術研究

目 次

(一) 弧矢論

1. 明,唐順之,顧應祥,程大位,周述學.
2. 清,梅瑴成,陳世佶.
3. 清,孔廣森,李子金.
4. 李銳,駱騰鳳.
5. 謝家禾,馮桂芬,羅士琳,江衡.

(二) 割圓舊法及周率算法

6. 明代算家所設之圓率值.
7. 明末西洋割圓法之輸入.
8. 清初中算家圓率值之計算.
9. 清初西洋割圓法之輸入.
10. 錢塘,談泰,許桂林,李潢,駱騰鳳.
11. 圓率解析法輸入後之圓率值計算.
12. 清季西算之輸入與圓率值計算.

(三) 圓率解析法

13. 杜德美法之輸入.
14. 明安圖之割圓密率捷法.
15. 孔廣森之少廣正負術.

16. 董祐誠之割圜連比例圖解.

17 項名達之象數一原.

18. 戴煦之求表捷術.

19. 丁取忠,李善蘭,顧觀光.

20. 徐有壬之測圜密率及割圜八線綴術.

21. 夏鸞翔,吳誠,蔣士棟,凌步芳.

(四) 三角函數表計算法

22. 明末三角函數表計算法之輸入.

23. 清初中算家之三角函數表計算法.

24. 清初三角函數表計算法之輸入.

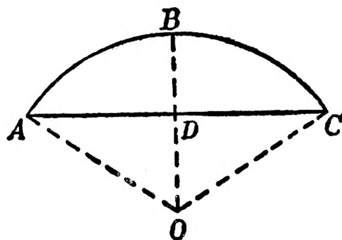
25. 汪萊安清翹之五分取一法.

26. 清季造三角比例表法之輸入.

(一) 弧矢論

1. 明唐順之顧應祥程大位周述學

如圖 ABC 爲弧矢形, $OC=r$ 爲圓半徑, $2OC=d$ 爲圓徑, $AC=c$ 爲弦, $BD=b$ 爲矢, $ABC=a$ 爲弧, A 爲面積. 後此引述弧矢形或弧形率因此記法.



第一圖

明,唐順之(1507–1560)著"數論三篇,"即"句股測望論,""句股容方圓論,""弧矢論"見唐荊川文集卷十二,其"弧矢論"謂:

$$-A^2+Ab^2+db^3-1.25\,b^4=0$$ 蓋簡略朱世傑式

$$-5\,b^4+4\,db^3+4\,Ab^2-(2A)^2=0$$

而得也.其與顧(應祥)箬溪中丞第二書,見荊川集補遺卷三,稱:"僕既作爲弧矢論,以請於明公,而明公亦既演之爲書矣."則弧矢論之作,蓋在顧應祥,弧矢算術(1552)前矣.

顧應祥(1483–1565)著句股算術二卷(1553),測圓海鏡釋術十二卷(1550),弧矢算術(1552),測圓算術四卷(1553)其弧矢算術自序稱:"弧矢一術……錢塘吳信民九章算法止載一條,四元玉鑑所載數條,皆不言其所以然之故,沈存中夢溪筆談有割圓之法,雖自謂造微,然止於徑矢求弦."因幷諸說,得下式:

$$(1)\quad d=b+\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{b}$$

(楊輝)實出於趙君卿"句股方圓圖注."

$$(2)\quad \frac{c}{2}=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-b\right)^2}\qquad (楊輝)$$

(3) $b=\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ (楊輝)

(4) $a=\frac{2b^2}{d}+c$ (沈括)

(5) $c^3-c^2+4bc+4b^2(2b-a)=0$

由(沈括)公式化得

(6) $2b^3-(a-c)b^2-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0$

由(沈括)公式化得

(7) $4b^4+(4d^2-4ad)b^2-4d^3b+a^2d^2=0$

(郭守敬)

(8) $-3\left(\frac{1}{2}c\right)^4+2b\left(\frac{1}{2}c\right)^3+(a'b-6b^2)\left(\frac{1}{2}c\right)^2$

$+2b^3\left(\frac{1}{2}c\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3b^4\}=0,$

而 $a'=\pi d-a.$ (郭守敬)

(9) $b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{1}{2}c\right)^4b^2-(c+a')\left(\frac{1}{2}c\right)^2b$

$+3\left(\frac{1}{2}c\right)^4=0,$ (郭守敬)

(10) $A=\frac{1}{2}(b+c)b,$ (九章)

(11) $c=\frac{2A-b^2}{b}$ (九章)

(12) $b^2+bc-2A=0$ (九章)

(13) $-5b^4+4db^3+4Ab^2-(2A)^2=0$ (朱世傑)

唐顧二氏之說,周述學,程大位幷採之.

周述學神道大編曆宗算會(周文燭嘉靖戊午,1558撰序)卷八,"弧矢經補下"謂:"求矢之法有五;徑弦求矢如(3),徑背求矢,得 $b=\frac{d^2(\frac{1}{2}a)^2}{(d^3-d^2b)+(ad-b^2)b}$,徑積求矢如(13),積弦求矢如(12),殘周及弦求矢如(9).求徑之法有二;積矢求徑,得 $d=\frac{A^2-Ab^2}{b^3}+1.25b$,乃由(3)化得.矢弦求徑如(1).求積之法有一;矢弦求積如(10).求背之法有一;徑矢求背如(4)."元授時曆"弧容直闊,"李善蘭曾爲補草,見算牘初編.而曆宗算會卷七,'弧矢經補上"則周述學已先言之.

程大位算法統宗(1593)卷三,卷六,亦論弧矢術.

2. 清,梅瑴成,陳世信

梅瑴成(1681–1763)赤水遺珍以借根方法解

$$-(2A)^2+4Ab^2+4db^3-5b^4=0$$

畫三乘方 b^4 爲長柱形,惟 b^4 幷非有形可指,瑴成蓋誤解也.

陳世信(字士常,海寧人,1686–1749)著弧矢割圓

一卷,謂求矢有六術,求弧弦有五術,求圜徑有四術,求積有五術,求弧背有七術,視顧應祥,周述學爲加詳.

3. 清,孔廣森,李子金

清初於弧矢術別立新術者,有孔廣森,李子金.

孔廣森(1752–1786)臯軒孔氏所著書少廣正負術外篇上內"割圜弧矢十術,"其弧矢新式有四:

$$(1)\quad b=\sqrt[3]{A^2/1.5\,d},\qquad \text{而}\qquad A>\frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(2)\quad b=\sqrt[3]{(3\,A)^2/27\frac{d}{2}},\quad \text{而}\quad \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(3)\quad b=\sqrt[3]{(5\,A)^2/81\frac{d}{2}},\quad \text{而}\quad \frac{1}{15}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A>\frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

$$(4)\quad b=\sqrt[3]{(7\,A)^2/81\,d},\quad \text{而}\quad \frac{1}{30}\cdot\frac{\pi d^2}{4}>A.$$

廣森自謂:量田演段,期於步分無差而已,故略分四例,視弧之大小,進退消息,以定矢實,視舊法頗加密.又謂

$b^{\frac{1}{2}}=x$

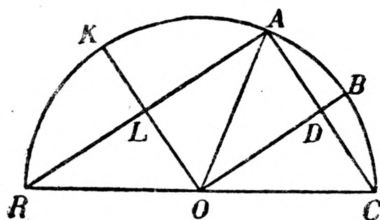
則

$$x^8+2d^{\frac{1}{2}}x^7+dx^6+(4d^2-2ad)\,x^4-2ad^{\frac{3}{2}}x^3-4d^3x^2+a^2d^2=0.$$

李子金著算法通義五卷(1677),其卷一有"弧矢

論,"稱:"欲以矢弦求背,必先以矢弦求積,而求積之法,復自古難之,予沈思數年,於無法中求爲有法,始創立一術,雖不敢謂天然巧合,亦庶乎至密而可用矣."

如圖弧背, $ABC=a$, 圓徑,大弦, $RC=d$, 正弧之弦,大句, $AC=c$, $\frac{c}{2}=$ 小句.餘弧之弦,大股, $AR=c_1$, $\frac{c_1}{2}=$ 小股.正弧之矢, $BD=b$, 正積 $ABC=A$., 餘弧之矢, $KL=b_1$, 餘積 $AKR=A_1$.



第二圖

而 $$c_1=\sqrt{d^2-c^2},\ b=\frac{d}{2}-\frac{c_1}{2},\quad b_1=\frac{d}{2}-\frac{c}{2}.$$

令 $b(3c+b)=\phi$ 爲正率, $b_1(3c_1+b_1)=\phi_1$ 爲餘率,

$$A+A_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2},$$

則 $$A=\frac{\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right\}b(3c+b)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi}{\phi+\phi_1},$$

$$A_1=\frac{\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{cc_1}{2}\right\}b_1(3c_1+b_1)}{b(3c+b)+b_1(3c_1+b_1)}=\frac{(A+A_1)\phi_1}{\phi+\phi_1},$$

4. 李銳,駱騰鳳

李銳 (1768–1817) 弧矢算術細草一卷,以天元一法解析弧矢十三式,(1),(2),(3)式幷出於楊輝;(4),(5),(6)式幷出於沈括;(7),(8)式幷出於郭守敬,由楊輝,沈括二公式消去 c 而得式;(9)由楊輝,沈括二公式消去 d,幷令 $\pi=3$, $a'+a=\pi d=3d$ 而得;(10),(11),(12)式幷出於九章;(13)式則由九章及楊輝二公式消去 c 而得.

駱騰鳳 (1770–1841) 著藝游錄二卷,其卷二末論"弧矢"稱:"(李銳)弦與殘周求矢,徑與截積求矢二率,以下廉爲元數,尙不合率,今爲正之". 李銳原草,本自不舛,駱騰鳳新草如說亦通.

5. 謝家禾,馮桂芬,羅士琳,江衡

謝家禾著謝穀堂算學三種,卒後道光十七年(1837)戴煦爲之校刻.其弧田問率,以徽率 $\pi=3.14$,密率 $\pi=\frac{22}{7}$ 立算,因李銳弧矢算術細草設問立術,先設一圖如下:

第　三　圖

古半周 $EW=3\dfrac{d}{2}$,徽半周 $EY=3.14\dfrac{d}{2}$, $\square EX=3\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$, $\square EZ=3.14\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$ 令半弦 $HS=\dfrac{c_1}{2}$,外半弦 $NS=\dfrac{c}{2}$,半弦差 $ST=\dfrac{c-c_1}{2}$. 弧弦 $AC=c$, 外弦 $AR=c_1$; 弧背 $ABC=a$, 弧矢 $BD=b$, 外矢 $KL=b_1$, 半周差 $WY=(3.14-3)d$, 古徽圓積差 $\square WZ=(3.14-3)\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=\dfrac{7}{50}\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$, 半弦差冪 $\square SV=\left(\dfrac{c-c_1}{2}\right)^2$, 角冪 $\square EA=bb_1$, 隅冪 $\triangle HSN$ $=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{c_1}{2}=\dfrac{1}{8}cc_1$

弧矢十三式中(1),(2),(3)式卽楊輝公式,爲眞值,故與圓率之大小無關. (4)式以下因圓率之大小而變,惟爲

便利起見,先求(10)式之 $A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$ 爲率,逐次求(4)以下各式.

(10)有 c, b 求徽率A.

因 $$\frac{c}{2}-\frac{c_1}{2}=(r-b_1)-(r-b)=b-b_1.$$

如圖 $$\sqsubset EZ-cc_1=\square EZ-8\cdot\frac{1}{8}cc_1=2A+2A_1.$$

則 $$2A+2A_1=bc+b_1c_1+2bb_1+(b-b_1)^2+\frac{7}{50}\left(\frac{d}{2}\right)^2$$
$$=\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$$
$$+\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\}$$

故可假令 $$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\},$$
$$A_1=\frac{1}{2}\left\{b_1c_1+b_1^2+\frac{7}{50}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right\}.$$

如謝氏之說,則 π 無論爲何數,可得(10)之普通公式:

$$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+(\pi-3)\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}\cdots\cdots(10)$$

(4)有 c, b 求徽率 a.

因扇形面積爲 $$\frac{ad}{4}=A+\left(\frac{d}{2}-b\right)\frac{c}{2}.$$

或 $$4A-2bc=d(a-c).$$

從(10)式得 $$\left[\frac{1}{a-c}\right]\left\{\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2b^2\right\}=d$$

從(1)式 $$d=b+\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b}$$

化得 $$a=\frac{b^2(2b+c)+\left(\frac{14}{50}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2}\cdots\cdots(4)$$

(5)有 b,a 求徽率 c.

由(4)式化得 $$c^3-\left(a-\frac{14}{50}b\right)c^2+4b^2c$$

$$+4b^2(2b-a)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(6)有 c,a 求徽率 b.

由(4)式化得 $$2b^3-(a-c)b^2+\frac{7}{100}c^2b$$

$$-(a-c)\left(\frac{1}{2}c\right)^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(7)有 d,a 求徽率 b.

由楊輝公式 $(d-b)b=\left(\frac{1}{2}c\right)^2$, 與(4)式中之 $\frac{14}{50}\left(\frac{1}{2}c\right)^2$

$+2b^2=d(a-c)$消去c得

$$7396b^4+2408db^3+(10196d^2-8600ad)b^2$$

$$-(1400ad^2+10000d^3)b+2500a^2d^2=0\cdots(7)$$

(8)有$b, a'(=\pi d-a)$求徽率c.

由楊輝公式,令$x=c$得

$$314d^2=314\left[\frac{1}{4b}\right]^2(x^4+8b^2x^2+16b^4)\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

又由(10)式得

$$7x^2+200b^2=100d(a-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

由楊輝公式得

$$100d(a'+x)=100d(\pi d-a+x)$$

即 $$100\left[\frac{1}{4b}\right](x^2+4b^2)(a'+x)=100d(\pi d-a+x)\cdots(c)$$

$(b)+(c)$得

$$(7x^2+200b^2)+100\left[\frac{1}{4b}\right](x^2+4b^2)(a'+x)$$

$$=314d^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$$

由(a)及(d)消去$314d^2$得

$$-314x^4+400bx^3+(400a'b-2400b^2)x^2$$

$$+1600b^3x+\{b(3200b^3+1600a'b^2)-5024b^4\}=0$$

$$\pi \text{ 或 } -3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4+2b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'\,b-6\,b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$+2\,b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\{b(2b^3+a'b^2)-3.14\,b^4\}=0\cdots\cdots(8)$$

(9)有 c, a' 求徽率 b.

從(8)得

$$1.14\,b^4-(c+a')b^3+6\left(\frac{c}{2}\right)^2b^2-(c+a')\left(\frac{c}{2}\right)^2b$$

$$+3.14\left(\frac{c}{2}\right)^4=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(11)有 b, A 求徽率 c.

由(10)式得

$$1.75\,c^2+50\,bc-(100\,A-50\,b^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(12)有 c, A 求徽率 b.

由(10)式得

$$b^2+cb-\left\{2\,A-\frac{7}{50}\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(13)有 d, A 求徽率 b.

由楊輝公式及(10)式得

$$-4.7396\,b^4+3.7592\,db^3+\left(\frac{172\,A}{50}-\frac{49\,d^2}{2500}\right)b^2$$

$$+\frac{28\,Ad}{50}b-(2\,A)^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

如 $\pi=\frac{22}{7}$，則得；

(10) $$A=\frac{1}{2}\left\{bc+b^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\right\}$$

(4) $$a=\frac{b^2(2\,b+c)+\left(\frac{2}{7}b+c\right)\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{b^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2}$$

(7) $$144\,b^4+48\,db^3+(200\,d^2-168\,ad)b^2-(28\,ad^2+196d^3)b$$
$$+49\,a^2d^2=0.$$

(8) $$-\frac{22}{7}\left(\frac{c}{2}\right)^4+2\,b\left(\frac{c}{2}\right)^3+(a'\,d-6\,b^2)\left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$+2\,b^3\left(\frac{c}{2}\right)+\left\{b\,(2b^3+a'\,b^2)-\frac{22}{7}\,b^4\right\}=0.$$

(13) $$-232b^4+184db^3+(168\,A-d^2)b^2$$
$$+28\,Adb-(14\,A)^2=0.$$

馮桂芬(字林一,吳縣人)因李銳弧矢算術細草,而作弧矢算術細草圖解,前有道光十九年(1839)自序,其圖多勉強湊合,於義無當.

羅士琳(字次繆,號茗香,甘泉人,?－1853)著弧

矢算術補,時在道光癸卯(1843),因弦,矢,圓徑,弧背,殘周,截積六事,交互錯綜,舉二事爲題,而求其餘,每題應得四術,共當得四十四術.顧應祥已得十三術,乃爲補二十七術,此外"有圓徑有弧背求殘周"一題,可無庸求,又"有圓徑有弧背求截積,""有圓徑有截積求弧背,""有圓徑有截積求殘周,"非立地元不可,姑闕之,適合四十四術之數.全書以天元一立術,無圖解.

光緒間元和江衡與英,傅蘭雅共譯英,哈司韋算式集要其卷一有下求弧之三略近公式:

$$a=\frac{1}{3}(8\,c_{\frac{1}{2}}-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而c爲通弦,$c_{\frac{1}{2}}$爲半弧通弦.

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times 10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{15\,c^2+33\left(\frac{b}{2}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而c爲通弦,b爲倍矢.

$$a=\frac{\sqrt{c^2+b^2}\times 10\left(\frac{b}{2}\right)^2}{60\,D-27\left(\frac{b}{2}\right)}+\sqrt{c^2+b^2}\cdots(3)$$

而c爲通弦,b爲倍矢,D爲全徑.

(二) 割圓舊法及周率算法

6. 明代算家所設之圓率值

明代算家之言圓率者,朱載堉謂: $\pi=\frac{\sqrt{2}}{0.45}$, $\pi=3.1426968$; 邢雲路謂: $\pi=3.126$, 又 $\pi=3.12132034$; 陳藎謨謂: $\pi=3.1525$; 方以智謂: $\pi=\frac{52}{17}$; 此外又有桐陵法 $\pi=\frac{63}{20}$, 及智術 $\pi=\frac{25}{8}$.

日本關孝和(?-1708)遺著括要算法(1709年刻)卷貞,求周徑率,謂:桐陵法,周率六十三,徑率二十,周數三一五整.

又日本村瀨義益算法勿憚改 (1673) 一書,亦曾引及桐陵算法.

按梅文鼎筆算卷五,附方田通法中,載有量田原法歌訣,謂出桐陵,惜亦不傳姓氏,疑與關氏所引,同屬一人,而爲明季隱者也.

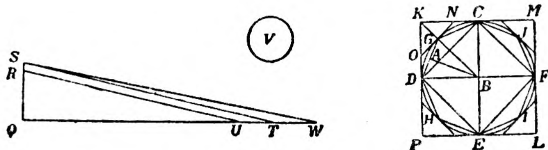
智術見於程大位算法統宗 (1593) 關孝和括要算法 (1709),不著撰人姓氏.入清則程祿,袁士龍,顧長發,莊亨陽幷從智術,其在西洋則公元前已有人道及

此術.[1]

7. 明末西洋割圓法之輸入

崇禎辛未(1631)徐光啓與耶穌會士所修測量全義,其卷五"圓面求積"稱:"凡圓面積與其半徑線,偕半周線作矩內直角形積等.依此法則量圓形者,以半徑乘半周而已,古高士亞奇默德(Archimedes, 287?–212 B. C.)作圜書(Measurement of the Circle),內三題,洞燭圓形之理,今表而出之,爲原本焉."

第一題 "圓形之半徑,偕其周作句股形,其容與



第四圖

(1) 叔伯特(Schubert)謂:羅馬奥古士都時代,有維都維(Vitruvius)者,以周率爲十二尺半,徑率四尺,蓋亦主張 $\pi=\frac{25}{8}$ 也,見 Schubert, H., Mathematical Essay and Recreations, Tr. by McCormack, T. J., Chicago, 1903, p. 128. 馬利(Marie)謂:維都維以漢,始元丙辰(85 B. C.)生建始乙未(26 B. C.)歿.嘗著建築學理論六卷,見 Marie, M., Histoire des Sciences Mathematiques et Physiques, Paris, 1883, Tome I, p. 219.

圓形之積等."

解曰,*CDEF* 圓形,其心 *B*, 其半徑 *BC*, 即以為股,(圓)形之周為句,成 *QST* 句股形,題言兩形之容等.

論曰:設有言不等,必云大或小.云圓形為大,句股形小者,其較為∨形.即於圓內作 *CDEF* 正方形,又作 *CGDHEIFJ* 八角直線形.從心至八角形之各邊作 *AB* 等中垂線.試於圓形內,減其大半;所餘,又減其大半;末所餘,以比較形∨,必能為小矣.[幾何 *X*, 1.],如先減 *CDEF* 方形,次減 *CJF* 等三角形四,末餘 *CG*……,*CJ*,……等三角雜形八,必小於∨形也.次作 *QRU* 三邊形,與 *CGD*……八角形等,必小於 *QST* 三邊形,何者?$QR=AB<BG\ (=r)$. 先設 *QRU* 三邊形,及∨較形,始與圓等.今 *QRU* 三邊形,及八三角雜形適與圓等.夫△*QST* 大於△*QRU*,∨形大於八三角雜形,是合兩大形[*QST* 及∨]始與圈等,復謂合兩小形.[即 *QRU* 及八三角雜形]與圈等,必無是理也.

次論曰:若言圓形為小,句股形大者,其較為∨形,即於圓外作 *KMLP* 正方形,又作 *NO*…… 八角形.夫 *MP* 方形大於 *QST* 三角形者,方形之周線,大於圓形之周線也.內減其大半[即元圜],又減其大半,[即 *NOK* 等

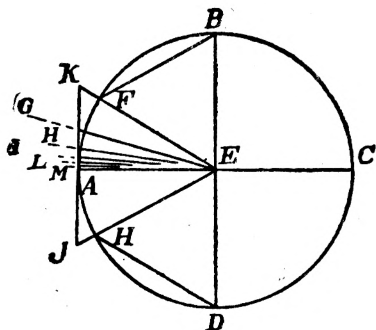
三角形也],末餘 CNG, GOD 等三角雜形八,必小於較形V;又作 QSW 三角形與 CNO……八角形等.玆形爲圜之外切,必大於元圜,而 QW 爲外形之周,必大於 QT 內圜之周.先設圜及V形與 QST 三角形等,今幷圜及三角雜形八[卽 CNG 等八雜形也],反大於 QST 三角形,是圜借八雜小形而爲大者,又借V大形而爲小可乎!

第二題 "凡圜周三倍圜徑有奇"二支

此有二法: 其一, $3\frac{10}{70}>\pi$;

其二, $\pi>3\frac{10}{71}$;

卽 $$3\frac{10}{70}>\pi>3\frac{10}{71}.$$



第五圖

先解其一曰: $ABCD$ 圜, E 爲心; AC, BD 爲兩徑, 輳心作直角. 從 A 作 KJ 切線, 從 B 從 D 作 BF, DH 線與 BE 等. BEF 角六十度, FEA 角必三十度, 爲六邊形之半角也. 末從心過 F, 過 H 作 EK, EJ 線成 EKJ 等角形. FEH 既六十度, 則 KJ 爲等形之邊.

任設 $AK=153$, $KJ=EK=306$, $AE=\sqrt{\overline{306}^2-\overline{153}^2}=265^+$

則 $$\frac{AE}{AK}=\frac{265^+}{153},\ \left(或\sqrt{3}>\frac{265}{153}\right).$$

次平分 $\angle KEA$ 於 G,

則 $$\frac{KE}{AE}=\frac{KG}{AG},$$ [幾何 VI, 3]。

合之 $$\frac{KE+AE}{AE}=\frac{KG+AG}{AG},$$

更之, $$\frac{KE+AE}{AK}=\frac{AE}{AG},\ \frac{AE}{AG}=\frac{306+265^+}{153}=\frac{571^+}{153}.$$

令 $$\sqrt{\overline{571^+}^2+\overline{153}^2}=591\frac{1^+}{8}=EG,$$

則 $$\frac{EG}{AG}=\frac{591\frac{1}{8}^+}{153}.$$

次平分 $\angle GEA$ 於 H, 作 EH 線,

則 $$\frac{GE+AE}{AG}=\frac{AE}{AH};\ \frac{AE}{AH}=\frac{1162\frac{1}{8}^+}{153},$$

令 $$\sqrt{\overline{1162\tfrac{1}{8}}^2+\overline{153}^2}=1172\frac{1^+}{8}=EH,$$

則 $$\frac{EH}{AH}=\frac{1172\frac{1}{8}}{153},$$

次平分$\angle HEA$於I,作EI線,

則 $$\frac{HE+AE}{AH}=\frac{AE}{AI},\quad \frac{AE}{AI}=\frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

令 $$\sqrt{\overline{2334\tfrac{1}{4}}^2+\overline{153}^2}=2339\frac{1^+}{4}=EI,$$

則 $$\frac{EI}{AI}=\frac{2339\frac{1}{4}^+}{153}.$$

次平分$\angle IEA$於L,作EL線,

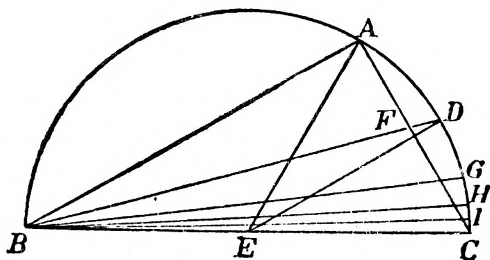
則 $$\frac{IE+AE}{AI}=\frac{AE}{AL},\quad \frac{AE}{AL}=\frac{4673\frac{1}{2}^+}{153}$$

卽 $$\frac{AE}{AL}>\frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

論曰:JEK元角,爲三等角形之一,卽一直角形$\frac{2}{3}$,KEA其半,卽$\frac{1}{3}$;GEA其半,卽$\frac{1}{6}$;HEA其半,卽$\frac{1}{12}$;IEA其半,卽$\frac{1}{24}$;LEA其半,卽$\frac{1}{48}$.復作AEM角與IEA角等,成LEM角形.其E角爲直角之$\frac{1}{24}$,而LM弧爲

象限弧之$\frac{1}{24}$,於全周爲$\frac{1}{96}$, LAM 其切線,爲96邊形之一邊.此邊與圜全徑之比例,若 AE, 4673$\frac{1}{2}$與 AL, 153, 末置 96 邊形之一邊,爲 153. 因周爲 14688,徑爲 4673$\frac{1^{+}}{2}$,則 96 邊圜外形之周,與圜徑之比例爲 14688:4673$\frac{1}{2}$約之爲$3\frac{1}{7}$不足,則徑爲 1,96 邊圜外周爲$3\frac{1}{7}$不足.夫形在周之外,尙不及$3\frac{1}{7}$, 況圜周乎! 故 $3\frac{10}{70}>\pi$.

次解其二, $3\frac{10}{71}$而盈者曰:圜內作 BC 徑,從 C 作六邊形之一邊 CA 與半徑 EC 等. [幾何 IV. 15],從 B 作 BA 成 BAC 形,在半圜之內,則 A 爲直角.[幾何 III. 31].



第六圖

設 CA, 句 $=780$; BC, 弦 $=1560$;

則 BA, 股 $=\sqrt{\overline{1560}^2-\overline{780}^2}=1351^-$

則 $$\frac{BA}{CA}=\frac{1351^-}{780},\ \left[\text{或}\sqrt{3}<\frac{1351}{780}\right].$$

次平分 $\angle ABC$ 作 BD 線, 又作 CD 線, 則 $\triangle_s BDC, CDF$ 爲相似.蓋同用 D 直角,在半圓內, AD, DC 兩相乘之弧等,則 DCF, DBC 兩弧之角必等.[幾何 III, 21.]

故 $$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF},$$

又 $$\frac{BC}{DC}=\frac{FC}{DF},$$

更之,是 $$\frac{BD}{DC}=\frac{DC}{DF}=\frac{BC}{FC}.$$

又因 $$\frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA},\ [\text{幾何 VI. 3}],$$

則 $$\frac{BC+BA}{BA}=\frac{FC+FA}{FA},\ \frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BA}{FA},$$

又 $$\frac{BA}{FA}=\frac{BC}{FC},$$

$$\therefore\ \frac{BC+BA}{FC+FA}=\frac{BC}{FC},\ \text{或}\ \frac{BC+BA}{CA}=\frac{BC}{FC}.$$

又從 $$\frac{BD}{DC}=\frac{BC}{FC}\text{ 及 }\frac{BC}{BA}=\frac{FC}{FA},$$

得 $$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{FA},$$

則 $$\frac{BD}{DC}=\frac{BC+BA}{CA}\text{，或 }\frac{BD}{DC}=\frac{1560+1351^{-}}{780}=\frac{2911^{-}}{780},$$

如令 $BD=2911$, $DC=780$,

則 $$BC=\sqrt{\overline{2911}^2+\overline{780}^2}=3013\frac{1^{-}}{4},$$

則 $$\frac{BC}{DC}=\frac{3013\frac{1}{4}^{-}}{780}.$$

次平分 $\angle DBC$ 作 BG 線,如前比例,論得 $\frac{BG}{GC}$ 之數,

$$\frac{BG}{GC}=\frac{BD+BC}{DC}=\frac{2911+3013\frac{1}{4}^{-}}{780}$$

$$=\frac{5924\frac{1}{4}^{-}}{780},$$

因分母數煩,今改 780 爲 240,

則 $$\frac{BG}{GC}=\frac{1823^{-}}{240},$$

如令 $BD=1823$, $GC=240$,

則 $$BC=\sqrt{\overline{1823}^2+\overline{240}^2}=1838\frac{9^{-}}{11},$$

則 $$\frac{BC}{GC}=\frac{1838\frac{9^-}{11}}{240}.$$

次平分$\angle GBC$作BH及HC線,

則 $$\frac{BH}{HC}=\frac{BG+BC}{GC}=\frac{3661\frac{9^-}{11}}{240},$$

因分母數煩,又改240為66,

則 $$\frac{BH}{HC}=\frac{1007^-}{66},$$

令 $$BH=1007,\ HC=66.$$

則 $$BC=\sqrt{\overline{1007}^2+\overline{66}^2}=1009^-,$$

則 $$\frac{BC}{HC}=\frac{1009}{66}.$$

次平分$\angle HBC$作BI, IC線,

則 $$\frac{BI}{IC}=\frac{BH+BC}{HC}=\frac{2016^-}{66},$$

而 $$\frac{BC}{HC}=\frac{2017\frac{1}{4}^-}{66}\quad 即\quad \frac{BC}{HC}<\frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

論曰:CA弧為全圓$\frac{1}{6}$,DC為$\frac{1}{12}$,GC為$\frac{1}{24}$,HC為$\frac{1}{48}$,IC為$\frac{1}{96}$,是IC為96邊內切圓形之一邊也.以96乘

66,得6336爲96邊內切形之周;BC爲$2017\frac{1}{4}$,兩數約之,一得$3\frac{10}{71}$強,形之周也;一得1,圓之徑也.夫圓周在多邊形之外即大,則謂$3\frac{10}{71}$,不又盈乎!故

$$\pi>3\frac{10}{71}.$$

第三題　圓容積與徑上方形之比例.

解曰:—爲11與14而朒,—爲223與284而盈.

先解朒者,BEF圓與ACE方.引長CA邊爲DA,令大於CA爲$3\frac{1}{7}$倍,則與周等爲句.AB邊,圓之半徑也,爲股,成$\triangle ABD$,其積與圓積略等.又$\triangle ABC$直角形,

因 $$\frac{CA}{DA}=\frac{7}{22},$$

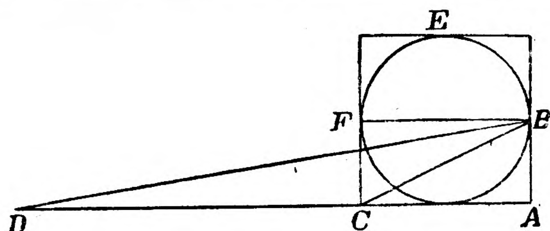
則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{7}{22}.$$ [幾何 VI. 1.]

$$\triangle ABD=\odot BEF,$$

則 $$\frac{\triangle ABC}{\odot BEF}=\frac{7}{22}$$

又 $$\triangle ABC=\frac{1}{4}\square ACE,$$

則 $$\frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{28}{22}=\frac{14}{11}.$$



第七圖

次解盈者,設 $CA=71$, $DA=223$,

則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{71}{223}, \text{即} \frac{\square ACE}{\odot BEF}=\frac{284}{223}.$$

* * *

徑與周之比例,古士之法如此,今士別立一法,其差甚微,然子母之數,積至二十一字,爲萬萬億,雖可施用.即

徑 100,000,000,000,000,000,000

大周 314,159,265,358,979,323,847

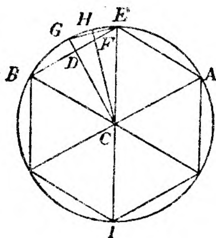
小周 314,159,265,358,979,323,846

約之,首取三字,爲 $\frac{314}{100}$, 則 $3\frac{14}{100}$,再約之,得 $3\frac{1}{7}$,又朒如前.(2)

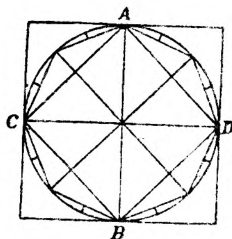
(2) 晚近西人之述亞奇默德圜書者,有; Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschiste der Mathematik, Vol. I. (Third Edition), Leipzig, 1907, pp. 300-303, 316, 319; Gino Loria, Le Scienze Esatte nell' Antica Grecia, in Modena, 1893, Libro II, pp. 126-132; Jame Gow, A Short History of Greek Mathematics, Cambridge, 1884, pp. 233-237; H. Weissen born, Die Berechnung des Kreis-Umfanges bei Archimedes und Leonardo Pisano, Berlin, 1894.

8. 清初中算家圓率值之計算

梅文鼎平三角舉要卷一補遺,"正弦爲八線之主"條,謂:"割圓之法,皆作句股於圜內,"并載二圖,第一圖即九章算經內劉徽割圜術,第二圖即元趙友欽革象新書內乾象周髀法.



(1)



(2)

第八圖

梅文鼎幾何補編卷五,稱:"徑七圍二十二者,乃祖沖之方法,……吾友錫山楊崑山(作枚),柘城,孔林宗(興泰)另有法."楊法立圓徑10000;積5238092564;孔法立圓徑10000,積5234987750;蓋楊作枚以$\pi=3.142855384<\frac{22}{7}$,孔興泰以$\pi=3.14159265$也.前此王錫闡曉庵新法(1651)取 $\pi=3.1416$,梅文鼎方圓冪積(1710)取$\pi=3.14159265$.

李子金(字子金號隱山,柘城人)算法通義(1677)卷五,以圜內容四邊形起,計算各邊形面積,以證西法$\pi=3.1416$之密.

其計算方法,與元趙友欽"乾象周髀法"相類.逐次所得句股及內容各邊形面積如下:

圜內4邊形面積	A_4	$=200.$
8段大句股面積	A_8	$=82.842712$
16段次句股面積	A_{16}	$=23.30389$
32段小句股面積	A_{32}	$=5.99775$
64段細句股面積	A_{64}	$=1.5103$
128段微句股面積	A_{128}	$=0.3784$
256段極微句股面積	A_{256}	$=0.09519$
$\pi r^2(r=10)$		$=314.128742$
故		$\pi=3.14128742.$

而圜內容 4 邊形面積	$=200.$
圜內容 8 邊形面積	$=282.842712,$
圜內容 16 邊形面積	$=306.146602,$
圜內容 32 邊形面積	$=312.144352,$
圜內容 64 邊形面積	$=313.654652,$
圜內容 128 邊形面積	$=314.033552,$

圓內容 256 邊形面積 $=314.128742$.

顧長發(字君源,江蘇人)著圍徑眞旨無卷數,以 $\pi=3.125$ 謂之智術,蓋襲程大位之說,惟以甄鸞,劉徽,祖沖之,邢雲路,湯若望諸人所定周徑,皆未密合,則失之矣.(3)

9. 淸初西洋割圓法之輸入

雍正元年癸卯(1723)刻成數理精蘊,其下編卷十五,"面部五"割圓"屢求句股"謂:"古人用割圓之法,內弦外切屢求句股,爲無數多邊形,以切近圓界,使弧線直線,漸合爲一,而圓周始得.……要之圓內六邊起算者,圓徑折半,卽圓內六邊之一,乃用屢求句股之法,自六邊至十二邊."

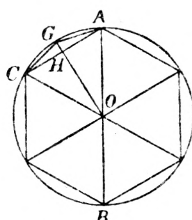
如圖 $OG-\sqrt{\overline{OC}^2-\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=GH$

$\sqrt{\overline{GH}^2+\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=CG$, 爲內容十二邊形之一邊,餘倣此.

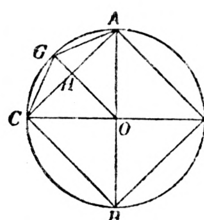
"圓內四邊起算者,則以圓徑爲內容正方之斜弦,自乘折半開方而得四邊之一,亦用屢求句股之法,自

(3) 見四庫全書總目卷一〇七,子部天文算法類存目.

四邊而八邊."如圖



第九圖



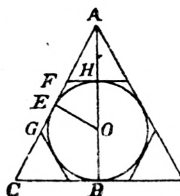
第十圖

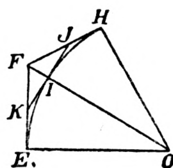
$\sqrt{2}\,AO=AC$ 爲內容四邊形之一邊.

$$OG-\sqrt{\overline{OC}^2-\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=GH$$

$\sqrt{\overline{GH}^2+\left(\frac{CA}{2}\right)^2}=CG$ 爲內容八邊形之一邊.餘做此.

"圜外六邊起算者,圜徑爲弦,半徑爲句,求得股,倍之卽圜外三邊之一,取其 $\frac{1}{3}$,卽圜外六邊之一.以六邊之一,折半之句爲一率,半徑之股爲二率,小同式形之句爲三率,推得四率爲小同式形之股,倍之卽十二邊之一."如圖



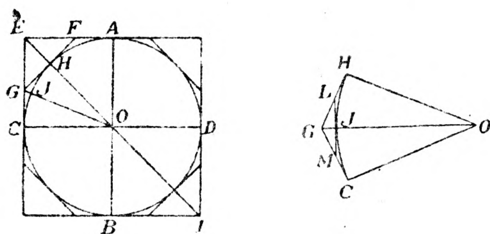


第十一圖

$\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{\overline{HB}^2-\left(\frac{HB}{2}\right)^2}=AE$, $\frac{2}{3}AE=FG$ 爲圜外六邊形之一邊.

$\sqrt{\overline{EG}^2+\overline{OE}^2}-OE=FI$, $\frac{FH}{OH}=\frac{FI}{IJ}$, $2IJ=JK$ 爲圜外十二邊形之一邊,餘倣此.

"圜外四邊起算者,圜徑卽四邊之一,圜徑自乘倍之開方,卽圜外正方之斜弦,減去圜徑,卽圜外兩角之餘,又卽圜外八邊之一.以八邊之一,折半之句爲一率,半徑之股爲二率,小同式形之句爲三率,推得四率,爲小同式形之股,倍之,卽十六邊之一."如圖



第十二圖

$\sqrt{2}AB=EI$, $EI-AB=GF$ 爲圜外八邊形之一邊.

$\sqrt{\overline{CG}^2+\overline{OC}^2}-OH=GJ$, $\frac{GH}{OH}=\frac{GJ}{JL}$, $2JL=ML$ 爲圜外十六邊形之一邊,餘倣此.

如上四法累求至億萬邊,如後四表所得四值,平

均之,可得 $\pi=3.14159265358929323846$ 之值,此測量全義所謂今士之法,其差甚微,子母之數,積至二十一位也.然數理精蘊下編卷二十,祇應用 $\pi=3.14159265$ 入算.

第一表　圓內容六邊起算

邊數	每邊長
6	100,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
12	51,76380,90205.04152,46977,97675,24809,66576,64
24	26,10523,84440.10318,30968,12455,79097,80203,87
48	13,08062,58460.28613,36306,31117,55035,08828,79
96	6,54381,65643.55228,41273,12288,24160,86784,33
192	3,27234,63252.97356,32859,28565,89918,98332,13
384	1,63622,79207.87425,85703,98146,58952,66799,64
768	81812,08052.46957,91892,48219,91003,62523,27
1536	40906,12582.32819,02288,26117,96858,51900,39
3072	20453,07360.67660,90823,85922,29210,20790,29
6144	10226,53814.02739,50220,28598,95885,22439,17
12288	5113,26923.72483,46281,23299,03190,88476,79
24576	2556,63463.95130,94805,23449,01114,10631,76
49152	1278,31732.23676,62618,69476,46404,92099,97
98304	639,15866.15102,20711,60708,07126,38707,53
1,96608	319,57933.07959,09031,09381,54193,06538,00

3,93216	159,78966.54030,55288,69248,77937,23759,67
7,86432	79,89483.27021,64654,28066,68105,61111,48
15,72864	39,94741.63511,74529,25868,07068,11793,39
31,45728	19,97370.81755,90966,64059,25400,28679,64
62,91456	9,98685.40877,96728,39755,75740,61136,14
125,82912	4,99342.70438,98519,83312,36398,29963,55
251,65824	2,49671.35219,49279,37088,61769,88026,56
503,31648	1,24835.67609,74642,11723,32250,47094,18
1006,63296	62417.83804,87321,36259,06320,95878,43
2013,26592	31208.91902,43660,71929,20426,91184,02
4026,53184	15604.45951,21830,36439,49710,73209,51
8053,06368	7802.22975,60915,18279,15048,29151,42
16106,12736	3901.11487,80457,59146,99658,14870,15
32212,25472	1950.55743,90228.79574,52953,44068,74
64424,50944	975.27871,95114,39787,32936,44199,26
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,67749,89099,05
2,57698,03776	243.81967,98778,19946,83874,94549,53
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,41424,79879,09
=	628,31853,07179.58647,65801,34822,03550,10887,68

第二表 圜内容四邊起算

邊數	每邊長
4	141,42135,62373.09504,88016,88724,20969,80785,69
8	76,53668,64730.17954,34569,19968,06076,77335,23

16	39,01806,44032.25653,46965,69736,95404,44818,55
32	19,60342,80659.12120,39883,91127,77728,36917,22
64	9,81353,48654.83602,85099,15073,54192,18045,86
128	4,90824,57045.82457,60634,71621,06208,57541,32
256	2,45430,76571.43985,21588,17805,28322,70716,00
512	1,22717,69298.30895,07192,81109,89753,91502,87
1024	61359,13525.93481,84009,35613,56118,88503,18
2048	30679,60372.56953,12246,07554,48255,35780,54
4096	15339,80637.48540,90538,77216,80698,05365,29
8192	7669,90375.14279,11781,44963,40791,32883,11
16384	3834,95194.62140,66148,79839,14675,43703,33
32768	1917,47598.19195,46917,41044,43334,12743,17
65536	958,73799.20613,37690,98012,98668,34958,07
1,31072	479,36899.61683,64374,58375,65717,71348,27
2,62144	239,68449.81013,94128,43044,37461,75283,30
5,24288	119,84224.90528,48556,85760,04932,95546,88
10,48576	59,92112.45266,93215,00909,93872,60060,65
20,97152	29,96056.22633,80224,57708,71412,02539,66
41,94304	14,98028.11316,94314,42261,07534,74329,33
83,88608	7,49014.05658,47682,47806,37746,51550,77
167,77216	3,74507.02829,23906,89737,66870,66800,32
335,54432	1,81253.51414,61961,65598,14435,01082,24
671,08864	93626.75707,30981,85390,23592,46503,06
1342,17728	46813.37853,65491,05519,01343,10246,82

2684,35456	23406.68926,82745,54362,49364,90997,84
5368,70912	11703.34463,41372,77381,62019,12483,21
10737,41824	5851.67231,70686,38715,85676,64614,64
21474,83648	•2925.83615,85343,19361,05921,70853,94
42949,67296	1462.91807,92671,59680,92096,27745,29
85899,34592	731.45903,96335,79840,50314,01660,27
1,71798,69184	365.72951,98167,89920,25768,49928,86
3,43597,38368	× 182.86475,99083,94960,12960,68607,70
=	628,31853,07179.58647,68630,83106,75500,30233,60

第三表　圜外切六邊起算

邊數	每邊長
6	115,47005,38379.25152,90182,97561,00391,49112,95
12	53,58983,84862.24541,29451,07316,98825,52661,14
24	26,33049,95174.79170,69430,52914,81943,42071,84
48	13,10869,25630.47645,71290,87449,75988,55898,42
96	6,54732,20825.94517,28785,17897,78691,92473,10
192	3,27278,44270.62316,53306,82157,22593,98891,56
384	1,63628,26807.58775,27407,50124,14262,93055,02
768	81812,76501.57471,23405,28654,70206,37842,46
1536	40906,21128.43948,71770,73895,76250,93086,70
3072	20453,08430.18968,23098,79892,04940,73014,38
6144	10226,53947.71650,29406,07923,61708,24007,68
12288	5113,26940.43597,23011,62489,86396,73782,62

24576	2556,63446.04020,16640,52453,71933,91505,82
49152	1278,31732.49787,77840,10560,77401,04623,48
98304	639,15866.18366,10114,03335,64137,76784,84
1,96608	319,57933.08367,07706,38925,14975,02516,94
3,93216	159,78966.54081,54184,37010,37920,29433,22
7,86432	79,89483.27028,02133,58210,87258,60420,30
15,72864	39,94741.63512,41696,96569,02814,87045,58
31,45728	19,97370.81756,00927,25467,47497,76443,54
62,91456	9,98685.40877,97973,47381,60797,42752,98
125,82912	4,99342.70438,98675,46771,78780,94612,14
251,65824	2,49671.35219,49298,82521,01688,28848,62
503,31648	1,24835.67609,74644,54902,39881,37230,82
1006,63296	62417.83804,87321,66656,43570,33969,76
2013,26592	31208.91902,43660,75728,87238,87654,28
4026,53184	15604.45951,21830,36914,51801,15160,80
8053,06368	7802.22975,60915,18238,51923,23997,10
16106,12736	3901.11487,80357,59154,41714,48425,62
32212,25472	1950,55743,90228,79575,35326,34703,68
64424,50944	975.27871,95114,39787,44471,81163,20
1,28849,01888	487.63935,97557,19893,69336,98558,02
2,57698,03776	243.81967,98778,59946,84306,12776,06
5,15396,07552	× 121.90983,99389,29973,42107,76825,16
=	628,31853,07179.58647,69321,54601,77828,39608,32

第四表　圜外切四邊起算

邊數	每邊長
4	200,00000,00000.00000,00000,00000,00000,00000,00
8	82,84271,24746.19009,76033,77448,41939,61571,38
16	39,78247,34759.31601,38231,95245,28935,24571,94
32	19,69828,06714.32850,61543,95042,58265,48645,84
64	9,82536,99538.93450,82106,86642,54262,72341,58
128	4,90972,44217.85088,82091,59507,92181,74423,84
256	2,45449,24759.13255,04617,75106,46854,15928,90
512	1,22720,00315.24680,39285,88731,20262,16705,82
1024	61359,42402.84532,99741,47831,36424,34765,84
2048	30679,63982.17733,30569,85441,63670,08749,44
4096	15339,81088.68618,52103,46415,42325,58475,38
8192	7669,90431.54288,19766,91468,36815,44393,20
16384	3834,95201.67141,77702,91555,12172,61821,10
32768	1917,47599.07320,60800,92296,09314,51461,06
65536	958,73799.31629,01924,52065,52620,76198,58
1,31072	479,36899.63060,59903,71697,52988,94629,44
2,62144	239,68449.81186,06069,57023,26958,93013,20
5,24288	119,84224.90550,00049,50001,14815,00233,66
10,48576	59,92112.45269,62151,58939,66012,80201,54
20,97152	29,96056.22634,13841,64962,30634,82482,20
41,94304	14,98028.11316,98516,55667,71553,86417,54

83,88608	7,49014.05658,48207,74482,17815,32914,52
167,77216	3,74507.02829,23972,55572,12912,74047,30
335,54432	1,87253.51414,61969,86327,44457,01335,74
671,08864	93626.75707,30982,87981,39478,58733,86
1342,17728	46813.37853,65491,18352,90645,55376,02
2684,35456	23406.68926,82745,55965,47936,05939,16
5368,70912	11703.34463,41372,77581,99294,69000,96
10737,41824	5851.67231,70686,38740,90313,17704,40
21474,83648	2925.83615,85343,19364,18989,81783,94
42949,67296	1462.91807,92671,59681,39836,98502,52
85899,34592	731.45903,96339,79840,60134,63671,66
1,71798,69184	365.72951,98167,89920,28844,33638,38
3,43597,38368	× 182.86475,99083,94960,14269,29544,50
=	628,31853 07179.58647,73127,17861,85894,13376,00

10. 錢塘,談泰,許桂林,李潢,駱騰鳳

錢塘(字岳原,號漑亭,嘉定人 1735–1790)著漑亭述古錄二卷,其卷二引 $\pi=3.14$, $\pi=\frac{355}{113}$,又稱:"予嘗測圓器,圍八百十分,徑二百五十八分."卽 $\pi=\frac{810}{258}$.阮元疇人傳(1799)於錢塘傳後論云:"秦九韶以 $\sqrt{10}$ 爲周率,與塘所創率正同,江寧談泰嘗作一丈徑木板,以篾尺量其周,正得三丈一尺六寸奇,以爲錢塘周率爲至當不可易."許桂林(字同叔,號月南,海州人,1778–1821)

著宣西通,令$\pi=3.151807$.[4] 錢塘,談泰,許桂林所述,并無當於義.

李潢(字雲門,鍾祥人,? -1811)著九章算術細草圖說九卷.(1820刻) 其註釋九章割圓恰到好處.蓋劉徽注九章割圓,以內容六等邊形起算.其法第一步以半徑爲弦,半六等邊爲句,求得股;以股減半徑爲小句,半六等邊爲小股,得小弦冪,開得小弦 0.517638 即爲內容十二等邊形之一邊.第二步以半徑爲弦,半十二等邊爲句,求得股;惟爲簡便精密起見,不復以前得小弦自乘爲句冪,而以前得小弦冪之四分一爲句冪,開得股 0.965925$\frac{4}{5}$;又以股減半徑爲小句,半十二等邊爲小股,得小弦冪.同理以前得小弦冪之四分一爲小股冪,得新小弦冪,開得新小弦 0.261052 即爲內容二十四等邊之一邊,餘倣此.此種解法,可不問每次"句.""小股"之值,僅認前次所得"小弦冪,"以爲第二次之"句冪,""小股冪,"事較切當.李潢即本此義爲之圖解.

李潢又以爲1536弧之一面爲0.004090612582

則 $\pi=3.1415904629$,蓋據數理精蘊之說.

駱騰鳳(1770-1841)著藝游錄二卷,其卷二"割圓

(4) 張文虎:舒藝室雜著甲編,卷上,第二四引.

密率圖解”即本諸李潢,惟不明上述“不復以前得小弦自乘爲句冪,而以前得小弦冪之四分一爲句冪”之義,宜其所得有差,其過蓋不在李,而在駱矣.

11. 圜率解析法輸入後之圜率值計算

梅瑴成 (1681-1763) 於梅氏叢書輯要卷六十一,附錄一,赤水遺珍內載“求周徑密率捷法,[譯西士杜德美(Pierre Jartoux, 1670-1720. 11.30 1700 年來華)法].”即下之三術:

$$\pi d = d\left\{3 + \frac{3\cdot 1^2}{4\cdot \lfloor 3} + \frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot \lfloor 5} + \frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot \lfloor 7} + \cdots\cdots\right\}$$

或

$$\pi = 3\left\{1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{\lfloor 3} + \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2.3^2}{\lfloor 5} + \frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{\lfloor 7} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= 3.1415926495 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$\sin a = a - \frac{a^3}{\lfloor 3\cdot r^2} + \frac{a^5}{\lfloor 5\cdot r^4} - \frac{a^7}{\lfloor 7\cdot r^6} + \frac{a^9}{\lfloor 9\cdot r^8} - \cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots (\mathrm{II})$$

$$\operatorname{vers} a = \frac{a^2}{\lfloor 2\, r} - \frac{a^4}{\lfloor 4\cdot r^3} + \frac{a^6}{\lfloor 6\cdot r^5} - \frac{a^8}{\lfloor 8\cdot r^7} + \frac{a^{10}}{\lfloor 10\cdot r^9} - \cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots (\mathrm{III})$$

孔廣森(1752–1786)顨軒孔氏所著書五十五,少廣正負術外篇上,稱:"密弧求法,……宣城御史大夫梅(瑴成)公書中嘗載焉.至其弧背與弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於靈臺郎陳君際新."蓋於(II)(III)式外復錄次之二術:

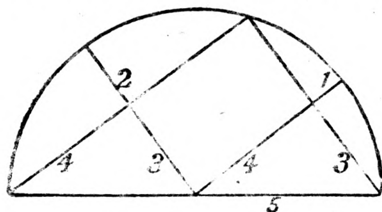
$$a=\sin a+\frac{1^2\cdot\sin^3 a}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5 a}{\lfloor 5\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7 a}{\lfloor 7\cdot r^6}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9 a}{\lfloor 9\cdot r^8}+\cdots\cdots\cdots\cdots,\cdots\text{(VII)}$$

$$a^2=r\Big\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2\cdot(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots,\cdots\text{(VIII)}$$

如圖用徑一萬($D=2r=10000$)設算,試立直角於半圓之上,分成句六,股八,正句股形.以句爲通弦者,其矢必有一,依(VII)式,求得弧 $a_1=6435.008$,以股爲通弦者,其



第十三圖

矢必有二,按 (VIII) 式求得弧冪 $a_2{}^2=85987642.08515$, 開方得弧 $a_2=9272.952$, 併此兩弧而倍之,即

$$\pi=2(6435.008+9272.952)\div 10000=3.141592$$

朱鴻(字雲路,號筠麓,或小梁,秀水人)先得張豸冠杜氏九術寫本,於嘉慶戊辰 (1808) 以示汪萊,又於己卯 (1819) 以示董祐誠.朱又以杜氏法推得四十位,徐有壬 (1800–1860) 採入務民義齋算學中,而二十五位以後,與眞數不合,即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 2643,\ 86367\ 47227\ 9514.$$

項名達(號梅侶,仁和人,1789–1850)遺著象數一原七卷,其卷六因橢圓求周術變通而新定得"圜周求徑"術,如:

$$\frac{2}{\pi}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\cdots$$

或 $$d=\frac{\pi d}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}-\frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2}-\frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

項氏自謂此級數,斂級頗難,不足爲術也.

徐有壬(字君卿,烏程人)測圜密率卷一,第六術,謂

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots$$

蓋以$a=\frac{\pi r}{3}$, 2 vers $a=r$,代入(VIII)式得來.

顧觀光(號尚之,金山人,1799-1862)算賸初編,"用理分中末線求圓周法"(1853)算得$\pi=3.14159\ 26535\ 3979_{25}$.

12. 清季西算之輸入與圜率值計算

李善蘭(字壬叔,號秋紉,海寧人,1809-1882)以咸豐壬子(1852)五月至滬,與西士偉烈亞力(Alexander Wylie)共譯幾何原本後九卷(1852-1856),棣麼甘(Augustus De Morgan, 1806-71)代數學十三卷(1859),羅密士(Elias Loomis, 1811-99)代微積拾級十八卷(1859),胡威立(Whewell)曲線說一卷(1866).其自著方圓闡幽,弧矢啓祕即以尖錐求積術代積分術以求圓積.方圓闡幽所載求象限面積術,與代微積拾級卷十八,積分術相似,以今積分式表之如下:

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^6-\cdots\cdots\right)dx.$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}-\cdots\cdots\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1^2}{\underline{|3}}-\frac{1^2\cdot3}{\underline{|5}}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{\underline{|7}}-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{\underline{|9}}-\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{\underline{|3}}-\frac{(2^2-1)}{\underline{|5}}-\frac{(2^2-1)\ (4^2-1)}{\underline{|7}}$$

$$-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{\underline{|9}}-\cdots\cdots\cdots(1)$$

夏鸞翔(字紫笙,錢塘人, 1823-1864) 著象數一原九卷(1862)亦用積分術得:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1^2}{5\underline{|2}}+\frac{1^2\cdot3^2}{7\underline{|4}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{9\underline{|6}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{(2^2-1)}{(2)(5)}+\frac{(2^2-1)\ (4^2-1)}{(2\cdot4)(5\cdot7)}\right.$$

$$\left.+\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{(2\cdot4\cdot6\cdot)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(2)$$

又以 $a=\frac{\pi r}{2}$, $\sin a=r$, 代入杜氏(VII)式得

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1^2}{\underline{|3}}+\frac{1^2\cdot3^2}{\underline{|5}}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\underline{|7}}+\cdots\cdots, \qquad (3)$$

夏鸞翔於致曲術以微積分術推得正矢求弧背術,即:

$$a=r\left\{\frac{2\ \mathrm{vers}\ a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mathrm{vers}\ a}{2|\underline{3}\cdot r}+\frac{3^2\cdot\ \mathrm{vers}^3\ a}{2^2\ |\underline{5}\cdot r^2}+\frac{3^2\cdot 5^2\ \mathrm{vers}^3\ a}{2^3\ |\underline{7}\cdot r^3}+\cdots\cdots\right),$$

以 $a=\frac{\pi}{2}$, vers $a=1$, 代入得

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1^2}{2|\underline{3}}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot|\underline{5}}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^3\cdot|\underline{7}}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^4\cdot|\underline{9}}+\cdots\cdots,\quad (4)$$

若以 $a=\frac{\pi r}{4}$, $\sin a=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 代入杜氏(VII)式，亦可得上式.

又以 $a=\frac{\pi}{4}$, $\tan a=1$ 代入戴煦外切密率卷三之"切線求本弧"術, $\pi a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots$,

得
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots,\quad (5)$$

以 $a=\frac{\pi}{6}$, $\tan a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入,得:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\frac{1}{9\cdot 3^4}-\cdots\cdots,\quad (6)$$

劉彝程著割圜密率一卷 (1869), 丁取忠欲刋入白芙堂叢書,以資罄未果,迨光緒戊戌 (1898) 善化劉鐸爲列入古今算學叢書中.其求平圜周有三術,以下二術,爲較簡易,蓋亦得力於微積分也.

$$\pi=3\left\{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4\cdot3}-\frac{1\cdot3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)\right\} \tag{7}$$

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1\cdot3}{4(2)(5)}+\frac{1\cdot3^2\cdot5}{4^2(2\cdot4)(5\cdot7)}\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{4^3(2\cdot4\cdot6)(5\cdot7\cdot9)}+\cdots\cdots\right\} \tag{8}$$

左潛(字壬叟,湘陰人,? –1874) 於割圜八線綴術補算,及綴術釋戴,綴術釋明外,又與曾紀鴻(1848–1877),黃宗憲共著圜率考眞圖解一卷(是書前後有同治十三年(1874),丁取忠,曾紀鴻序跋)以幾何法證得:

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$$

及 $$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{12}+\tan^{-1}\frac{5}{27}$$

$$+\tan^{-1}\frac{1}{5}$$

由第一式求π, $\frac{1}{\pi}$各至百位,即

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510\ 58209\ 74944\ 59230\ 78164\ 06286\ 20899\ 86280\ 34825\ 34211\ 7067_{97},$$

$$\frac{1}{\pi}=0.31830\ 98861\ 83970\ 67153\ 77675\ 26745\ 02872\ 40689\ 19291\ 48091\ 28974\ 95334\ 68811\ 77935\ 95268\ 45307\ 01802\ 27605\ 53250\ 6171_{91}.$$

光緒丙子(1876)黃宗憲隨使至英,於博物院天學書中覓得圓率眞數一百五十八位,與曾左所推得百位者,校之,一一脗合.語見黃宗憲容圓七術卷尾"圓率眞數補."

同治十二年(1873)華蘅芳與英傅蘭雅,共譯英華里司代數術二十五卷,其卷二十五亦論圓率,并由$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$算得$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$.謂:"曾有算學士固靈(Ludolph Van Ceulen,荷蘭人)者,用平圓內容外切之多等邊形,[即割圓法],費了極大工夫,算得此三十六位之數,其臨死之時,囑其家以此數刻於墓碑.……惟固靈之後,

又有法蘭西人提拉尼 (Fautet De Lagny, 1719) 者, 用簡便之法,推得一百二十八位周率之數,後有尤拉 (Euler) 考之,言提拉尼之法,只須八十小時工夫,已可算畢.又有人云,英國哇克斯福德大書院 (Radcliffe Library, Oxford) 內,有一書中,已記一百五十位周率,"其第273款又算得

$$\frac{2}{\pi}=0.63661977236,$$

$$\pi=3.141592636.$$

光緒三年 (1877) 華蘅芳與英傅蘭雅,共譯英海麻士三角數理十二卷,其第146及147款,謂:

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}.$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{239}.$$

$$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}.$$

第159款,謂:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots.$$

(三) 圓率解析法

13. 杜德美法之輸入

距利瑪竇 (Matteo Ricci) 來華之期,恰及一稘,法人杜德美 (Pierre Jartoux; 1670–1720. 11. 30) 亦浮海東來,時爲十七世紀之末年 (1700).是時國中適有測地之舉,遂於役其間.杜德美又嘗與來布尼玆 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) 通訊.(5)

梅穀成 (1681–1763) 於梅氏叢書輯要卷六十一,附錄一,赤水遺珍內載"求周徑密率捷法,"注稱[譯西士杜德美法].

$$\pi d=d\left\{3+\frac{3\cdot1^2}{4\cdot|\underline{3}}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2}{4^2\cdot|\underline{5}}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3\cdot|\underline{7}}+\cdots\cdots\right\}$$

或

$$\pi=3\left\{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{|\underline{3}}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot3^2}{|\underline{5}}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{|\underline{7}}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=3.1415926495 \qquad \text{(I)}$$

(5) 參觀三上義夫,中日數學發達史第一四頁,即 Mikami, Y., The Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig, 1913, p. 14. 及 Smith, D. E. and Mikami, Y., History of Japanese Mathematics, Chicago, 1914, pp. 15[illegible]–155.

次載"求弦,矢捷法"即

設弧求正弦,

$$\sin a = a - \frac{a^3}{\lfloor 3 \cdot r^2} + \frac{a^5}{\lfloor 5 \cdot r^4} - \frac{a^7}{\lfloor 7 \cdot r^6} + \frac{a^9}{\lfloor 9 \cdot r^8} - \cdots\cdots, \quad \text{(II)}$$

設弧求正矢,

$$\text{vers}\, a = \frac{a^2}{\lfloor 2 \cdot r} - \frac{a^4}{\lfloor 4 \cdot r^3} + \frac{a^6}{\lfloor 6 \cdot r^5} - \frac{a^8}{\lfloor 8 \cdot r^7} + \frac{a^{10}}{\lfloor 10 \cdot r^9} - \cdots\cdots, \quad \text{(III)}$$

割圜密率捷法四卷,爲明安圖(一作明圖,號靜庵,奉天正白旗生員)所作,椒始乾隆初年(1736-?),其子明新(字景臻),門人張肱(字良亭,寶應人,後官農部主政),陳際新(一作陳季新,號舜五,宛平人,後官靈臺郎),於明安圖卒後數年續成之,時乾隆三十九年(1774)也.書成後爲某氏(一作張敦仁)所祕,未及刻行[6].書雖未刻,世已有知者;孔廣森(1752-1786)曾聞其說於陳

(6) 見衡齋算學第六冊,割圜連比例術圖解,序,(1819)及割圜密率捷法,道光己亥(1839)岑建功序.

際新[7].阮元(1764-1849)已藏有割圜捷法一帙,不知何人之書,故疇人傳(1799)未載[8].其九術寫本,世多傳記,而次序互有異同.朱鴻(字雲路,號筠麓或小梁,秀水人)先得張豸冠寫本,於嘉慶戊辰(1808)以示汪萊,汪萊始翻然改悔前此詆斥杜術之誤[9].朱鴻又於嘉慶己卯(1819)以九術示董祐誠,鍾祥,李潢(?—1811)舊藏有四卷本原書,道光辛巳(1821)即歸朱鴻,董祐誠[10].丁取忠(字果臣,號雲梧,長沙人)一日於友人家得一鈔

(7) 孔廣森少廣正負術外篇上,"割圜弧矢十條"稱:"……至其弧背與弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於靈壽耶陳君際新,……".

(8) 語見割圜密率捷法,道光二十年(1840)阮元序.

(9) 語見汪萊:衡齋算學第三册,第六册.及割圜密率捷法,羅士琳識.

汪萊:衡齋算學第六册稱:

"又論曰:西人杜德美有圜度求弦矢捷法,補梅氏赤水遺珍載之未備.戊辰(1808)冬効力史館,協修朱君雲路出示所藏,乃親德美全法,……"

* * *

"記曰.舊刻此册,誤詆德美之失.古愚張太守非之,蓋得明君圖所解者,太守祕其書不相示.予至都中,求之司博士廷棟,博士購之經歲,不能得,聞之人云,明君所傳者,陳君季新,季新早卒無傳.然張太守已得之,惜予不獲見.爾因朱君出其全法,思悟及此,急改刊舊論,并記之,以誌吾過."

(10) 語見汪萊衡齋算學第六册,及董祐誠割圜連比例術圖解自序,後序.

本算書，首尾殘缺，不知何人撰，細抽其法，則弧度求弦矢，弦矢求弧度之全法，蓋杜德美之原術，第其文隱奥難解，而又無算例.果臣乃發憤爲算例凡若干言，書成名曰數學拾遺，時不知有明氏，董氏書(卽明安圖割圜密率捷法，董祐誠割圜連比例術圖解)[11]也.又十餘年至道光己亥(1839)明氏書始刻行，上距刱始，已百年矣.其未刻行前，范景福，孔廣森，汪萊，董祐誠，焦循，安淸翹諸家著說，已幷受此書之影響矣.

割圜密率捷法卷一"步法"有圜徑求周等九術，陳際新稱："內圜徑求周，弧背求弦，求矢三法，本泰西杜氏德美所著，"蓋以餘六術爲明安圖所補創也.而朱鴻，張豸冠，董祐誠，項名達，徐有壬，戴煦，丁取忠，夏鸞翔，復通稱杜氏九術. 九術者：

(一)圜徑求周，

$$\pi d=d\left\{3+\frac{3\cdot 1^2}{4\cdot \lfloor 3}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot \lfloor 5}+\frac{3\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot \lfloor 7}+\cdots\cdots\right\},$$

或 $$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1^2}{\lfloor 3}+\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2}{\lfloor 5}+\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{\lfloor 7}+\cdots\cdots,$$

(11) 語見丁取忠：數學拾遺，鄒漢勳咸豐元年(1851)序，丁取忠同治十三年(1874)自跋.

或 $$\pi d=3d\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot(2n-1)!}\qquad\text{(I)}$$

(二)弧背求正弦,

$$\sin a=a-\frac{a^3}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{a^5}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}-\frac{a^7}{\lfloor\underline{7}\cdot r^6}+\frac{a^9}{\lfloor\underline{9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

或 $$\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}\cdot\ \cdots\cdots\qquad\text{(II)}$$

(三)弧背求正矢,

$$\operatorname{vers} a=\frac{a^2}{\lfloor\underline{2}\cdot r}-\frac{a^4}{\lfloor\underline{4}\cdot r^3}+\frac{a^6}{\lfloor\underline{6}\cdot r^5}-\frac{a^8}{\lfloor\underline{8}\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{\lfloor\underline{10}\cdot r^9}-\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!}\cdot\qquad\text{(III)}$$

(四)弧背求通弦,

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot\lfloor\underline{5}\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot\lfloor\underline{7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot\lfloor\underline{9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

或 $$c=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}\cdot\qquad\text{(IV)}$$

(五)弧背求矢,

$$\operatorname{vers} a=\frac{(2a)^2}{4\cdot 2!\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\cdot 4!\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\cdot 6!\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^4\cdot 8!\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\cdot r^{2n-1}\cdot(2n)!} \qquad \text{(V)}$$

(六)通弦求弧背,

$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot 5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot 7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot 9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$2a=\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1}. \qquad \text{(VI)}$$

(七)正弦求弧背,

$$a=\sin a+\frac{1^2\cdot\sin^3 a}{3!\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot\sin^5 a}{5!\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\sin^7 a}{7!\cdot r^6}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\sin^9 a}{9!\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

或 $$a=\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{r^{2(n+1)}\cdot(2n-1)!}\sin^{2n-1} a \qquad \text{(VII)}$$

此式乃由(VI)式,令 $c=2\sin a$ 代得.

(八)正矢求弧背,

$$a^2=r\left\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

或 $$a^2=2r\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}\cdot(2n)!}(2\text{ vers }a)^n \quad \text{(VIII)}$$

(九)矢求弧背,

$$(2a)^2=r\left\{(8\text{ vers }a)+\frac{1^2(8\text{ vers }a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(8\text{ vers }a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\, r^2}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(8\text{ vers }a)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\, r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

或 $$(2a)^2=2r\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdot\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{4^{n-1}\cdot r^{n-1}(2n)!}(8\text{ vers }a)^n \quad \text{(IX)}$$

此式由(VIII)式化得,極易看出.

以上所述九法,以(II),(III),(IV),(V),(VI)(VIII)六式爲基本,其餘則(I)式則由(VI)以 $2a=\frac{\pi d}{6}$, $c=\frac{d}{2}$,代入化得;(VII)式由(VI)以 $c=2\sin a$ 代入化得;(IX)式由(VIII)式兩邊各增乘4化得.故割圜密率捷法卷三,卷四,"法解上,下,"僅解析此基本六法也.六法之中,

又以(II),(III),(VI),(VIII)四法,爲諸術所自出,故陳際新以告孔廣森,徐有壬測圜密率卷二,亦僅錄此四法也.其在西洋,則(II),(III)式爲古累固里(James Gregory)所發明(1667),(VI)式與牛頓(Isaac Newton)反正弦 $\sin^{-1}\frac{1}{a}$ 式(1676)相類.(VIII)式則尤拉(Euler)曾得之(1737),而公布此式則爲斯騰徵(J. de Stainvilles, 1815)云.

其九術名目,次序亦頗有異同,如名目則:

古法	割圜密率捷法本	張豸冠項名達引杜氏九術	丁取忠引杜氏術
弧背($2a$)	弧背($2a$)	通弧($2a$)	通弧($2a$)
弦(c)	通弦(c)	通弦(c)	通弦(c)
半弧背(a)	弧背(a)	弧背(a)	弧度(a)
半弧弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)	正弦($\sin a$)

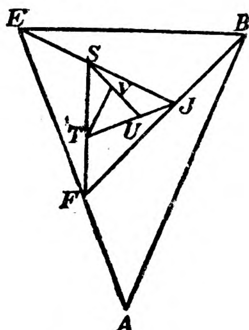
次序則:

割圜密率捷法本	張豸冠寫本杜氏九術全本	項名達引杜氏九術	丁取忠數學拾遺引杜氏術
圜徑(d) 求周(πd) (I)	圜徑求周 (1)	圜徑求周 (9)	全徑求周 (9)
弧背(a) 求正弦($\sin a$) (II)	弧背求正弦 (4)	弧背求正弦 (3)	弧度求正弦 (1)
弧背(a) 求正矢($\text{vers } a$) (III)	弧背求正矢 (5)	弧背求正矢 (4)	弧度求正矢 (2)
弧背($2a$) 求通弦(c) (IV)	通弧求通弦 (2)	通弧求通弦 (1)	通弧求通弦 (5)

弧背(2a) 求矢(vers a)　(V)	通弧求矢　(3)	通弧求矢　(2)	通弧求矢　(6)
通弦(c) 求弧背(2a)　(VI)	通弦求通弧 (6)	通弦求通弧 (5)	通弦求通弧 (7)
正弦(sin a) 求通弧(a)　(VII)	正弦求弧背 (8)	正弦求弧背 (7)	正弦求弧度 (3)
正矢(vers a) 求弧背(a)　(VIII)	正矢求弧背 (9)	正矢求弧背 (8)	正矢求弧度 (4)
矢(vers a) 求弧背(2a)　(IX)	矢求通弧　(7)	矢求通弧　(6)	正矢求通弧 (8)

14.　明安圖之割圜密率捷法

明安圖以三十年之精思,始撰成割圜密率捷法,以解析九術,幷由連比例三角形入手.茲先說明連比例三角形,及其各率之性質.如圖 ABE, BEF, EFJ, FJS, JST, STU, TUV,……,因第二形之邊線,與前形之底線等,故各邊爲連比例,如



第十四圖

$$AB:BE=BE:EF=EF:FJ=FJ:JS=JS:ST=ST:TU=\cdots,$$

卽　$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4=\phi_4:\phi_5=\phi_5:\phi_6=\cdots\cdots,$

而 $\phi_1, \phi_2, \phi_3,\cdots\cdots$ 等稱爲一,二,三,……率.

且可知　$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3,$

$\phi_1:\phi_2=\phi_4:\phi_5;$

$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_5,$

$$\phi_1 : \phi_3 = \phi_5 : \phi_7;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

即 $$\phi_3 = \frac{{\phi_2}^2}{\phi_1};$$

$$\phi_5 = \frac{\phi_2 \cdot \phi_4}{\phi_1}, \text{或 } \phi_5 = \frac{{\phi_3}^2}{\phi_1};$$

$$\phi_7 = \frac{\phi_3 \cdot \phi_5}{\phi_1}, \text{或 } \phi_7 = \frac{{\phi_3}^3}{{\phi_1}^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\phi_{2n+1} = \frac{\phi_n \cdot \phi_{n+2}}{\phi_1}$$

且 $\phi_2, \phi_3, \cdots\cdots$ 等無論何數,凡與 ϕ_1 可成連比例者,并合上定理.

故 $$\phi'_3 = \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1},$$

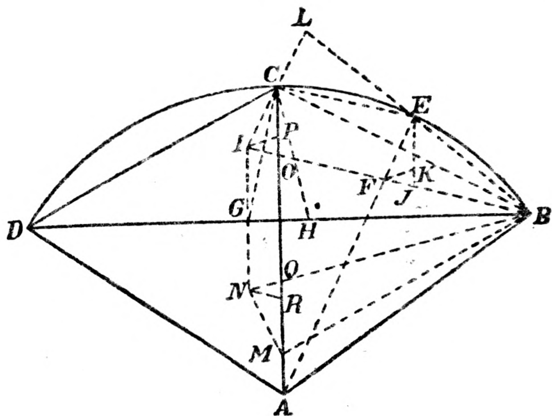
$$\phi'_5 = \frac{\phi'_3 \cdot \phi'_3}{\phi_1},$$

分弧通弦求全弧通弦,即弧背求通弦所由起.其法由一分弧通弦, ϕ_2, 以幾何法證得 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, 10000 分弧之通弦,如下 I° 内 $a_1^\circ, a_2^\circ, a_3^\circ; b_1^\circ\ b_2^\circ; c^\circ; d^\circ; e^\circ; f^\circ; g^\circ; h^\circ$ 所示,若倍數擴充至無窮大,則全弧與無窮大倍數之一分弧通弦($n\phi_2$)合矣.(12)

I.° 分弧通弦率數,求全弧通弦率數法解.

a_1.° $\frac{1}{2}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數第一法.

如圖 A 爲圓心, AB 爲半徑,平分 BD 弧於 C, BC 弧於 E. 聯 DA, DB, DC; BC, CE, BE, AC, AE 各線. 作 $BF=BE$. 則△ₛ ABE, BEF 爲連比例△ₛ 卽 $AB:BE=BE:EF$, 或 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$, 而 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 爲一,二,三率.



第十五圖

又作 $BG=DH=BC$. 則有連比例△ₛ BCG, CGH.

因 $$\angle BAE=\angle CBD,$$

故連比例△ₛ ABE, BEF ∽ 連比例△ₛ BCG, CGH.

---

(12) 以下見割圜密率捷法卷三,"法解上,"第1-49頁,道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

卽 $$AB:EF=BC:GH,$$

故 $$BD=2BC-GH=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}.$$

又作 $BM=BC$. 則有連比例△ₛ ABC, BCM.

卽 $$AB:BC=BC:CM,\ 或\ \phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3.$$

又作 $EJ=EF$, $FK=FJ$, 則有連比例△ₛ ABE, BEF, EFJ, FJK.

其中 $$\phi_1=AB,\ \phi_2=BE,\ \phi_3=EF,\ \phi_4=FJ,\ \phi_5=JK.$$

次引長 BE, BF, 令 $EL=BE$, $FI=BF$, 則△ BEF ∽△ BLI. 以 BI 爲軸, 展△ BIL 爲△ BIN. 因∠ₛ CBI, IBG 爲平分角, 故 BC 與 BG 合. 以 BN 爲軸, 展△ BGN 爲△ BNM. 因∠ GBN, NBM 爲平分角, 故 BG 與 BM 合. 又作 $IP=IO$, 則連比例△ₛ CIO, IOP = 連比例△ₛ EFJ, FJK. 因箏形(Kite) $ABEC$, $BLIN$ 爲相似,

故 $$AB:2BE(=BL=BE+EC)=2BE:LI+IN(=CI+IN+NM)=2BE:CM+PO(=CM+JK).$$

由前 $$AB:BC=BC:CM,$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3;$$

而 $$\phi_3=\frac{\overline{BC}^2}{AB}=\frac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1}.$$

又 $AB : BL = BL : (CI + IN + NM)$,

或 $\phi_1 : \phi'_2 = \phi'_2 : \phi'_3$;

而 $$\phi'_3 = \frac{\overline{BL}^2}{AB} = \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1},\quad \frac{\phi'_3}{4} = CI = \frac{1}{4} \cdot \frac{\phi'_2 \cdot \phi'_2}{\phi_1}.$$

故 $\phi_1 : \frac{\phi'_3}{4} = \frac{\phi'_3}{4} : \phi''_5$,

或 $\phi_1 : \phi''_3 = \phi''_2 : \phi''_5$;

而 $$\phi''_5 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\phi'_3 \cdot \phi'_3}{\phi_1} = \frac{\phi'_5}{16} = OP.$$

故 $$\phi_3 = \phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}.$$

同理 $\phi_1 : \phi_3 = \phi_3 : \phi_5$

即 $$\phi_1 : \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) = \left(\phi'_3 - \frac{\phi'_5}{16}\right) : \phi_5.$$

$$\phi_5 = \phi'_5 - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{16} + \frac{\phi'_9}{16 \cdot 16},$$

或 $$\phi_5 = \phi'_5 - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{4^2} + \frac{\phi'_9}{4^4};$$

$$\frac{\phi_5}{16} = \frac{\phi'_5}{16} - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{16 \cdot 16} + \frac{\phi'_9}{16 \cdot 16 \cdot 16},$$

或 $$\frac{\phi_5}{4^2} = \frac{\phi'_5}{4^2} - 2 \cdot \frac{\phi'_7}{4^4} + \frac{\phi'_9}{4^6}.$$

又 $$\phi_1:\phi_3=\phi_5:\phi_7$$

即 $$\phi_1:\phi_3=\frac{\phi_5}{16}:\frac{\phi_7}{16}.$$

$$\phi_1:\left(\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}\right)=\left(\frac{\phi'_5}{16}-2\cdot\frac{\phi'_7}{16\cdot16}+\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}\right):\frac{\phi_7}{16}$$

$$\frac{\phi_7}{16}=\frac{\phi'_7}{16}-3\frac{\phi'_9}{16\cdot16}+3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16}-\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16},$$

$$\frac{\phi_7}{16\cdot16}=\frac{\phi'_7}{16\cdot16}-3\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}+3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}-\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}.$$

又 $$\phi_1:\phi_3=\phi_7:\phi_9,$$

即 $$\phi_1:\phi_3=\frac{\phi_7}{16\cdot16}:\frac{\phi_9}{16\cdot16},$$

$$\phi_1:\left(\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}\right)=\left(\frac{\phi'_7}{16\cdot16}-3\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}+3\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}-\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right):\frac{\phi_9}{16\cdot16}.$$

$$\frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}+6\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

(以下略去)

又 $\phi_1:\phi_3=\phi_9:\phi_{11}$

即 $\phi_1:\phi_3=\frac{\phi_9}{16\cdot16\cdot16}:\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}$

$$\phi_1:\left(\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}\right)=\left(\frac{\phi'_9}{16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}\right.$$

$$\left.+6\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}-4\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}\right)$$

$$:\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16}.$$

$$\frac{\phi_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{11}}{16\cdot16\cdot16\cdot16}-5\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

$$+10\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$ (以下略去)

同理

$$\frac{\phi_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{13}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}-6\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$

(以下略去)

$$\frac{\phi_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}=\frac{\phi'_{15}}{16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16\cdot16}$$ (以下略去)

由上各式可以求得$\phi_3, \phi_5, \phi_7,$……爲函數之ϕ'_3數值,蓋

$$\phi_3=\phi'_3-\frac{\phi'_5}{16}$$

$$\frac{\phi_5}{16}=\frac{\phi'_5}{16}-2\frac{\phi'_7}{16^2}+\frac{\phi'_9}{16^3}$$

$$2\frac{\phi_7}{16^2}=2\frac{\phi'_7}{16^2}-6\frac{\phi'_9}{16^3}+6\frac{\phi'_{11}}{16^4}-2\frac{\phi'_{13}}{16^5}$$

$$5\frac{\phi_9}{16^3}=5\frac{\phi'_9}{16^3}-20\frac{\phi'_{11}}{16^4}+30\frac{\phi'_{13}}{16^5}-20\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$14\frac{\phi_{11}}{16^4}=14\frac{\phi'_{11}}{16^4}-70\frac{\phi'_{13}}{16^5}+140\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$42\frac{\phi_{13}}{16^5}=42\frac{\phi'_{13}}{16^5}-252\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

$$132\frac{\phi_{15}}{16^6}=132\frac{\phi'_{15}}{16^6}$$

加之得 $\phi_3+\frac{\phi_5}{16}+2\frac{\phi_7}{16^2}+5\frac{\phi_9}{16^3}+14\frac{\phi_{11}}{16^4}+42\frac{\phi_{13}}{16^5}$

$$+132\frac{\phi_{15}}{16^6}=\phi'_3.$$

而 $$\frac{\phi'_3}{4}=\frac{\phi_3}{4}+\frac{\phi_5}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_7}{4\cdot 16^2}+5\frac{\phi_9}{4\cdot 16^3}+14\frac{\phi_{11}}{4\cdot 16^4}$$

$$+42\frac{\phi_{13}}{4\cdot 16^5}+132\frac{\phi_{15}}{4\cdot 16^6}.$$

又 $$EF=\frac{\phi'_3}{4},\ \frac{BC\times EF}{AB}=\frac{\phi_2}{\phi_1}\left(\frac{\phi'_3}{4}\right)=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$$

$$+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

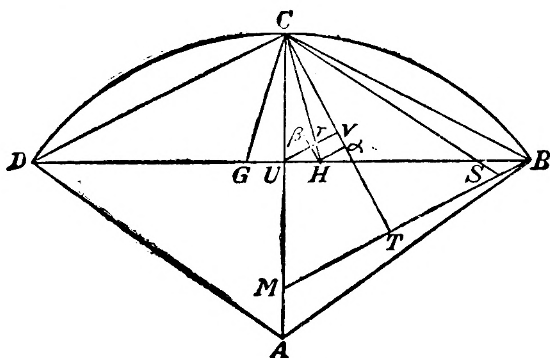
前證得 $BD=2BC-\frac{BC\times EF}{AB}$,代入得

$$BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

而 $\phi_1=AB=r$; $\phi_2, \phi_4, \phi_6, \cdots\cdots$ 爲分弧通弦率, BD 爲二分全弧通弦率;此言以 BC 爲某弧之通弦,因而求得 BD 爲二倍弧之通弦也.

a_2°. $\frac{1}{2}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數第二法.



第十六圖

按前圖於$\triangle BCM$內作$BM=BC$, $CS=CN$, $ST=MT$; 聯各線,則有連比例$\triangle$s ABC, BCM, CMS,即$AB:BC=BC:CM=CM:MS$, 即 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4$.自$U$, H作MB之平行線$U\gamma V$, Ha, 則$MT=\frac{1}{2}\phi_4$, $U\gamma V=\frac{1}{4}\phi_4$.

因 $\angle UCa=\angle CBU=\angle GCH$, 則$\triangle GCU=\triangle HCa$而$Ha=UH=GU$.

自H作$H\beta\perp U\gamma V$.因$MB \parallel DC$, $U\gamma V \parallel MB$, 即$U\gamma V \parallel DC$.而$\triangle$s DCH, $U\gamma H$爲相似,故$UH=U\gamma$.

故得連比例$\triangle$s BCG, CGH, $2UHr$.

則 $$AB:BC=BC:CM$$

即 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$$

而 $$CU=\frac{1}{2}\phi_3.$$

又 $$BC:CU=CU:U\gamma V$$

即 $$\phi_2:\frac{1}{2}\phi_3=\frac{1}{2}\phi_3:\frac{1}{4}\phi_4,$$

則 $$\frac{1}{4}\phi_4=\frac{\left(\frac{1}{2}\phi_3\right)^2}{\phi_2},$$

而 $$U\gamma V=\frac{1}{4}\phi_4.$$

又 $$BC:CG=CG:GH$$

即 $$\phi_2 : \frac{1}{2}\phi'_3 = \frac{1}{2}\phi'_3 : \frac{1}{4}\phi'_4,$$

則 $$\frac{1}{4}\phi'_4 = \frac{\left(\frac{1}{2}\phi'_3\right)^2}{\phi_2},$$

而 $$UH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4.$$

又 $$BC : UH = UH : \beta\gamma$$

即 $$\phi_2 : \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4 : \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6,$$

則 $$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6 = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\phi'_4\right)^2}{\phi_2},$$

而 $$\beta\gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\phi'_6.$$

如圖 $$UH + Ha - \beta\gamma = U\gamma V$$

即 $$\frac{1}{4}\phi'_4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\phi'_6 = \frac{1}{4}\phi_4.$$

同理 $$\phi_2 : \frac{\phi_4}{4} = \frac{\phi_4}{4} : \frac{\phi_6}{16}$$

即 $$\phi_2 : \left(\frac{\phi_4}{4} - \frac{\phi'_6}{4\cdot 16}\right) = \left(\frac{\phi'_4}{4} - \frac{\phi'_6}{4\cdot 16}\right) : \frac{\phi_6}{16}$$

$$\frac{\phi_6}{16}=\frac{\phi'_6}{16}-2\frac{\phi'_8}{16^2}+\frac{\phi'_{10}}{16^3}.$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot16}=\frac{\phi'_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}$$

又

$$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_6}{4\cdot16}:\frac{\phi_8}{16^2}$$

即

$$\phi_2:\left(\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot16}\right)=\left(\frac{\phi'_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}\right):\frac{\phi_3}{16^2}$$

$$\frac{\phi_8}{16^2}=\frac{\phi'_8}{16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{16^4}-\frac{\phi'_{14}}{16^5},$$

$$\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}=\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}-\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}.$$

又

$$\phi_2:\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}:\frac{\phi_{10}}{16^3}$$

即

$$\phi_2:\left(\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot16}\right)=\left(\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}-3\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}+3\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}-\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}\right):\frac{\phi_{10}}{16^3}.$$

$$\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}=\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}-4\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}-4\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}.$$ (以下略去)

又
$$\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}=\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}-5\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}+10\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}$$

（以下略去）

$$\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}=\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}-6\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}\text{（以下略去）}$$

$$\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}=\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}\text{（以下略去）}$$

由上各式可以求得$\phi_4,\phi_6,\phi_8,\cdots\cdots$爲函數之$\phi'_4$數值,蓋

$$\frac{\phi_4}{4}=\frac{\phi'_4}{4}-\frac{\phi'_6}{4\cdot16}$$

$$\frac{\phi_6}{4\cdot16}=\frac{\phi'_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}=2\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}-6\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}+6\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}-2\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}=5\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}-20\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}+30\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}-20\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}$$

$$14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}=14\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}-70\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}+140\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}$$

$$42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}=42\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}-252\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}$$

$$132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}=132\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}$$

加之得 $\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$

$$+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}=\frac{\phi'_4}{4}.$$

而 $UH=\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi'_4}{4}.$

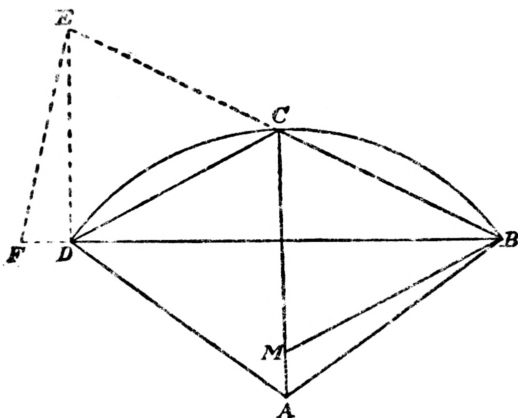
因得 $BD=2BC-GH=2BC-2UH.$

$$=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

與第一法相同.

$a^0{}_3$. $\frac{1}{2}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數第三法.



第十七圖

按前圖引長BC交直垂線DE於E.又作$BF=BE$

則　$$DE=CM=\phi_3=a,$$

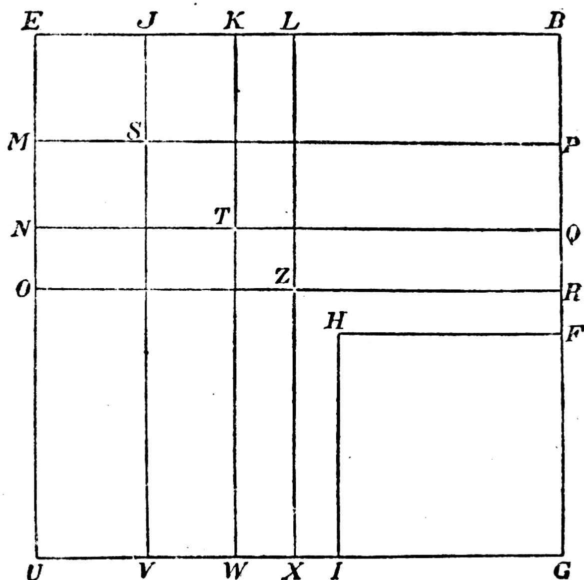
$$BD=b,$$

$$BE=2\phi_2=c$$

而　$$a^2+b^2=c^2$$

次如次圖,作$\square BEUG=c^2$, $\square FHIG=b^2$.

則　磬折形$BHUE=(c+b)(c-b)=a^2$.



第十八圖

按 Pythagoras 定理,$(c+b)(c-b)=a^2$,$\frac{a^2}{c+b}=c-b$,分數 $\frac{a^2}{c+b}$ 之分母分子若爲已知,則可直接求得 $c-b$. 但僅有分子 $a^2=\phi_3{}^2$ 爲已知,而分母 $c+b$ 中僅有 $c=2\phi_2$ 爲已知,如令 $b=c$ 代入之,則分母爲 $2c=4\phi_2$,可以先求得 $c-b$ 較小之數,但實際 $c>b$,故 $\frac{a^2}{2c}<c-b$,今假令所得較小之數爲 BP.

因上述 $\frac{\phi_3\cdot\phi_3}{4\phi_2}=\frac{\phi_4}{4}$ 之關係,卽得 $\frac{(c+b)(c-b)}{2c}=BP$. 此爲 $\frac{a^2}{c+b}$ 之初商.

如圖　磬折形 $BHUE=\square BEMP+\square JEUV$.

$=$磬折形 $BSUE+\square ES$

則　$\square ES=$磬折形 $PHVS$,而 $ES=\left(\frac{\phi_4{}^2}{4}\right)^2$

又因　$\frac{\left(\frac{\phi_4}{4}\right)^2}{4\phi_2}=\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$ 之關係,

卽得　$\frac{\text{磬折形 } PHVS}{2c}=PQ$. 此爲 $\frac{a^2}{c+b}$ 之次商.

又如圖　磬折形 $PHVS=\square PN+\square KV$.

$=$磬折形 $QSVT+$磬折形 $JTNS$.

卽　磬折形 $QHWT+$磬折形 $QSVT=$磬折形 $QSVT$

$+$磬折形 $JTNS$.

∴ 磬折形 $JTNS$ = 磬折形 $QHWT$.

而 磬折形 $JTNS$ 中, $JS=\frac{\phi_4}{4}$, $PQ=\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$。

∴ 磬折形 $JTNS$ = 磬折形 $QHWT$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}\right)\cdot\frac{\phi_6}{4\cdot 16}。$$

故 $\frac{\text{磬折形}\ QHWT}{4\phi_2}=2\cdot\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}=QR$ (三商)

同理,磬折形 $KZOT$ = 磬折形 $RHXZ$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right)\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right).$$

故 $\frac{\text{磬折形}\ RHXZ}{4\phi_2}=4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$

$+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$ (四商)

同理,

五商 $=\left\{\left[2\left(\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right)+\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right.\right.\right.$

$\left.\left.+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}\right)\right]\left[4\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}\right.$

$$+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\Big]\Big\}\div4\phi_2$$

$$=8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$（以下略去）

六商 $=16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$（以下略去）

七商 $=32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$（以下略去）

故

$$c-b=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+\left(2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right)+\left(4\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}\right.$$

$$\left.+6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+4\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$

$$+\left(8\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+20\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+40\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$

$$+\left(16\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+56\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)+\left(32\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\right)$$

$$=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

因　$c=2\phi_2$

故　$b=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$

$$-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

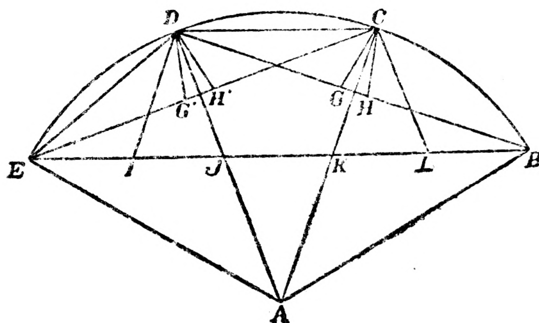
其結果與前二法同.

b'_1. $\frac{1}{3}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數第一法.

如圖以 A 爲圜心, AB 爲半徑, $BC=CD=DE$.

聯 EC, BD, BE; 而 $BD=EC$. 由前法知

$$BD=2\,BC-GH,\ EC=2\,ED-G'H'.$$



第十九圖

次作 $BI=EL=BD$ 又作 $DI=DJ=CK=CL$.

故連比例 $\triangle_s$ BDI, DIJ 或 $\triangle_s$ ECL, CLK ∽連比例 $\triangle_s$ BCG, CGH EDH 或 $\triangle_s EDH'$, $DG'H'$.

卽 $$AB:BC=CG:GH$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4$$

而 $BC:GH=BD:IJ.\quad IJ=\frac{BD\times GH}{BC}.$

$$BE=2\,BD-IL=2\,BD-(DC+IJ)=2\,BD-BC-IJ.$$

由前題知 $$BD=2\,\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

又知 $$GH=\frac{\phi_4}{4}+\frac{\phi_6}{4\cdot16}+2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{BD\times GH}{BC}=2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

則 $$BE=2\,BD-BC-IJ$$

$$=4\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot 16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}\cdot$$

$$-\phi_2$$

$$+)\qquad -2\frac{\phi_4}{4}+2\frac{\phi_6}{4\cdot 16}+4\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}+10\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$+28\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}+84\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}+264\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}\cdot$$

$\therefore$ $BE=3\phi_2-4\frac{\phi_4}{4}$ 爲所求三分全弧通弦率數.

b°_2. $\frac{1}{3}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數第二法.

如圖 $AB:BC=CK:KL$

卽此 $\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4$

$BE=3\,BC-KL=3\,\phi_2-\phi_4$. 此法甚易,然與前法不能相通,故置爲又法.

(按此卽數理精蘊,1723,卷十六,"新增按分作相連比例四率法"甲之法).

c°. $\frac{1}{4}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如圖以 A 爲圓心, AB 爲半徑, $BC, CD,\cdots\cdots$ 爲 $\frac{1}{4}$ 弧; BC,

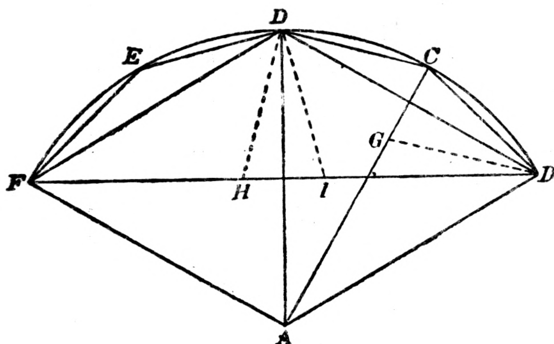
CD, …… 爲 $\frac{1}{4}$ 弧通弦; BD, DF, …… 爲 $\frac{1}{2}$ 弧通弦. 求 BF 全弧通弦.

作 $BH=BD$, $FI=FD$; $BG=BC$.

則連比例△, BDH, DHI 或 FDI, DHI ∽ 連比例△, ABC, BCG.

卽 $$AB:BC=BC:CG$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3;$$



第二十圖

而 $$AB:CG=BD:HI, \qquad HI=\frac{BD\times CG}{AB}.$$

$$BF=2\,BD-HI=2\,BD-\frac{BD\times CG}{AB}.$$

因 $\frac{BD\times CG}{AB}=\frac{\phi_3}{\phi_1}BD$

$$=8\frac{\phi_4}{4}-16\frac{\phi_6}{4\cdot16}-16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-80\frac{\phi_{12}}{2\cdot16^4}-224\frac{\phi_{14}}{4\cdot11^5}-672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

$BF=2\,BD-HI$

$$=4\,\phi_2-2\frac{\phi_4}{4}-2\frac{\phi_6}{4\cdot16}-4\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-10\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-28\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-84\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-264\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

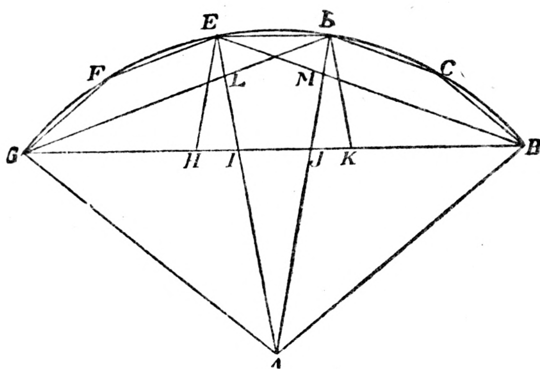
$$+)\quad -8\frac{\phi_4}{4}+16\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+32\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+80\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+224\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+672\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

$$BF=4\,\phi_2-10\frac{\phi_4}{4}+14\frac{\phi_6}{4\cdot16}+12\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+22\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+52\frac{\phi_{12}}{4\cdot17^4}+140\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+408\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}\cdot$$

爲所求四分全弧通弦率數.

d. $\frac{1}{5}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數

如圖以 A 爲圓心, AB 爲半徑, $BC, CD,\cdots\cdots$ 爲 $\frac{1}{5}$ 弧, $BC, CD,\cdots\cdots$ 爲 $\frac{1}{5}$ 弧通弦. BE, GD 爲 $\frac{1}{3}$ 弧通弦.作 $BH=BE, GK=GD$; 聯 EH, DK. 此二線各與 DA, EA 平行.



第二十一圖

則連比例△，BEH, EHI 或 GDK, DKJ ∽ 連比例△。AED, EDL.

卽 $AB:BC=ED:EL$, 或 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$.

而 $AB:EL=BE:HI$, $HI=\dfrac{BE\times EL}{AB}$.

$$\begin{aligned} BG&=2\,BE-BC-HI \\ &=2(3\,\phi_2-\phi_4)-\phi_2-(3\,\phi_2-\phi_4)\frac{\phi_3}{\phi_1} \\ &=5\,\phi_2-5\,\phi_4+\phi_6 \end{aligned}$$

卽 $BG=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$爲所求五分弧通弦率數.

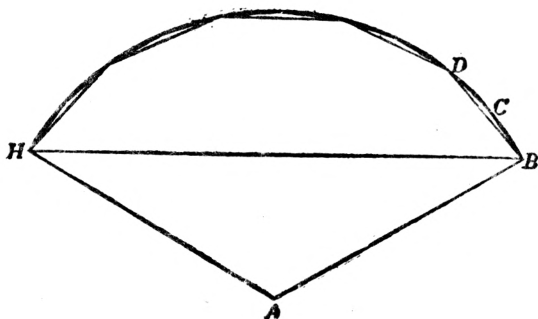
按此"隔一分加減之法"$\left(卽\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\cdots\cdots\right)$較"逐位遞求"者,固爲易矣.然析至千萬分,亦不勝其繁;

故又設以兩分數弧通弦率數,$\left(\text{如}\ \frac{1}{2},\frac{1}{5};\frac{1}{10},\frac{1}{10};\frac{1}{10},\frac{1}{100}\right)$,求兩分數乘得一分數弧通弦率數,$\left(\text{如}\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10};\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100},\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}=\frac{1}{1000}\right)$之法.此法項名達稱爲"易率法,"徐有壬稱爲"借徑術."其法如下.

6°. $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

以A爲圓心,AB爲半徑.$BCD\cdots\cdots H$爲10分全弧,BH爲10分弧通弦.BC爲一分弧通弦,BD爲二分弧通弦,而BCD弧爲2分弧,亦爲全弧之$\frac{1}{5}$.

如令$AB=\phi_1=\phi'_1$, $BD=\phi'_2$,可以求得ϕ'_4,,$\phi'_6\cdots\cdots$



第二十二圖

即 $$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1},\ \phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$$

$$\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$$

………………,

已知 $$\phi'_2=BD=2\phi_2-\frac{\phi_4}{4}-\frac{\phi_6}{4\cdot16}-2\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-5\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-14\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-42\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-132\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

及 $$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=4\phi_3-\phi_5.$$

則 $$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=32\frac{\phi_4}{4}-192\frac{\phi_6}{4\cdot16}+192\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+128\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+192\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+384\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}+896\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

同理, $$\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}=2048\frac{\phi_6}{4\cdot16}-20480\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+61440\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-40960\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-20480\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-24576\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

但　　$BH=5\phi'_2-5\phi'_4+\phi'_6$

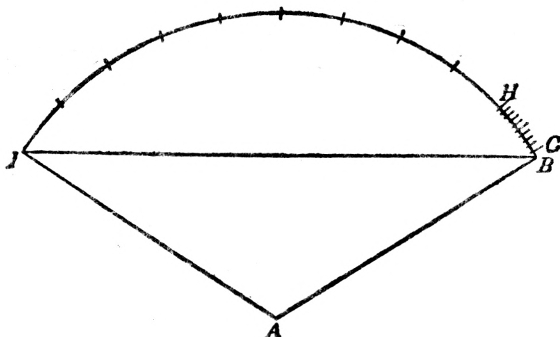
故　　$BH=10\phi_2-165\dfrac{\phi_4}{4}+3003\dfrac{\phi_6}{4\cdot16}-21450\dfrac{\phi_8}{4\cdot16^2}$

$$+60775\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-41990\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-22610\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-29716\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}$$

爲10分全弧通弦率數.

$f°$. $\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數,



第二十三圖

以A爲圓心,AB爲半徑.$BCHI$爲100分全弧.BI爲100分全弧通弦.BC爲1分弧通弦.BH爲10分弧通弦.而BCH爲10分弧,亦爲全弧之$\dfrac{1}{10}$.

如令 $AB=\phi_1=\phi'_1$. $BH=\phi'_2$ 可以求得 ϕ'_4, ϕ'_6,……

即 $\phi'_3=\dfrac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}$, $\phi'_4=\dfrac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_6=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$,……

令 $\phi'_2=BH=10\,\phi_2-165\dfrac{\phi_4}{4}+3003\dfrac{\phi_6}{4\cdot 16}-21450\dfrac{\phi_8}{4\cdot 16^2}$

$$+60775\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}-41990\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$-22610\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}-29716\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}.$$

$$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=100\,\phi_3-3300\frac{\phi_5}{4}+168960\frac{\phi_7}{4\cdot 16}$$

$$-4392960\frac{\phi_9}{4\cdot 16^2}+65601526\frac{\phi_{11}}{4\cdot 16^3}$$

$$-596377600\frac{\phi_{13}}{4\cdot 16^4}+3355443200\frac{\phi_{15}}{4\cdot 16^5}.$$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=1000\,\phi_4-49500\frac{\phi_6}{4}+4167900\frac{\phi_8}{4\cdot 16}$$

$$-197227800\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^2}+5874133980\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^3}$$

$$-117332222280\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^4}$$

$$+1633711449432\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^5}.$$

$$\frac{\phi'_4}{4}=1000\frac{\phi_4}{4}-198000\frac{\phi_6}{4\cdot16}+16671600\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$-788911200\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+23496535920\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-469328889120\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+6534845797728\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

同理 $\phi'_6=\dfrac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}=100000\,\phi_6-825000\,\dfrac{\phi_8}{4}$

$$+1239150000\frac{\phi_{10}}{4\cdot16}-112586100000\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^2}$$

$$+6943061510000\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^3}$$

$$-309389380780000\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^4}.$$

$$\frac{\phi'_6}{4\cdot16}=100000\frac{\phi_6}{4\cdot16}-33000000\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}+4956600000\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-450344400000\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+27772246040000\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-1237557523120000\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}=10^7\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}-462\times10^7\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}+998844\times10^6\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-134521464\times10^6\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+126777505624\times10^5\frac{\phi_{16}}{3\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}=10^9\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}-594\times10^9\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}+1676268\times10^8\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-299349864\times10^8\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}=10^{11}\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}-726\times10^{11}\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$+2527932\times10^{11}\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}=10^{13}\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}-858\times10^{13}\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

$$\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}=10^5\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

但 $$BI=10\,\phi'_2-165\frac{\phi'_4}{4}+3003\frac{\phi'_6}{4\cdot16}-21450\frac{\phi'_8}{4\cdot16^2}$$

$$+60775\frac{\phi'_{10}}{4\cdot16^3}-41990\frac{\phi'_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$-22610\frac{\phi'_{14}}{4\cdot16^5}-29716\frac{\phi'_{16}}{4\cdot16^6}.$$

故 $$BI=100\,\phi_2-166650\frac{\phi_4}{4}+333000030\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$

$$-316350028500\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$+17488840755750\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-630808149620046700\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+15978855666692498700\frac{\phi_{14}}{4\cdot16^5}$$

$$-2992154858314966282280\frac{\phi_{16}}{4\cdot16^6}.$$

卽百分全弧通弦率數.

$g°$. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如前說得

$$BJ=1000\,\phi_2-1666666500\frac{\phi_4}{4}+33333000000300\frac{\phi_6}{4\cdot16}$$

$$-317449206431428500\frac{\phi_8}{4\cdot16^2}$$

$$+176352028566840755557500\frac{\phi_{10}}{4\cdot16^3}$$

$$-641228160191006696204726700\frac{\phi_{12}}{4\cdot16^4}$$

$$+164397582457339380612970750787000\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-3130853319350554100164704566287942800\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$$

卽千分全弧通弦率數.

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$ 分弧通弦率數,求全弧通弦率數.

如前說得

$$BK=10000\,\phi_2-1666666665000\frac{\phi_4}{4}+333333330000000003000\frac{\phi_6}{4\cdot 16}$$

$$-3174602063492145714285000\frac{\phi_8}{4\cdot 16^2}$$

$$+176366694885396366840755555575000\frac{\phi_{10}}{4\cdot 16^3}$$

$$-6413329164668127624352669620472726700000\frac{\phi_{12}}{4\cdot 16^4}$$

$$+164444138277944574741493430839550921230787000 0\frac{\phi_{14}}{4\cdot 16^5}$$

$$-31322640727114357526697869850597636645662879994270 00\frac{\phi_{16}}{4\cdot 16^6}$$

卽萬分全弧通弦率數(13)

II°. 弧背求通弦率數法解.(14)

在前 f° (百分全弧通弦率數), g° (千分全弧通弦率數), h° (萬分全弧通弦率數)所得 BI, BJ, BK, 可以比例相較而得弧背求通弦之率數, 以其間幷有共同之性質也. 又因

$$\phi_4=\frac{{\phi_2}^3}{{\phi_1}^2},\ \phi_6=\frac{{\phi_2}^7}{{\phi_1}^6},\ \phi_{10}=\frac{{\phi_2}^9}{{\phi_1}^8}$$

$$\phi_{12}=\frac{{\phi_2}^{11}}{{\phi_1}^{10}}\cdots\cdots,\ \phi_{16}=\frac{{\phi_2}^{15}}{{\phi_1}^{14}}$$

故 BI, BJ, BK 可書爲

$$BI=(100\,\phi_2)-\frac{(100\,\phi_2)^3}{\frac{4(100)^3}{166650}\,{\phi_1}^2}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^5}{\frac{4(100)^3}{166150}\cdot\frac{166650\times 16(100)^2}{333000030}\,{\phi_1}^4}$$

(13) 以上見割圜密率捷法卷三, "法解上," 第 1-49 頁, 道光己亥(1839)孟秋, 石梁岑氏校刊.

(14) 以下見割圜密率捷法卷三, "法解上," 第 49-59 頁. 石梁岑氏校刊本.

$$-\frac{(100\phi_2)^7}{\frac{4(100)^3}{166650}\cdot\frac{1666650\times16(100)^2}{333000030}\times\frac{333000030\times16(100)^2}{316350028500}\phi_1^6}+\cdots\cdots,$$

$$=(100\,\phi_2)-\frac{(100\phi_2)^3}{24{,}0024\,\phi_1^2}+\frac{(100\,\phi_2)^5}{24{,}0024\times80{,}07\,\phi_1^4}-\frac{(100\,\phi_2)^7}{24{,}0024\times80{,}07\times168{,}842\,\phi_1^6}$$

$$+\frac{(100\,\phi_2)^9}{2{,}40024\times80{,}07\times168{,}42\times28941\phi_1^8}$$

$$-\frac{(100\,\phi_2)^{11}}{24{,}0029\times80{,}07\times168{,}42\times289{,}41\times443{,}59\,\phi_1^{10}}+\cdots\cdots.$$

$$BJ=(1000\,\phi_2)-\frac{(1000\,\phi_2)^3}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\phi_1^2}+\frac{(1000\,\phi_2)^5}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\cdot\frac{166666500\times16(1000)^2}{33333000000300}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^7}{\frac{4(1000)^3}{166666500}\cdot\frac{166666500\times16(1000)^2}{33333000000300}\times\frac{33333000000300\times16(1000)^2}{3174492064314285000}\phi_1^6}+\cdots\cdots;$$

$$=(1000\,\phi_2)-\frac{(1000\,\phi_2)^3}{24{,}000024\,\phi_1^2}+\frac{(1000\,\phi_2)^5}{24{,}000024\times 80{,}0007\,\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^7}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\phi_1^6}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^9}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\times 288{,}014\;\phi_1^8}$$

$$-\frac{(1000\phi_2)^{11}}{24{,}000024\times 80{,}0007\times 168{,}0042\times 288{,}014\times 440{,}035\phi_1^{10}}+\cdots\cdots.$$

$$BK=(10000\,\phi_2)-\frac{(10000\,\phi_2)^3}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\phi_1^2}+\frac{(10000\,\phi_2)^5}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{333333330000000003000}\phi_1^4}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^7}{\frac{4(10000)^3}{166666665000}\cdot\frac{166666665000\times 16(10000)^2}{333333330000000003000}\times\frac{333333330000000003000\times 16(10000)^2}{317460206349214571428500000}\phi_1^6}$$

$$+\cdots\cdots;$$

$$BK=(10000\ \phi_2)-\frac{(10000\ \phi_2)^3}{24,00000024\ \phi_1^2}+\frac{(100000\ \phi_2)^5}{24,00000024\times 80,000007\ \phi_1^4}$$

$$-\frac{(10000\ \phi_2)^7}{24,00000024\times 80,000007\times 168,000042\ \phi_1^6}$$

$$+\frac{(100000\ \phi_2)^9}{24,00000024\times 80,000007\times 168,000042\times 288,00014\ \phi_1^8}$$

$$-\frac{(100000\ \phi_2)^{11}}{24,00000024\times 80,000007\times 168,000042\times 288,00014\times 440,00035\ \phi_1^{10}}$$

$$+\frac{(100000\phi_2)^{13}}{24,00000024\times 80,000007\times 168,000042\times 288,00014\times 440,00035\times 624,00075\phi_1^{12}}$$

$$-\frac{(100000\phi_2)^{15}}{24,00000024\times 80,000007\times 168,000042\times 288,00014\times 440,00035\times 624,00075\times 840,0014\phi_1^{14}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots.$$

今比較 BI, BJ, BK 各項分母奇零之差,逼弧愈近則愈微.

例如 BI, BJ, BK 第二項分母逐次爲 24,0024, 24,000024, 24,00000024 是也.

若徑以(全)弧背爲二率(卽 $2a=1000\cdots\cdots000\ \phi_2$)則奇零必盡,而分母爲 24,80,168,288,624,840 等整數.

此時之通弦$=c$, 而 $r=\phi_1$, 則得

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{24\,r^2}+\frac{(2a)^5}{24\times80\,r^4}-\frac{(2a)^7}{24\times80\times168\,r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{24\times80\times168\times288\,r^8}$$

$$-\frac{(2a)^{11}}{24\times80\times168\times288\times440\,r^{10}}$$

$$+\frac{(2a)^{13}}{24\times80\times168\times288\times440\times624\,r^{12}}$$

$$-\frac{(2a)^{15}}{24\times80\times168\times288\times440\times624\times840\,r^{14}}$$

$$+\cdots\cdots;$$

$$=2a-\frac{(2a)^3}{4\times6\,r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\times6\times20\,r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\times6\times20\times42\,r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{4^4\times6\times20\times42\times72\,r^8}$$

$$-\frac{(2a)^{11}}{4^5\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\,r^{10}}$$

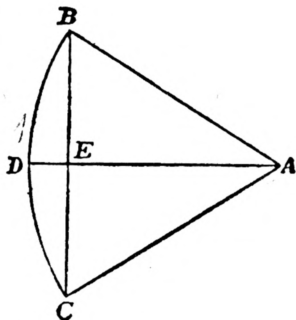
$$+\frac{(2a)^{13}}{4^6\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156\,r^{12}}$$

$$-\frac{(2a)^{15}}{4^7\times 6\times 20\times 42\times 72\times 110\times 156\times 210\,r^{14}}+\cdots\cdots.$$

故 $c=2a-\frac{(2a)^3}{4\cdot\underline{|3}\;r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^6}+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot\underline{|9}\cdot r^8}$

$-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot\underline{|11}\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\underline{|13}\cdot r^{12}}$

$-\frac{(2a)^{15}}{4^7\cdot\underline{|15}\cdot r^{14}}+\cdots\cdots.$(IV)



第二十四圖

設以 $BD=a$ 爲(半)弧背, $BDC=2a$ 爲(全)弧背, $BD=c$ 爲通弦, $AB=r$ 爲半徑,而 d 爲全徑. 又 $DE=$(全)弧背 $(2a)$ 之矢. 又爲半弧背(a)之正矢,則

$$c=\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n-1}}{4^{n-1}\,r^{2(n-1)}(2n-1)!}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

III. 通弦求弧背率數法解.[15]

(15) 以下見割圜密率捷法卷三,"法解上,"第 59-71 頁道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

已知弧背求通弦率數法,再由通弦求弧背率數法,李善蘭稱爲"級數回求,"徐有壬稱爲"還原術,"其法如下:

蓋因 $\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}$, $\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_6=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_4}{\phi_1}$,

$\phi'_8=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_6}{\phi_1}$, $\phi'_{10}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_8}{\phi_1}$, $\phi'_{12}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{10}}{\phi_1}$,

$\phi'_{14}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{12}}{\phi_1}$, $\phi'_{16}=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_{14}}{\phi_1}$ 之關係,

令 $$\phi'_2=c=2a-\frac{(2a)^3}{4\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{(2a)^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(2a)^9}{4^4\cdot\lfloor 9\cdot r^8}-\frac{(2a)^{11}}{4^5\cdot\lfloor 11\cdot r^{10}}+\frac{(2a)^{13}}{4^6\cdot\lfloor 13\cdot r^{12}}.$$

$$\phi_3'=\frac{(2a)^2}{r}-2\frac{(2a)^4}{4\lfloor 3\cdot r^3}+5\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^6}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^5}-16\cdot\frac{(2a)^8}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^7}$$

$$+51\frac{1}{5}\cdot\frac{(2a)^{10}}{4^4\lfloor 9\cdot r^9}-170\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{12}}{4^5\lfloor 11\cdot r^{11}}$$

$$+585\frac{1}{7}\cdot\frac{(2a)^{14}}{4^7\lfloor 13\cdot r^{13}}.$$

$$\phi'_4=\frac{(2a)^3}{r^2}-3\frac{(2a)^5}{4\lfloor 3\cdot r^4}+13\frac{(2a)^7}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^6}-68\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^8}$$

$$+402\frac{3}{5}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^4\underline{|9}\cdot r^{10}}-2555\frac{(2a)^{13}}{4^5\underline{|11}\cdot r^{12}}$$

$$+17082\frac{1}{35}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^6\underline{|13}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_6=\frac{(2a)^5}{r^4}-5\frac{(2a)^7}{4\underline{|3}\cdot r^6}+38\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^9}{4^2\underline{|5}\cdot r^8}$$

$$-378\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{11}}{4^3\underline{|7}\cdot r^{10}}+4417\frac{(2a)^{13}}{4^4\underline{|9}\cdot r^{12}}$$

$$-58085\frac{(2a)^{15}}{4^5\cdot\underline{|11}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_8=\frac{(2a)^7}{r^6}-7\frac{(2a)^9}{4\underline{|3}\cdot r^8}+77\frac{(2a)^{11}}{4^2\underline{|5}\cdot r^{10}}$$

$$-1117\frac{2}{3}\cdot\frac{(2a)^{13}}{4^3\underline{|7}\cdot r^{12}}+19600\frac{1}{5}\frac{(2a)^{15}}{4^4\underline{|9}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{10}=\frac{(2a)^9}{r^8}-9\frac{(2a)^{11}}{4\underline{|3}\cdot r^{10}}+129\frac{(2a)^{13}}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^{12}}$$

$$-2473\frac{(2a)^{15}}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{12}=\frac{(2a)^{11}}{r^{10}}-11\frac{(2a)^{13}}{4\underline{|3}\cdot r^{12}}+194\frac{1}{3}\cdot\frac{(2a)^{15}}{4^2\underline{|5}\cdot r^{14}}$$

$$\phi'_{14}=\frac{(2a)^{13}}{r^{12}}-13\frac{(2a)^{15}}{4\underline{|3}\cdot r^{14}}.$$

$$\phi'_{16}=\frac{(2a)^{15}}{r^{14}}.$$

故

$$\phi'_2+\frac{\phi'_4}{4\lfloor 3}+\frac{9\phi'_6}{4^2\lfloor 5}+\frac{9\cdot 25\phi'_8}{4^3\lfloor 7}+\frac{9\cdot 25\cdot 49\phi'_{10}}{4^4\lfloor 9}$$

$$+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\phi'_{12}}{4^5\lfloor 11}+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\cdot 121\phi'_{14}}{4^6\lfloor 13}$$

$$+\frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81\cdot 121\cdot 169\phi'_{16}}{4^7\lfloor 15}=2a.$$

卽

$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot c^9}{4^4\cdot\lfloor 9\cdot r^8}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot c^{11}}{4^5\lfloor 11\cdot r^{10}}+\cdots\cdots;$$

或

$$2a=\sum_1^{\infty}\frac{1^2\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!}c^{2n-1},\qquad\text{(VI)}.$$

IV°. 弧背正弦相求法解.(16)

因 $\sin a=\frac{c}{2}$, 故(IV)式可化爲

$$\sin a=a-\frac{a^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{a^5}{\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{a^7}{\lfloor 7\cdot r^6}+\frac{a^9}{\lfloor 9\cdot r^8}-\frac{a^{11}}{\lfloor 11\cdot r^{10}}$$

$$+\frac{a^{13}}{\lfloor 13\cdot r^{12}}-\frac{a^{15}}{\lfloor 15\cdot r^{14}}+\cdots\cdots;$$

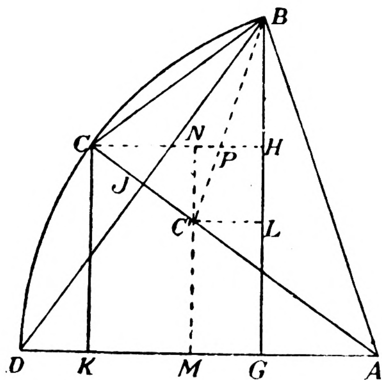
(16) 以下見割圜密率捷法卷三,"法解上,"第 71-73 頁.

或 $\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}$. (II).

V°. 分弧正矢率數,求全弧正矢率數法解.[17]

分弧正矢,求全弧正矢,卽弧背求正矢率數所自起.其法先以幾何法證 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, 10000 弧之正矢,如下 a°, b°, c°, d°, e°, f°, g°, h° 所示:

a°. $\frac{1}{2}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十五圖

以 A 爲圓心, AB 爲半徑,平分 BD 弧於 C. 聯 BC,

(17) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 1-23 頁.道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

BD, AC 各線.作 $BC'=BC$.

則$\triangle_s$ ABC, BCC' 爲連比例$\triangle_s$.

即 $$AB:BC=BC:CC'$$

或 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3$$

而 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 爲一,二,三率.

又自 B, C, C',作 AD 之直垂線 BG, CK, $NC'M$.

自 C, C' 作 AD 之平行線 $CNPH$, $C'L$.

則$\triangle_s$ ABC,BCC',$CC'P$, $2\cdot C'PN$ 爲連比例$\triangle_s$;$\triangle_s$ BCJ, $C'PN$ 爲相似形.

即 $$AB:CJ=CC':PN.$$

如圖 $$AB=\phi_1,\ BC=\phi_2,\ CC'=\phi_3,$$

$$CJ=DK=MG=\text{vers}\ a=\frac{\phi_3}{2},$$

$$CP=2\cdot\frac{\phi_3}{2},\ C'P=\phi_4,\ PN=\frac{\phi_5}{2}.$$

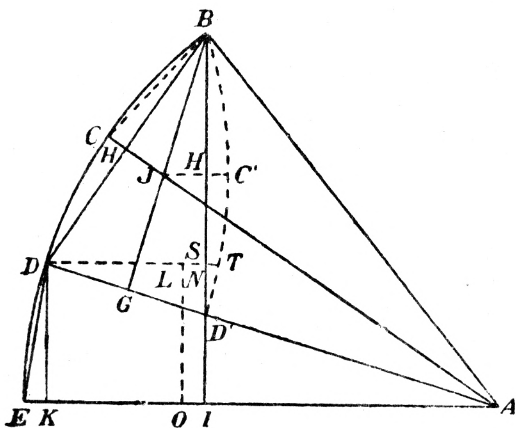
故 $$AB:CJ=CC':PN$$

可書爲 $$\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=2\cdot\frac{\phi_3}{2}:\frac{\phi_5}{2}.$$

$$\begin{aligned}\text{vers}\ 2a&=DG\\&=(CP-PN)+(DK+MG)\end{aligned}$$

$$=\left(2\cdot\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}\right)+2\cdot\frac{\phi_3}{2}=4\frac{\phi_3}{2}-2\frac{\phi_5}{2^2}.$$

b°. $\frac{1}{3}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十六圖

以A為圓心,AB為半徑,BC, CD, DE為$\frac{1}{3}$弧 $=a$.

BCD為$\frac{2}{3}$弧,$BCDE$為$\frac{3}{3}$弧.

又 $CH,\ EK=\text{vers}\ a,$

$$DG=\text{vers}\ 2a$$

$$EI=\text{vers}\ 3a$$

試以BJG爲軸,將$BCDG$面右展爲$BC'D'G$. 作$LN=CH$,

則 $CH=C'H'=EK=LN=\text{vers}\,a,\ D'G=\text{vers}\,2a,\cdots\cdots$

而$\triangle_s\,ADE, DD'T$幾爲相似, $DD'\fallingdotseq DT$. (按此兩$\triangle_s$雖非絕對相似,而所差已至微細).

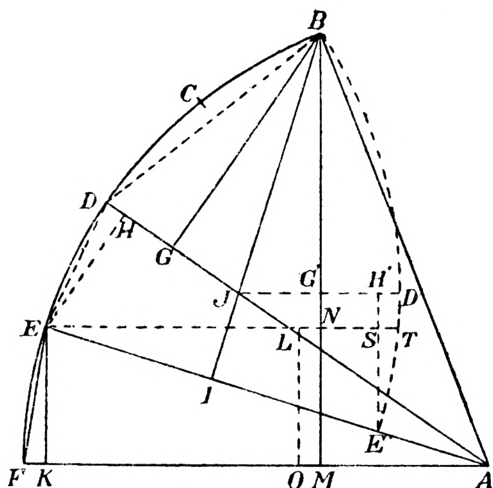
如圖因前例,令 $AB=\phi_1,\ DD'=8\dfrac{\phi_3}{2}-4\dfrac{\phi_5}{2^2}$.

又因 $AD:EK=DD':ST$,

即 $$\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=\left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right):ST.$$

則 $$\begin{aligned}\text{vers}\,3a&=EI\\&=(DD'-ST-C'H')+(EK+LN)\\&=\left\{\left(8\frac{\phi_3}{2}-4\frac{\phi_5}{2^2}\right)-\left(8\frac{\phi_5}{2^2}-4\frac{\phi_7}{2^3}\right)-\frac{\phi_3}{2}\right\}\\&\qquad+2\frac{\phi_3}{2}.\\&=9\frac{\phi_3}{2}-12\frac{\phi_5}{2^2}+4\frac{\phi_7}{2^3}.\end{aligned}$$

c. $\dfrac{1}{4}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數



第二十七圖

以 A 爲圜心, AB 爲半徑; BC, CD, DE, EF 爲 $\frac{1}{4}$ 弧 $=a$, BCD 爲 $\frac{2}{4}$ 弧 $=2a$, $BCDE$ 爲 $\frac{3}{4}$ 弧 $=3a$, $BCDEF$ 爲 $\frac{4}{4}$ 弧 $=4a$.

試以 BJI 爲軸,將 $BCDEI$ 面右展爲 $BD'E'I$.

而 $\triangle_s$ $AEF, EE'T$ 幾爲相似. $EE' \fallingdotseq ET$.

如圖因前例,令 $AB=\phi_1$, 作 $LN=DH$.

$$EE'=18\frac{\phi_3}{2}-24\frac{\phi_5}{2^2}+8\frac{\phi_7}{2^3}$$

又因　$AE : FK = EE' : ST$,

即 $\phi_1 : \frac{\phi_3}{2} = \left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) : ST.$

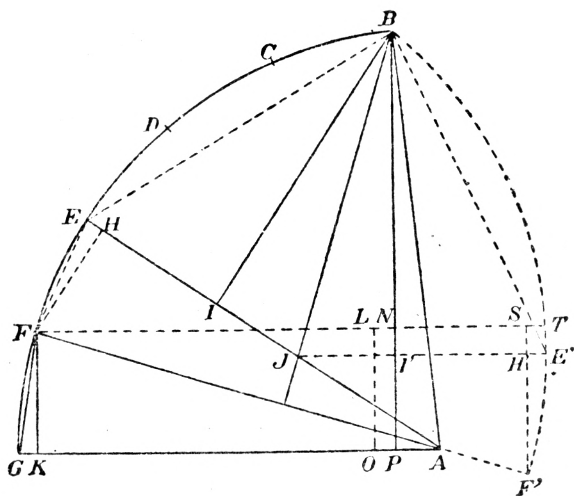
則 $\text{vers } 4\alpha = FM$

$$= (EE' - ST - D'G') + (FK + LN)$$

$$= \left\{\left(18\frac{\phi_3}{2} - 24\frac{\phi_5}{2^2} + 8\frac{\phi_7}{2^3}\right) - \left(18\frac{\phi_5}{2^2} - 24\frac{\phi_7}{2^3} + 8\frac{\phi_9}{2^4}\right) - \left(4\frac{\phi_3}{2} - 2\frac{\phi_5}{2^2}\right)\right\} + 2\frac{\phi_3}{2}.$$

$$= 16\frac{\phi_3}{2} - 40\frac{\phi_5}{2^2} + 32\frac{\phi_7}{2^3} - 8\frac{\phi_9}{2^4}.$$

$d°$. $\frac{1}{5}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.



第二十八圖

如圖因前例△，AFG, $FF'T$ 幾爲相似，$FF' \fallingdotseq FT$.

令 $AB=\phi_1$, 作 $LN=EH$.

$$FF'=32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}.$$

又因 $$AF:GK=FF':ST.$$

卽 $$\phi_1:\frac{\phi_3}{2}=\left(32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}\right):ST.$$

則 $$\text{vers } 5a=GP$$

$$=(FF'-ST-E'I')+(GK+LN)$$

$$=\left\{\left(32\frac{\phi_3}{2}-80\frac{\phi_5}{2^2}+64\frac{\phi_7}{2^3}-16\frac{\phi_9}{2^4}\right)\right.$$

$$-\left(32\frac{\phi_5}{2^2}-80\frac{\phi_7}{2^3}+64\frac{\phi_9}{2^4}-16\frac{\phi_{11}}{2^5}\right)$$

$$\left.-\left(9\frac{\phi_3}{2}-12\frac{\phi_5}{2^2}+4\frac{\phi_7}{2^3}\right)\right\}+2\frac{\phi_3}{2}$$

$$=25\frac{\phi_3}{2}-100\frac{\phi_5}{2^2}+140\frac{\phi_7}{2^3}-80\frac{\phi_9}{2^4}+16\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

e. $\frac{1}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$ 分弧正矢率數，求全弧正矢率數.

如前有 $\frac{1}{10}$ 分弧通弦，求全弧通弦之例.

令 $AB=\phi_1=\phi'_1$.

$$\frac{\phi'_3}{2}=25\frac{\phi_3}{2}-100\frac{\phi_5}{2^2}+140\frac{\phi_7}{2^3}-80\frac{\phi_9}{2^4}+16\frac{\phi_{11}}{2^5}.$$

$$\frac{\phi'_5}{2^2}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{2^2\,\phi_1}=625\frac{\phi_5}{2^2}-5000\frac{\phi_7}{2^3}+17000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-32000\frac{\phi_{11}}{2^5}+36400\frac{\phi_{13}}{2^6}-25600\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+10880\frac{\phi_{17}}{2^9}.$$

但由 $a°$ 知 $\text{vers}\,10a=\text{vers}\,2(5a)$

$$=4\frac{\phi'_3}{2}-2\frac{\phi'_5}{2^2}$$

$$=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

f. $\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ 分弧正矢率數,求全弧正矢率數.

如前例有 $\frac{1}{10}$ 分弧通弦,求全弧通弦之例.

命 $AB=\phi_1=\phi'_1$.

$$\frac{\phi'_3}{2}=100\frac{\phi_3}{2}-1650\frac{\phi_5}{2^2}+10560\frac{\phi_7}{2^3}-34320\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi_{15}}{2^7}-21760\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_5}{2^2}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{2^2\phi_1}=10000\frac{\phi_5}{2^2}-330000\frac{\phi_7}{2^3}+4834500\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$-41712000\frac{\phi_{11}}{2^5}+237582400\frac{\phi_{13}}{2^6}-950809600\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+2781374080\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_7}{2^3}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{2^3\phi_1}=1000000\frac{\phi_7}{2^3}-49500000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+1133550000\frac{\phi_{11}}{2^5}-15976125000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-155601600000\frac{\phi_{15}}{2^7}+1115359800000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_9}{2^4}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{2^4\phi_1}=100000000\frac{\phi_9}{2^4}-1600000000\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-205590000000\frac{\phi_{13}}{2^6}-4025010000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$+55653958250000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{11}}{2^5}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{2^5\phi_1}=10000000000\frac{\phi_{11}}{2^5}-825000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+325050000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}-814852500000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{13}}{2^6}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{2^6\phi_1}=1000000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$-99000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}+4717350000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{15}}{2^7}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{2^7\phi_1}=100000000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-11550000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{17}}{2^8}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{2^8\phi_1}=10000000000000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

由 e° 知 $\text{vers}\,100\,a=\text{vers}\,10(10\,a)$

$$=100\frac{\phi'_3}{2}-1650\frac{\phi'_5}{2^2}+10560\frac{\phi'_7}{2^3}-34320\frac{\phi'_9}{2^4}$$

$$+64064\frac{\phi'_{11}}{2^5}-72800\frac{\phi'_{13}}{2^6}+51200\frac{\phi'_{15}}{2^7}$$

$$-21760\frac{\phi'_{17}}{2^8}.$$

$$=10000\frac{\phi_3}{2}-1666500\frac{\phi_5}{2^2}+1110555600\frac{\phi_7}{2^2}$$

$$-396270035700\frac{\phi_9}{2^4}+87919111920640\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-1328777486982 40000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+14549383384936960000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-1206507617195897408000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

g°. $\frac{1}{1000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{100}$ 分弧正矢率數，求全弧正矢率數.

如前例:

vers 1000 α

$$=1000000\frac{\phi_3}{2}-166666500000\frac{\phi_5}{2^2}$$

$$+11111055555600000\frac{\phi_7}{2^3}.$$

$$-396819741292857000000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+88180776031927174786 40000\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-1336038962405793857919240000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+14681218296737881860883020960000009\frac{\phi_{15}}{2^7}.$$

$$-122337490975344514205598647433108000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

h°. $\frac{1}{10000}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1000}$分弧正矢率數,求全弧正矢率數.

如前例

$$\text{vers}\,10000\,a=100000000\frac{\phi_3}{2}-1666666650000000\frac{\phi_5}{2^2}+11111110555555560000000\frac{\phi_7}{2^3}$$

$$-39682534126984321428570000000\frac{\phi_9}{2^4}$$

$$+8818339505547462814906349206400000 0\frac{\phi_{11}}{2^5}$$

$$-1336111712361843884661684103001924000000000\frac{\phi_{13}}{2^6}$$

$$+1468254100397398456653611780126869142096000000000\frac{\phi_{15}}{2^7}$$

$$-1222354448412740771844309895754387591790510031080000000\frac{\phi_{17}}{2^8}.$$

VI. 弧背求正矢率數法解.[18]

在前 $f°, g°, h°$ 所得百分全弧正矢率數 vers 100 a, 千分全弧正矢率數 vers 1000 a, 萬分全弧正矢率數 vers 10000 a, 可如前 II° "弧背求通弦率法解" 之例,比例相較,得"弧背求正矢率數,"以其間幷有共同之性質也.又因

$$\phi_3 = \frac{\phi_2^2}{\phi_1}, \quad \phi_5 = \frac{\phi_2^4}{\phi_1^3},$$

$$\phi_7 = \frac{\phi_2^6}{\phi_1^5}, \quad \phi_9 = \frac{\phi_2^8}{\phi_1^7}$$

$$\phi_{11} = \frac{\phi_2^{10}}{\phi_1^9}, \quad \cdots\cdots, \quad \phi_{17} = \frac{\phi_2^{16}}{\phi_1^{15}},$$

$$\text{vers } 100\, a = \frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1} - \frac{(100\,\phi_2)^4}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\phi_1^3}$$

$$+ \frac{(100\,\phi_2)^6}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times 16665000\times(100)^2}{11105556000}\phi_1^5}$$

---

(18) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 23-31 頁, 道光己亥(1839)孟秋石梁岑氏校刊.

$$-\frac{(100\phi_2)^8}{2\cdot\frac{2(100)^4}{16665000}\cdot\frac{2\times16665000\times(100)^2}{11105556000}\cdot\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{3962700357000}\phi_1^7}$$

$$+\frac{(100\phi_2)^{10}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times11105556000\times(100)^2}{2662700357000}\cdot\frac{2\times3962700357000\times(100)^2}{779191119206400}\phi_1^9}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{12}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times3963700057000\times(100)^2}{879191119206400}\cdot\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{1328777486982404 0}\phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(100\phi_2)^{14}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times879191119206400\times(100)^2}{1328777486982400 0}\cdot\frac{2\times1328777486982400 0\times(100)^2}{14549383384936960000}\phi_1^{13}}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{16}}{2\cdot\frac{2(100)^4}{166650000}\cdots\cdots\frac{2\times1328777486982400 0\times(100)^2}{14549383384936960000}\cdot\frac{2\times14549383384936960000\times(100)^2}{1206576171958974108000}\phi_1^{15}}$$

卽 vers 100 a

$$=\frac{(100\phi_2)^2}{2\phi_1}-\frac{(100\phi_2)^4}{2\times 12.0012\phi_1^3}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^6}{2\times 12.0012\times 300.12\ \phi_1^5}$$

$$-\frac{(100\ \phi_2)^8}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\ \phi_1^7}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^{10}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\phi_1^9}$$

$$-\frac{(100\phi_2)^{12}}{2\times 12.0012\times 30.012\times 56.05\times 90.14\times 132.33\ \phi_1^{11}}$$

$$+\frac{(100\ \phi_2)^{14}}{2\times 12.0012\times \cdots\cdots\times 132.33\times 182.65\ \phi_1^{13}}$$

$$-\frac{(100\ \phi_2)^{16}}{2\times 12.0012\times \cdots\cdots\times 182.65\times 241.1\phi_1^{15}}.$$

同理, vers 1000 a

$$=\frac{(1000\ \phi_2)^2}{2\ \phi_1}-\frac{(1000\ \phi_2)^4}{2\times 12.000012\ \phi_1^3}$$

$$+\frac{(1000\ \phi_2)^6}{2\times 12.000012\times 30.00012\ \phi_1^5}$$

$$-\frac{(10000\ \phi_2)^8}{2\times 12.000012\times 30.00012\times 56.0005\ \phi_1^7}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^{10}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 56.0005\times 90.0014\,\phi_1{}^9}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{12}}{2\times 12.0012\times\quad\times 90.0014\times 132.0033\,\phi_1{}^{11}}$$

$$+\frac{(1000\,\phi_2)^{14}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 132.0033\times 182.0065\phi_1{}^{13}}$$

$$-\frac{(1000\,\phi_2)^{16}}{2\times 12.0012\times\cdots\cdots\times 182.0065\times 240.011\,\phi_1{}^{15}}$$

vers 10000 α

$$=\frac{(10000\phi_2)^2}{2\,\phi_1}-\frac{(10000\,\phi_2)^4}{2\times 12.00000012\,\phi_1{}^3}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^6}{2\times 12.00000012\times 30.0000012\,\phi_1{}^5}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^8}{2\times 12.00000012\times 30.00000\times 56.000005\,\phi_1{}^7}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^{10}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 56.000005\times 90.000014\,\phi_1{}^9}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{12}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 90.000014\times 132.000033\,\phi_1{}^{11}}$$

$$+\frac{(10000\,\phi_2)^{14}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 132.000033\times 182.000065\,\phi_1{}^{13}}$$

$$-\frac{(10000\,\phi_2)^{16}}{2\times 12.00000012\times\cdots\cdots\times 182.000065\times 240.00011\,\phi_1{}^{15}}$$

若以半弧背 $a=100\cdots\cdots00\,a=100\cdots\cdots00\,\phi_2$,

全弧背 $2a=2\times100\cdots\cdots00\,\phi_2$

則 $$\operatorname{vers} a=\frac{a^2}{2r}-\frac{a^4}{2\times12\,r^3}+\frac{a^6}{2\times12\times30\,r^5}$$

$$-\frac{a^8}{2\times12\times30\times56\,r^7}+\frac{a^{10}}{2\times12\times30\times56\times90\,r^9}$$

$$-\frac{a^{12}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\,r^{11}}$$

$$+\frac{a^{14}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\,r^{13}}$$

$$-\frac{a^{16}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\times240\,r^{15}}$$

$$=\frac{a^2}{\underline{|2}\cdot r}-\frac{a^4}{\underline{|4}\cdot r^3}+\frac{a^6}{\underline{|6}\cdot r^5}-\frac{a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}+\frac{a^{10}}{\underline{|10}\cdot r^9}$$

$$-\frac{a^{12}}{\underline{|12}\cdot r^{11}}+\frac{a^{14}}{\underline{|14}\cdot r^{13}}-\frac{a^{16}}{\underline{|16}\cdot r^{15}}.$$

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!} \qquad \text{(III)}.$$

VII. 正矢求弧背法解.[19]

此與"通弦求弧背法解"同爲級數迴求法.

(19) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 31-37 頁. 道光己亥(1839)孟秋,石梁岑氏校刊.

因 $\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}$, $\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}$, $\phi'_9=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{\phi_1}$, $\phi'_{11}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{\phi_1}$

$\phi'_{13}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{11}}{\phi_1}$, $\phi'_{15}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{13}}{\phi_1}$, $\phi'_{17}=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_{15}}{\phi_1}$ 之關

係,及

$$\text{vers}\,\alpha=\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\times12}+\frac{\phi_7}{2\times12\times30}-\frac{\phi_9}{2\times12\times30\times56}$$

$$+\frac{\phi_{11}}{2\times12\times30\times56\times90}$$

$$-\frac{\phi_{13}}{2\times12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+\frac{\phi_{15}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$-\frac{\phi_{17}}{2\times12\times30\times56\times90\times132\times182\times240};$$

$$2\,\text{vers}\,\alpha=\phi_3-\frac{\phi_5}{12}+\frac{\phi_7}{12\times30}-\frac{\phi_9}{12\times30\times56}$$

$$+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90}-\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}$$

令 $\phi'_3=2\text{ vers }\alpha=\phi_3-\frac{\phi_5}{12}+\frac{\phi_7}{12\times30}-\frac{\phi_9}{12\times30\times56}$

$$+\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56\times90}-\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$-\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240},$$

$$\phi'_5=\phi_5-2\frac{\phi_7}{12}+4\frac{1}{2}\frac{\phi_9}{12\times30}-11\frac{1}{3}\frac{\phi_{11}}{12\times30\times56}$$

$$+31\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56\times90}-90\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+273\frac{1}{20}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182},$$

$$\phi'_7=\phi_7-3\frac{\phi_9}{12}+10\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{11}}{12\times30}-42\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{13}}{12\times30\times56}$$

$$+195\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56\times90}$$

$$-976\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90\times132},$$

$$\phi'_9=\phi_9-4\frac{\phi_{11}}{12}+19\frac{\phi_{13}}{12\times30}-106\frac{2}{3}\cdot\frac{\phi_{15}}{12\times30\times56}$$

$$+685\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56\times90},$$

$$\phi'_{11}=\phi_{11}-5\frac{\phi_{13}}{12}+30\frac{\phi_{15}}{12\times30}-215\frac{\phi_{17}}{12\times30\times56},$$

$$\phi'_{13}=\phi_{13}-6\frac{\phi_{15}}{12}+43\frac{1}{2}\cdot\frac{\phi_{17}}{12\times30},$$

$$\phi'_{15}=\phi_{15}-7\frac{\phi_{17}}{12},$$

$$\phi'_{17}=\phi_{17}.$$

故 $$\phi'_3+\frac{\phi'_5}{12}+4\frac{\phi'_7}{12\times30}+36\frac{\phi'_9}{12\times30\times56}$$

$$+576\frac{\phi'_{11}}{12\times30\times56\times90}$$

$$+14400\frac{\phi'_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+518400\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+25401600\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}$$

$$=\phi_3.$$

或 $$\frac{a^2}{r}=\phi_3'+1^2\frac{\phi'_5}{12}+2^2\frac{\phi'_7}{12\times30}+2^2\cdot3^2\frac{\phi'_9}{12\times30\times56}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\frac{\phi'_{11}}{12\times30\times56\times90}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\frac{\phi'_{13}}{12\times30\times56\times90\times132}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot\frac{\phi'_{15}}{12\times30\times56\times90\times132\times182}$$

$$+2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2\cdot7^2\cdot\frac{\phi'_{17}}{12\times30\times56\times90\times132\times182\times240}.$$

即 $$a^2=r\left\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\,r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\,r^2}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}\right\}+\cdots\cdots,$$

或 $$a^2=2r\sum_1^\infty\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-2)^2}{r^{n-1}(2n)!}. \qquad \text{(VIII)}$$

VIII°. 弧背矢相求法解.[20]

因 $$a^n=\frac{(2a)^{2n}}{2^{2n}}=\frac{(2a)^{2n}}{4^n}.$$

故(III)式可化爲

$$\text{vers }a=\frac{(2a)^2}{4\lfloor 2\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\lfloor 6\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^5\cdot\lfloor 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

(20) 以下見割圜密率捷法卷四,"法解下,"第 37-38 頁.

或 $$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^{n}\cdot r^{2n-1}(2n)!}.\qquad \text{(V)}$$

15. 孔廣森之少廣正負術

孔廣森 (1752-1786) 顨軒孔氏所著書五十五少廣正負術外篇上稱: "密弧求法,宣城御史大夫梅公書中嘗載焉.至其弧背弦矢互求,亦各有乘除之法,世則罕有傳者,廣森幸得聞之於靈臺郎陳君際新."

弦求弧背

$$2a=\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot3^2\cdot\cdots\cdots(2n-5)^2(2n-3)^2}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}\cdot(2n-1)!}c^{2n-1},\qquad \text{(VI)}$$

矢求弧背

$$a^2=2r\sum_{1}^{\infty}\frac{1^2\cdot1^2\cdot2^2\cdots\cdots(n-2)^2(n-1)^2}{r^{n-1}(2n)!}(2\operatorname{vers} a)^n,\qquad \text{(VIII)}$$

弧背求矢

$$\operatorname{vers} a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n}}{r^{2n-1}(2n)!}\qquad \text{(III)}$$

弧背求弦

$$\sin a=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{2n-1}}{r^{2(n-1)}(2n-1)!}.\qquad \text{(II)}$$

徐有壬 (1800-1860) 測圓密率卷二,引作"正弦求弧背"(VII),"正矢求弧背"(VIII),"弧背求正矢"(III),"弧背求正弦"(II).

16. 董祐誠之割圜連比例圖解

董祐誠(字方立,陽湖人,1791-1823)於嘉慶二十四年(1819)撰割圜連比例圖解三卷,其卷上冠以杜氏九術,幷立"以弦求弦","以矢求矢",四則,卽:

(1)有通弦求通弧加倍幾分之通弦,[凡弦之倍分,皆取奇數],

$$c_m = mc - \frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\lfloor 3 \cdot r^2} + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2 \cdot \lfloor 5 \cdot r^4} - \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3 \cdot \lfloor 7 \cdot r^6} + \cdots, \quad \text{(X)}$$

(2)有矢求通弧加倍幾分之矢,[凡矢之倍分,奇耦通用],

$$\text{vers}\, m\,a = m^2(\text{vers}\, a) - \frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers}\, a)^2}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r} + \frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers}\, a)^3}{4^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot r^2} - \cdots, \quad \text{(XI)}.$$

(3)有通弦求幾分通弧之一通弦,[此亦取奇數],

$$c_{\frac{1}{m}} = \frac{c}{m} + \frac{(m^2-1)c^3}{4\lfloor 3 \cdot m^3 r^2} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2 \cdot \lfloor 5 \cdot m^5 \cdot r^4} + \frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3 \cdot \lfloor 7 \cdot m^7 \cdot r^6} + \cdots, \quad \text{(X)}a.$$

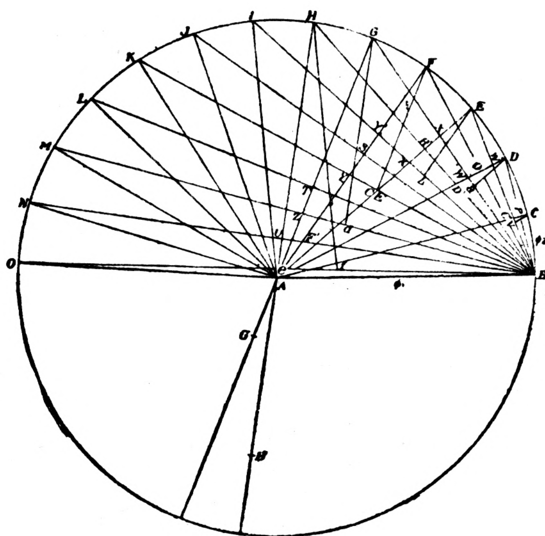
(4)有矢求幾分通弧之一矢,[此亦奇耦通用],

$$\operatorname{vers}\frac{1}{m}a=\frac{(\operatorname{vers} a)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4m^2-4)2^2(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots,$$

(XI)a.

董氏幷稱此四術爲立法之原,杜氏九術,由此推衍而歸於簡易.



第二十九圖

如圖 $AB=r=\phi_1$

BC 弧爲一分弧,其弦 BC,$(c_1=\phi_2)$;

BD 弧爲二分弧,其矢 CP, $(\text{vers}\,a=CP)$;

倍矢 CC', $(b_1=2\,\text{vers}\,a=CC')$;

BE 弧爲三分弧,其弦 BE, $(c_3=BE)$;

BF 弧爲四分弧,其矢 DQ, $(\text{vers}\;2\;a=DQ)$;

倍矢 DD',$(b_2=2\,\text{vers}\,a\;=DD')$;

BG 弧爲五分弧,其弦 BG,$(c_5=BG)$;

BH 弧爲六分弧,其矢 ER,$(\text{vers}\,3\,a=ER)$;

倍矢 EE',$(b_3=2\,\text{vers}\,a=EE')$;

BI 弧爲七分弧,其弦 BI,$(c_7=BI)$,

BJ 弧爲八分弧,其矢 FS,$(\text{vers}\,4a=FS)$;

倍矢 FF',$(b_4=2\,\text{vers}\,a=FF')$;

BK 爲九分弧,其弦 BK,$(c_9=BK)$;

BL 爲十分弧,其矢 GT,$(\text{vers}\,5\,a=GT)$,

倍矢 GG',$(b_5=2\,\text{vers}\,5\,a=GG')$;

BM 爲十一分弧,其弦 BM,$(c_{11}=BM)$;

BN 爲十二分弧,其矢 HU,$(\text{vers}\,6\,a=HU)$,

倍矢 HH',$(b_6=2\,\text{vers}\,6\,a=HH')$;

BO 爲十三分弧,其弦 BO,$(c_{13}=BO)$;

因 $$AB=\phi_1,\ BC=\phi_2,\ CV//DA,$$

$$AB:BC=BC:CC'$$

即 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3,$$

而 $$CC'=\phi_3=2\text{ vers }a,\ \frac{CC'}{2}=\frac{\phi_3}{2}=\text{vers }a.$$

故一分弧之弦BC, $c_1=\phi_2$,

二分弧之倍矢CC', $b_1=\phi_3$

又 $$AB:BC=CC':CV,$$

即 $$\phi_1:\phi_2=\phi_3:\phi_4.$$

故三分弧之弦, $BE=2BC+(BC-C'V)$,

即 $c_3=2\{\phi_2\}+\{\phi_2-\phi_4\},=3\phi_2-\phi_4.$

又 $$BW'=BE-BC=2\phi_2-\phi_4,$$

$$AB:BC=BW':W'W.$$

即 $$\phi_1:\phi_2=(2\phi_2-\phi_4):W'W.$$

$$W'W=2\phi_3-\phi_5$$

$$W'Q=\frac{W'W}{2}=\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5.$$

$$DQ=WQ+DW'=W'Q+CC',$$

或 $$\text{vers }4a=2\phi_3-\frac{1}{2}\phi_5.$$

故四分弧之倍矢, $DD'=W'W+2CC'.$

即　　$$b_2=\{2\phi_3-\phi_5\}+2\{\phi_3\}=4\phi_3-\phi_5.$$

又　　$$AB : BC=DW : Wa,$$

即　　$$\phi_1 : \phi_2=(3\phi_3-\phi_5) : Wa.$$

$$Wa-3\phi_4-\phi_6,\ X'W'=\phi_2-3\phi_4+\phi_6,$$

$$2BQ=2BD=2\ (2\phi_2-\phi_4)=4\phi_2-2\phi_4;$$

故五分弧之弦，　$$BG=2BQ+X'W'.$$

即　　$$c_5=2\{2\phi_2-\phi_4\}+\{\phi_2-3\phi_4+\phi_6\}$$

$$=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6.$$

又　　$$BX'=BG-BW'=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

$$AB : BC=BX' : X'X.$$

即　　$$\phi_1 : \phi_2=(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6) : X'X.$$

$$X'X=3\phi_3-4\phi_5+\phi_7.$$

$$RX'=\frac{X'X}{2}=1\frac{1}{2}\phi_3-2\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7.$$

$$ER=RX'+EX'=RX'+DW.$$

或　　$$\text{vers}\ 6\alpha=4\frac{1}{2}\phi_3-3\phi_5+\frac{1}{2}\phi_7.$$

故六分弧之倍矢，　$$EE'=X'X+2DW.$$

即　　$$b_3=\{3\phi_3-4\phi_5+\phi_7\}+2\{3\phi_3-\phi_5\}$$

$$=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$$

又 $$EX=EE'-E'X=EE'-DW$$

$$=6\phi_3-5\phi_5+\phi_7.$$

$$AB:BC=EX:Xb.$$

$$\phi_1:\phi_2=(6\phi_3-5\phi_5+\phi_7):Xb.$$

$$Xb=6\phi_4-5\phi_6+\phi_8,$$

$$Y'X=EF-Xb=BC-Xb$$

$$=\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8.$$

故七分弧之弦, $BI=2BX+XY'$

即 $$c_7=2\{3\phi_2-4\phi_4+\phi_6\}+\{\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8\}$$

$$=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6.-\phi_8$$

又 $$BY'=BI-BX'=4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8.$$

$$AB:BC=BY':Y'Y.$$

$$\phi_1:\phi_2=(4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8):Y'Y.$$

$$Y'Y=4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9$$

故八分弧之倍矢, $FF'=Y'Y+2EX.$

即 $$b_4=\{4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9\}+2\{6\phi_3-5\phi_5+\phi_7\}$$

$$=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9.$$

....,

若按序列之,則因次之關係:

$1+1+1+1+\cdots\cdots+1,$

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n,$$

$$1+3+6+10+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}},$$

$$1+4+10+20+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}},$$

$$1+5+15+35+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\underline{|4}},$$

$$1+6+21+56+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{\underline{|5}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+(2n-1),$$

$$1+4+9+16+25+\cdots\cdots+\frac{n(2n)}{\underline{|2}},$$

$$1+5+14+30+55+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{\underline{|3}},$$

$$1+6+20+50+105+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{\underline{|4}},$$

$$1+7+27+77+182+378+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{\underline{|5}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故　一分弧之弦　$=\phi_2,$

　　三分弧之弦　$=2\{\phi_2\}+\{\phi_2-\phi_4\},$

五分弧之弦 $=2\{2\phi_2-\phi_4\}+\{\phi_2-3\phi_4+\phi_6\}$,

七分弧之弦 $=2\{3\phi_2-4\phi_4+\phi_6\}$

$+\{\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8\}$,

九分弧之弦 $=2\{4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8\}$

$+\{\phi_2-10\phi_4+15\phi_6-7\phi_8+\phi_{10}\}$,

十一分弧之弦 $=2\{5\phi_2-20\phi_4+21\phi_6-8\phi_8+\phi_{10}\}$

$+\phi_2-15\phi_4+35\phi_6-28\phi_8$

$+9\phi_{10}-\phi_{12}\}$,

十三分弧之弦 $=2\{6\phi_2-35\phi_4+56\phi_6-36\phi_8+10\phi_{10}$

$-\phi_{12}\}+\{\phi_2-21\phi_4+70\phi_6-84\phi_8$

$+45\phi_{10}-11\phi_{12}+\phi_{14}\}$,

十五分弧之弦 $=2\{7\phi_2-56\phi_4+126\phi_6-120\phi_8$

$+55\phi_{10}-12\phi_{12}+\phi_{14}\}+\{\phi_2-28\phi$

$+126\phi_6-210\phi_8+165\phi_{10}-66\phi_{12}$

$+13\phi_{14}-\phi_{16}\}$,

十七分弧之弦 $=2\{8\phi_2-84\phi_4+252\phi_6-330\phi_8$

$+220\phi_{10}-78\phi_{12}+14\phi_{14}-\phi_{16}\}$

$+\{\phi_2-36\phi_4+210\phi_6-462\phi_8$

$+495\phi_{10}-286\phi_{12}+91\phi_{14}$

$-15\phi_{16}+\phi_{18}\}$

時,同理可歸納得:

$(2n+1)$分弧之弦

$$=2\left\{n\phi_2-\frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 3}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\lfloor 5}\phi_6\right.$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{\lfloor 9}\phi_{10}$$

$$\left.-\cdots+(-1)^{n+1}\phi_{2n}\right\}$$

$$+\left\{\phi_2-\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\phi_4+\frac{n(n^2-1^2)(n+2)}{\lfloor 4}\phi_6\right.$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n+3)}{\lfloor 6}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n+4)}{\lfloor 8}\phi_{10}$$

$$\left.-\cdots+(-1)^n\phi_{2n+2}\right\},$$

或可書:

m分弧之弦,

$$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\lfloor 3}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\underline{|7}}\phi_8+\cdots,\quad(X)$$

或因　$c_1=\phi_2,$

$$c_3=3\phi_2-\phi_4,$$

$$c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$$

$$c_7=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8,$$

$$c_9=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10},$$

$$c_{11}=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}-\phi_{12},$$

$$c_{13}=13\phi_2-91\phi_4+182\phi_6-156\phi_8$$

$$+65\phi_{10}-13\phi_{12}+\phi_{14},$$

$$c_{15}=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8$$

$$+275\phi_{10}-90\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16},$$

$$c_{17}=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8$$

$$+935\phi_{10}-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}+\phi_{18}$$

……………………………… ………………

時,同理可歸納得:

$$c_{2n-1}=(2n-1)\phi_2-\frac{(n-1)n((2n-1)}{\underline{|3}}\phi_4$$

$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-1)}{\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(2n-1)}{\underline{|7}}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots,$$

或 $$c_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\underline{|3}}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\underline{|7}}\phi_8+\cdots\cdots,$$

或 $$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot\underline{|5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot\underline{|7}\cdot r^6}+\cdots,\quad (\text{X}).$$

同理，$b_1=\{\phi_3\}$,

$$b_2=\{2\phi_3-\phi_5\}+2\{\phi_3\},$$

$$b_3=\{3\phi_3-4\phi_5+\phi_7\}+2\{3\phi_3-\phi_5\},$$

$$b_4=\{4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9\}+2\{6\phi_3-5\phi_5+\phi_7\},$$

$$b_5=\{5\phi_3-20\phi_5+21\phi_7-8\phi_9+\phi_{11}\}$$

$$+2\{10\phi_3-15\phi_5+7\phi_7-\phi_9\},$$

……………………………………………

$$b_m=\Big\{m\phi_3-\frac{(m-1)m(m+1)}{\underline{|3}}\phi_5$$

$$+\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{\underline{|5}}\phi_7$$

$$-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{\lfloor 7}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots\}$$

$$+2\left\{\frac{(m-1)m}{\lfloor 2}\phi_3-\frac{(m-2)(m-1)m(m+1)}{\lfloor 4}\phi_5\right.$$

$$+\frac{(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{\lfloor 6}\phi_7$$

$$-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)(m+3)}{\lfloor 8}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{2\cdot\overline{2m}^2}{4\lfloor 2}\phi_3-\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)}{4^2\cdot\lfloor 4}\phi_5$$

$$+\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)}{4^3\cdot\lfloor 6}\phi_7$$

$$-\frac{2\cdot\overline{2m}^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)(\overline{2m}^2-6^2)}{4^4\cdot\lfloor 8}\phi_9+\cdots\cdots,$$

或因 $b_1=\phi_3$,

$b_2=4\phi_3-\phi_5$,

$b_3=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$,

$b_4=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$b_m=m^2\phi_3-\frac{2m^2(m^2-1^2)}{\lfloor 4}\phi_5$$

$$+\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{\lfloor 6}\phi_7$$

$$-\frac{2m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{\lfloor 8}\phi_9+\cdots\cdots,$$

或 $$\text{vers } ma=m^2(\text{vers } a)-\frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers } a)^2}{4\cdot 3\cdot 4\, r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers } a)^3}{4^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}-\cdots, \quad \text{(XI)}$$

在(X),(XI)二式,如 m 爲極大,則括弧內所減 1, 4, 9, 16, 25, 36,⋯⋯各數,可不入算.

又以 $$m\phi_2=2a,$$

$$\overline{2m}^2\phi_3=\frac{\overline{2m}^2\phi_2{}^2}{\phi_1}=\frac{(2a)^2}{r}$$

$$m^3\phi_4=\frac{m^3\cdot\phi_2\cdot\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_1\cdot\phi_1}=\frac{(2a)^3}{r^2};$$

$$\overline{2m}^4\phi_5=\frac{\overline{2m}^4\phi_2{}^4}{\phi_1{}^3}=\frac{\overline{2m\phi_2}^4}{\phi_1{}^3}=\frac{(2a)^4}{r^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故(X), (XI)二式可化爲(IV), (V), 卽:

$$c=2a-\frac{(2a)^3}{4\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\lfloor 5\cdot r}-\frac{(2a)^7}{4^3\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或 $$c=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n+1}}{4^{n-1}\cdot r^{2(n-1)}(2n-1)!};\qquad\text{(IV)}$$

及 $$\text{vers}\ a=\frac{(2a)^2}{4\lfloor 2\cdot r}-\frac{(2a)^4}{4^2\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{(2a)^6}{4^3\lfloor 6\cdot r^5}-\frac{(2a)^8}{4^4\lfloor 8\cdot r^7}+\cdots\cdots,$$

或 $$\text{vers}\ a=\sum_1^\infty(-1)^{n+1}\frac{(2a)^{2n}}{4^n\ r^{2n+1}(2n)!}.\qquad\text{(V)}$$

同理,得 (II), (III).[21]

次由(IV)得(VI), 由(III)得(VIII), 迴求之法,略同明氏解法.此與明氏同以(II), (III), (IV), (V), (VI), (VIII)爲基本;以(IV), (V)又爲基本之基本,故先述之.

項名達稱:「堆積旣與率數合,何以有倍分無析分,倍分中弦率又何以有奇分無偶分,且弦矢線於圜中,與三角堆何與」[22] 於是有象數一原之作,說詳次節.

17. 項名達之象數一原

項名達 (1789–1850) 因董祐誠割圜連比例中所

(21) 以上見割圜連比例圖解卷上,中.

(22) 見象數一原,項名達自序.

論割圜;「堆積旣與率數合,何以有倍分無析分,倍分中弦率又何以有奇分無偶分,且弦矢線於圜中,於三角堆何與」蓄是疑有年,丁酉(1837)歸自苕南,舟中偶念此,恍然有悟,先爲圖說二卷.(23) 至丙午冬(1846)復以前稿疎脫甚多,續爲圖解,未成而卒.其友戴煦(1805-1860)爲續成之,共得七卷,是爲象數一原.(24) 其後徐有壬,夏鸞翔皆本項氏之法,其立法之根,實從廉法表遞加之數,悟得其理,與西法之二項例無異,惟當時二項之例,尙未譯出,項氏深思而得之.(25) 計其卷目,則:

卷一(*A*) 整分起度弦矢率論.

卷二(*B*) 半分起度弦矢率論.

卷三(*C*) 零分起度弦矢率論.

卷四(*D*) 零分起度弦矢率論,[原本不全,戴煦補].

卷五(*E*) 諸術通詮.

卷六(*F*) 諸術明變,[原本無加減差表,戴煦補].

卷七 橢圜求周圖解[原本無,戴煦補].

(*A*) 整分起度弦矢率論.

---

(23) 見象數一原,項名達道光二十三年(1843)自序.

(24) 見象數一原,項名達,道光二十九年(1849)自序.

(25) 見華蘅芳學算筆談卷十二.

如第三十圖 第一形 ABC, 第六形 $BX'X$,

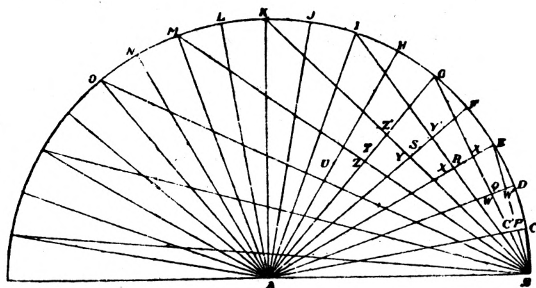
第二形 BCC', 第七形 AXY',

第三形 $AC'W'$, 第八形 $BY'Y$,

第四形 $BW'W$, 第九形 AYZ'……,

第五形 AWX', 第十形 $BZ'Z$,……,

幷為相似等腰三角形.



第三十圖

令第一形 ABC,腰 $AB=\phi_1$,

第一形 ABC,底
或第二形 BCC'腰 $\Big\}$ $BC=\phi_2$,

第二形 BCC' 底 $CC'=\phi_3$,

則第三形 $AC'W'$腰 $AC'=\phi_1-\phi_3$,即第一形腰,第二形底相減之數,

第三形 $AC'W'$底 $C'W'=\frac{BC}{AB}\times AC'$

$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-\phi_3)=\phi_2-\phi_4,$$

第四形 $BW'W$ 腰 $BW'=BC+C'W'=2\phi_2-\phi_4,$

即第二形腰,第三形底相加之數,

第四形 $BW'W$ 底 $WW'=\frac{BC}{AB}\times BW'$

$$=\frac{\phi_2}{\phi_1}(2\phi_2-\phi_4)=2\phi_3-\phi_5$$

第五形 AWX' 腰 $AW=AC'-WW'$

$$=(\phi_1-\phi_3)-(2\phi_3-\phi_5)$$

$$=\phi_1-3\phi_3+\phi_5,$$

即第三形腰,第四形底相減之數,

第五形 AWX' 底 $WX'=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\phi_1-\phi_3+\phi_5)=\phi_2-3\phi_4+\phi_6.$

第六形 $BX'X$ 腰 $BX'=BW'+WX'$

$$=(2\phi_2-\phi_4)+(\phi_2-3\phi_4+\phi_6)$$

$$=3\phi_2-4\phi_4+\phi_6,$$

即第四形腰,第五形底相加之數,

$$第六形\ BX'X\ 底\ XX'=\frac{\phi_2}{\phi_1}(3\phi_2-4\phi_4+\phi_6)$$

$$=3\phi_3-4\phi_5+\phi_7.$$

同理,

$$第七形\ AXY'\ 腰\ AX=\phi_1-6\phi_3+5\phi_5-\phi_7,$$

$$第七形\ AXY'\ 底\ XY'=\phi_2-6\phi_4+5\phi_6-\phi_8,$$

$$第八形\ BY'Y\ 腰\ BY'=4\phi_2-10\phi_4+6\phi_6-\phi_8,$$

$$第八形\ BY'Y\ 底\ YY'=4\phi_3-10\phi_5+6\phi_7-\phi_9,$$

$$第九形\ AYZ'\ 腰\ AY=\phi_1-10\phi_3+15\phi_5-7\phi_7+\phi_9,$$

$$第九形\ AYZ'\ 底\ YZ'=\phi_2-10\phi_4+15\phi_6-7\phi_8+\phi_{10},$$

$$第十形\ BZ'Z\ 腰\ BZ'=5\phi_2-20\phi_4+21\phi_6-8\phi_8+\phi_{10},$$

$$第十形\ BZ'Z\ 底\ ZZ'=5\phi_3-20\phi_5+21\phi_7-8\phi_9+\phi_{11},$$

....

而第 n 形腰 = 第 $n-2$ 形腰,

第 $n-1$ 形底相減之數, $n=$ 奇數,

第 n 形底 $=\frac{\phi_2}{\phi_1}$(第 n 形腰), $n=$ 奇數,

第 m 形腰 = 第 $m-2$ 形腰,

第 $m-1$ 形底相加之數, $m=$ 耦數,

第 m 形底 $=\frac{\phi_2}{\phi_1}$(第 m 形腰) $m=$ 耦數,

故得(a)逐分通弦率,即:

一分通弦 $BC=\phi_2$,

三分通弦 $BE=3\phi_2-\phi_4$,

五分通弦 $BG=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

七分通弘 $BI=7\phi_2-14\phi_4+7\phi_6-\phi_8$,

九分通弦 $BK=9\phi_2-30\phi_4+27\phi_6-9\phi_8+\phi_{10}$,

十一分通弦 $BM=11\phi_2-55\phi_4+77\phi_6-44\phi_8+11\phi_{10}$
$-\phi_{12}$,

十三分通弦 $BO=13\phi_2-81\phi_4+182\phi_6-156\phi_8+65\phi_{10}$
$-13\phi_{12}+\phi_{14}$,

十五分通弦 $=15\phi_2-140\phi_4+378\phi_6-450\phi_8+275\phi_{10}$
$-40\phi_{12}+15\phi_{14}-\phi_{16}$,

十七分通弦 $=17\phi_2-204\phi_4+714\phi_6-1122\phi_8$
$+935\phi_{10}-442\phi_{12}+119\phi_{14}-17\phi_{16}$
$+\phi_{18}$,

而 n分通弦 $=$第$n-1$形腰,及第$n+1$形腰相加之數,而$n=$奇數,

(b)逐分倍矢率.

命第三,五,……形腰較,爲第三,五,……形腰與半徑之較.

一分倍矢$2CP=\phi_3$,卽第三形腰較,

二分倍矢$2DQ=4\phi_3-\phi_5$,卽第三,五形腰較和,

三分倍矢$2ER=9\phi_3-6\phi_5+\phi_7$卽五,七形腰較和,

四分倍矢$2FS=16\phi_3-20\phi_5+8\phi_7-\phi_9$,卽七,九形腰較和,

五分倍矢$2GT=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$,卽九,十一形腰較和,

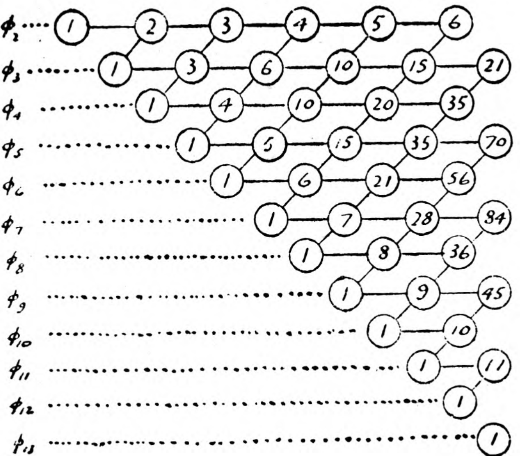
六分倍矢$2HU=36\phi_3-105\phi_5+112\phi_7-54\phi_9+12\phi_{11}-\phi_{13}$,卽十一,十三形腰較和,

七分倍矢 $=49\phi_3-196\phi_5+296\phi_7-210\phi_9+77\phi_{11}-14\phi_{13}+\phi_{15}$,卽十三,十五形腰較和,

八分倍矢 $=64\phi_3-336\phi_5+672\phi_7-660\phi_9+352\phi_{11}-104\phi_{13}+16\phi_{15}-\phi_{17}$,卽第十五,十七形腰較之和,

而m分倍矢 = 第$2m-1$形腰較,及第$2m+1$形腰較相加之數.

旣知n分通弦第$n-1$形腰,及第$n+1$腰相加之數;又m分倍矢爲第$2m-1$形腰較,及第$2m+1$腰較相加之數,而各形腰,及各形腰較,與各率之關係,又可以次之"遞加圖"示之,卽:



根，　其積卽董氏之平三角堆積，

平積，　其積卽董氏之立三角堆積，

立積，　其積卽董氏之三乘三角堆積，

三乘積，　其積卽董氏之四乘三角堆積，

四乘積，　其積卽董氏之五乘三角堆積，

五乘積，　其積卽董氏之六乘三角堆積，

六乘積，　其積卽董氏之七乘三角堆積，

七乘積，　其積卽董氏之八乘三角堆積，

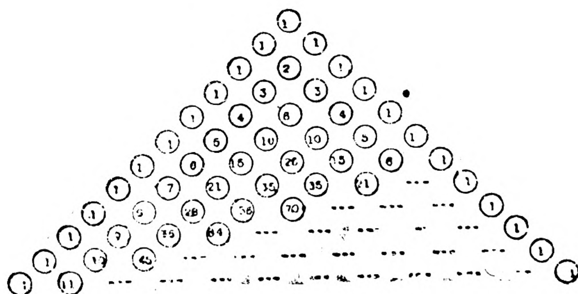
八乘積，　其積卽董氏之九乘三角堆積，

九乘積，　其積卽董氏之十乘三角堆積，

十乘積，　其積卽董氏之十一乘三角堆積，

十一乘積，　其積卽董氏之十二乘三角堆積，

此卽巴氏三角形 (Pascal's triangle) 斜視之圖.在國中則楊輝詳解九章算法 (1261),朱世傑四元玉鑑 (1303)已首論之.其圖如次:



因二項式定理之最簡式:

$$(1+1)^n=1+n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot 1^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot 1^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cdot 1^4+\cdots\cdots+1^n,$$

$=1+n\cdot 1+$(平三角堆積)$+$(立三角堆積)

$+$(三乘三角堆積)$+\cdots\cdots+1^n$.

故項名達求腰率法曰:形數 $(2n)$ 折半爲根,卽爲二率(之係數,如第八形腰,爲 $\frac{8}{2}\phi_2=4\phi_2$, 第十形腰,爲 $\frac{10}{2}\phi_2=5\phi_2\cdots\cdots$,第 $2n$ 形腰爲 $n\phi_2$ 是也).根自乘減一,以

乘二率,二除之,三除之,得四率(之係數,如第八形腰,爲 $\frac{4(4^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=10\phi_4$,第十形腰爲 $\frac{5(5^2-1)}{2\cdot 3}\phi_4=20\phi_4$,……,第 $2n$ 形腰,爲 $\frac{n(n^2-1)}{\underline{|3}}\phi_4$ 是也).根自乘減四,以乘四率,四除之,五除之,得六率(之係數,如第八形腰,爲 $\frac{10(4^2-4)}{4\cdot 5}\phi_6=6\phi_6$,第十形腰爲 $\frac{20(5^2-4)}{4\cdot 5}\phi_6=21\phi_6$,……,第 $2n$ 形腰爲 $\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{\underline{|5}}\phi_6$ 是也).根自乘減九,以乘六率,六除之,七除之,得八率(之係數,如第八形腰爲 $\frac{6(4^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=\phi_8$,第十形腰爲 $\frac{21(5^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=8\phi_8$,……,第 $2n$ 形腰,爲 $\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\underline{|7}}\phi_8$ 是也.二率爲正,四率爲負,以下皆正負相間,凡乘法恆以1,2,3,4等數自乘之,與根自乘相減.若相減適盡,則已得末率,不必再求.(如第八形腰之 $\frac{6(4^2-9)}{6\cdot 7}\phi_8=\phi_8$ 是也).

因 $2n+1$ 分弧通弦 = 第 $2n$ 形腰 + 第 $2(n+1)$ 形腰,

$$=\Big\{n\phi_2+\frac{n(n^2-1)}{\underline{|3}}\phi_4+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{\lfloor 7}\phi_8+\cdots\cdots\Big\}$$

$$+\Big\{\overline{n+1}\phi_2-\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}}{\lfloor 3}\phi_4$$

$$+\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}\{\overline{n+1}^2-2^2\}}{\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{(n+1)\{\overline{n+1}^2-1\}\{\overline{n+1}^2-2^2\}\{\overline{n+1}^2-3^2\}}{\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots\Big\}$$

令 $2n+1=m$, 則「倍分通弦」中, m 分弧之弦,

$$C_m=m\phi_2-\frac{m(m^2-1^2)}{2^2\cdot\lfloor 3}\phi_4+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi_8+\cdots\cdots. \quad \text{(X)}$$

又求腰較率法曰: 形數($2m$)爲倍根,倍根自乘減一,四除之,二除之,爲三率(之係數,如第七形腰較,爲 $\frac{(7^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=6\phi_3$,第九形腰較,爲 $\frac{(9^2-1)}{4\cdot 2}\phi_3=10\phi_3,\cdots\cdots$, 第 $2m$ 形腰較,爲 $\frac{(2m^2-1^2)}{4\cdot 2}\phi_3$ 是也). 倍根自乘減九,以乘三率,四除之,三除之,四除之,得五率(之係數,如第七

形腰較,爲$\frac{6(7^2-3^2)}{4\cdot3\cdot4}\phi_5=5\phi_5$,第九形腰較,爲$\frac{10(9^2-3^2)}{4\cdot3\cdot4}\phi_5$

$=15\phi_5$,……,第$2m$形腰較,爲$\frac{(\overline{2m}^2-1^2)(\overline{2m}^2-3^2)}{4^2\cdot\lfloor 4}\phi_5$是也).

倍根自乘減二十五,以乘五率,四除之,五除之,六除之

得七率(之係數,如第七形腰較,爲$\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=\phi_5$,第

九形腰較,爲$\frac{15(9^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=7\phi_5$,……,第$2m$形腰較,爲

$\frac{(\overline{2m}^2-1^2)(\overline{2m}^2-3^2)(\overline{2m}^2-5^2)}{4^3\lfloor 6}\phi_7$是也).三率爲正,五率

爲負,以下皆正負相間,凡乘法恆以1, 3, 5, 7等數自乘

之,與倍根自乘相減,若相減適盡,則已得末率,不必再

求.(如第七形腰較之$\frac{5(7^2-5^2)}{4\cdot5\cdot6}\phi_5=\phi_5$是也).

因m分倍矢＝第$2m-1$形腰較＋第$2m+1$形腰較.

$$=\Big\{\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)}{4\cdot\lfloor 2}\phi_3-\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)}{4^2\lfloor 4}\phi_5$$

$$+\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)(\overline{2m-1}^2-5^2)}{4^3\cdot\lfloor 6}\phi_7$$

$$-\frac{(\overline{2m-1}^2-1^2)(\overline{2m-1}^2-3^2)(\overline{2m-1}^2-5^2)(\overline{2m-1}^2-7^2)}{4^4\cdot\underline{|8}}\phi_9+\cdots\cdots\Big\}$$

$$+\Big\{\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)}{4\,\underline{|2}}\phi_3-\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)}{4^2\cdot\underline{|4}}\phi_5$$

$$+\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)(\overline{2m+1}^2-5^2)}{4^3\cdot\underline{|6}}\phi_7$$

$$+\frac{(\overline{2m+1}^2-1^2)(\overline{2m+1}^2-3^2)(\overline{2m+1}^2-5^2)(\overline{2m+1}^2-7^2)}{4^4\cdot\underline{|8}}\phi_9-\cdots\cdots\Big\}.$$

則"倍分倍矢"中, m 分弧之倍矢,

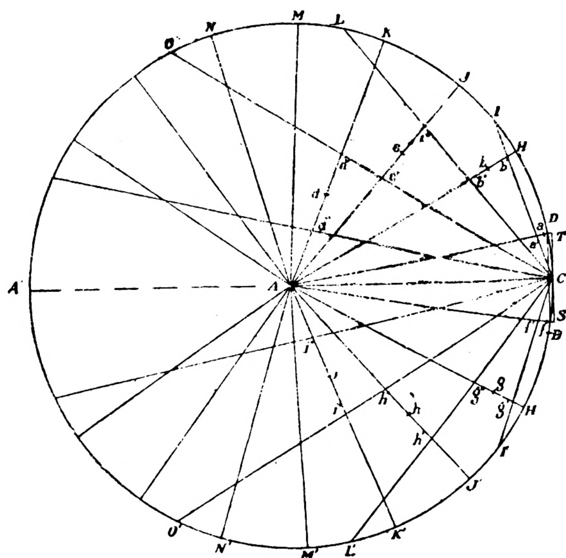
$$b_m=\frac{2(2m)^2}{4\underline{|2}}\phi_3-\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)}{4^2\underline{|4}}\phi_5+\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)}{4^3\,\underline{|6}}\phi_7$$

$$-\frac{2(2m)^2(\overline{2m}^2-2^2)(\overline{2m}^2-4^2)(\overline{2m}^2-6^2)}{4^4\cdot\underline{|8}}\phi_9+\cdots\cdots,$$

$$=m^2\phi_3-\frac{m^2(m^2-1)}{3\cdot4}\phi_5+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi_7-\frac{m^2(m^2-1)(m^2-2^2)(m^2-3^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi_9+\cdots,\quad \text{(XI)}$$

以上, 見項名達象數一原卷一.

(*B*) 半分起度弦矢率論.



第三十一圖

如第三十一圖 BD 爲本弧.

AB, AD 爲半徑, BD' 爲通弦, 成 ABD 兩等邊三角形.

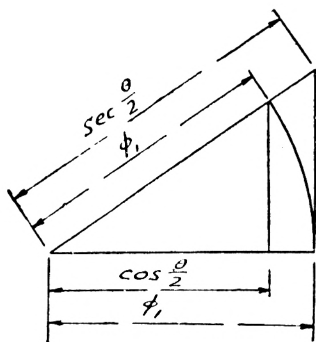
因半分起度, 將全弧折半於 C, 則 BC, CD 皆半弧.

自 C 作 BD 之平行線, 交 AB, AD 之引長線於 S, T.

又聯 $CI, CL, CO, \cdots\cdots$ 等線,得:

第一形, AST,	第六形, $Cc'c''$,
第二形, CTa',	第七形, $Ac''d'$,
第三形, $Aa'b'$	第八形, $Cd'd''$
第四形, $Cb'b''$	…………………
第五形, $Ab''c'$	…………………

并爲相似等腰三角形.



第三十二圖

因　　$r=\phi_1,\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}=\phi_2,$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\phi_2}{2},$$

故　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\left(\phi_1{}^2-\dfrac{\phi_2{}^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

按商除法或二項式定理,得

$$\cos\frac{\theta}{2}=\left(\phi_1{}^2-\frac{\phi_2{}^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\phi_1-\frac{1}{2^3}\phi_3-\frac{1}{2^7}\phi_5-\frac{2}{2^{11}}\phi_7-\frac{5}{2^{15}}\phi_9-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

又因 $\frac{\sec\frac{\theta}{2}}{\phi_1}=\frac{\phi_1}{\cos\frac{\theta}{2}}$, $\sec\frac{\theta}{2}=\frac{\phi_1^2}{\cos\frac{\theta}{2}}$,

即 $$\sec\frac{\theta}{2}=\phi_1^2\left(\phi_1-\frac{1}{2^3}\phi_3-\frac{1}{2^7}\phi_5-\frac{2}{2^{11}}\phi_7-\frac{5}{2^{15}}\phi_9\right.$$

$$\left.-\frac{14}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{42}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{132}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots\right)^{-1}$$

$$=\phi_1+\frac{1}{2^3}\phi_3+\frac{3}{2^7}\phi_5+\frac{10}{2^{11}}\phi_7+\frac{35}{2^{15}}\phi_9+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots.$$

故得遞求半分起度各形腰底率,即

α_1,第一形 AST 腰 AS

$$=\phi_1+\frac{1}{2^3}\phi_3+\frac{3}{2^7}\phi_5+\frac{10}{2^{11}}\phi_7+\frac{35}{2^{15}}\phi_9$$

$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{11}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_1=\beta_1$,第一形 AST 底 ST

$$=\phi_2+\frac{1}{2^3}\phi_4+\frac{3}{2^7}\phi_6+\frac{10}{2^{11}}\phi_8+\frac{35}{2^{15}}\phi_{10}$$

$$+\frac{126}{2^{19}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\beta_1}{2}=\alpha_2$，第二形 CTa' 腰 CT

$$=\frac{1}{2}\phi_2+\frac{1}{2^4}\phi_4+\frac{3}{2^8}\phi_6+\frac{10}{2^{12}}\phi_8+\frac{35}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{1716}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_2=\beta_2$，第二形 CTa' 底 Ta'

$$=\frac{1}{2}\phi_3+\frac{1}{2^4}\phi_5+\frac{3}{2^8}\phi_7+\frac{10}{2^{12}}\phi_9+\frac{35}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$+\frac{126}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{462}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$，第三形 $Aa'b'$ 腰 Aa'

$$=\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9$$

$$-\frac{154}{2^{17}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_3=\beta_3$，第三形 $Aa'b'$ 底 $a'b'$

$$=\phi_2-\frac{3}{2^3}\phi_4-\frac{5}{2^7}\phi_6-\frac{14}{2^{11}}\phi_8-\frac{45}{2^{15}}\phi_{10}$$

$$-\frac{154}{2^{17}}\phi_{12}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{14}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{16}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cb'b''$ 腰 Cb'

$$=\frac{3}{2}\phi_2-\frac{5}{2^4}\phi_4-\frac{7}{2^8}\phi_6-\frac{18}{2^{12}}\phi_8-\frac{55}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{12}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{14}-\frac{2244}{2^{28}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_4=\beta_4$，第四形 $Cb'b''$ 底 $b'b''$

$$\frac{3}{2}\phi_3-\frac{5}{2^4}\phi_5-\frac{7}{2^8}\phi_7-\frac{18}{2^{12}}\phi_9-\frac{55}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$-\frac{182}{2^{20}}\phi_{13}-\frac{630}{2^{24}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰 Ab''

$$=\phi_1-\frac{15}{2^3}\phi_3+\frac{35}{2^7}\phi_5+\frac{42}{2^{11}}\phi_7+\frac{99}{2^{15}}\phi_9+\frac{286}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_5=\beta_5$，第五形 $Ab''c'$ 底 $b''c'$

$$=\phi_2-\frac{15}{2^3}\phi_4+\frac{35}{2^7}\phi_6+\frac{42}{2^{11}}\phi_8+\frac{99}{2^{15}}\phi_{10}+\frac{286}{2^{19}}\phi_{12}$$

$$+\frac{910}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{3060}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰 Cc'

$$=\frac{5}{2}\phi_2-\frac{35}{2^4}\phi_4+\frac{63}{2^8}\phi_6+\frac{66}{2^{12}}\phi_8+\frac{143}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{14}+\frac{3876}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_6=\beta_6$，第六形 $Cc'c''$ 底 $c'c''$

$$=\frac{5}{2}\phi_3-\frac{35}{2^4}\phi_5+\frac{63}{2^8}\phi_7+\frac{66}{2^{12}}\phi_9+\frac{143}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$+\frac{390}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{1190}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$，第七形 $Ac''d'$ 腰 Ac''

$$=\phi_1-\frac{35}{2^3}\phi_3+\frac{315}{2^7}\phi_5-\frac{462}{2^{11}}\phi_7-\frac{429}{2^{15}}\phi_9-\frac{858}{2^{19}}\phi_{11}$$

$$-\frac{2210}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{6460}{2^{27}}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_7=\beta_7$，第七形 $Ac''d'$ 底 $c''d'$

$$=\phi_2-\frac{35}{2^3}\phi_4+\frac{315}{2^7}\phi_6-\frac{462}{2^{11}}\phi_8-\frac{429}{2^{15}}\phi_{10}-\frac{858}{2^{19}}\phi_{12}$$

$$-\frac{2210}{2^{28}}\phi_{14}-\frac{6460}{2^{27}}\phi_{16}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$，第八形 $Cd'd''$ 腰 Cd'

$$=\frac{7}{2}\phi_2-\frac{105}{2^4}\phi_4+\frac{693}{2^8}\phi_6-\frac{858}{2^{12}}\phi_8-\frac{715}{2^{16}}\phi_{10}$$

$$-\frac{1326}{2^{20}}\phi_{12}-\frac{3230}{2^{24}}\phi_{14}-\frac{9044}{2^{28}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_8=\beta_8$，第八形 $Cd'd''$ 底 $d'd''$

$$=\frac{7}{2}\phi_3-\frac{105}{2^4}\phi_5+\frac{693}{2^8}\phi_7-\frac{858}{2^{12}}\phi_9-\frac{715}{2^{16}}\phi_{11}$$

$$-\frac{1326}{2^{20}}\phi_{13}-\frac{3230}{2^{24}}\phi_{15}-\cdots\cdots;$$

$\alpha_7-\beta_8=\alpha_9$，第九形腰

$$=\phi_1-\frac{63}{2^3}\phi_3+\frac{1155}{2^7}\phi_5-\frac{6006}{2^{11}}\phi_7+\frac{6435}{2^{15}}\phi_9$$

$$+\frac{4862}{2^{19}}\phi_{11}+\frac{8398}{2^{23}}\phi_{13}+\frac{19380}{2^{27}}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_9=\beta_9$，第九形底

$$=\phi_2-\frac{63}{2^3}\phi_4+\frac{1155}{2^7}\phi_6-\frac{6006}{2^{11}}\phi_8+\frac{6435}{2^{15}}\phi_{10}$$

$$+\frac{4862}{2^{19}}\phi_{12}+\frac{8398}{2^{23}}\phi_{14}+\frac{19380}{2^{27}}\phi_{16}+\cdots\cdots;$$

$\alpha_8+\beta_9=\alpha_{10}$，第十形腰

$$=\frac{9}{2}\phi_1-\frac{231}{2^4}\phi_4+\frac{3003}{2^8}\phi_6-\frac{12870}{2^{12}}\phi_8$$

$$+\frac{12155}{2^{16}}\phi_{10}+\frac{8398}{2^{20}}\phi_{12}+\frac{13566}{2^{24}}\phi_{14}$$

$$+\frac{29716}{2^{28}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$\frac{\phi_2}{\phi_1}\alpha_{10}=\beta_{10}$，第十形底

$$=\frac{9}{2}\phi_3-\frac{231}{2^4}\phi_5+\frac{3003}{2^8}\phi_7-\frac{12870}{2^{12}}\phi_9$$

$$+\frac{12155}{2^{16}}\phi_{11}+\frac{8398}{2^{20}}\phi_{13}+\frac{13566}{2^{24}}\phi_{15}+\cdots\cdots;$$

故 α_{n+1}，第 $n+1$ 形腰

$$=\frac{n}{\underline{|2}}\phi_2-\frac{n(n^2-2^2)}{2^3\underline{|3}}\phi_4+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2^5\cdot\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2^7\cdot\underline{|7}}\phi_8$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2^9\underline{|9}}\phi_{10}$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)}{2^{11}\underline{|11}}\phi_{12}$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)}{2^{13}\lfloor\underline{13}}\phi_{14}$$

$$-\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)(n^2-10^2)(n^2-12^2)(n^2-14^2)}{2^{15}\lfloor\underline{15}}\phi_{16}$$

$+\cdots\cdots$, 而 n 爲奇數;

又 a_{m+1}, 第 $m+1$ 形腰

$$=\phi_1-\frac{(m^2-1^2)}{2^2\lfloor\underline{2}}\phi_3+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\lfloor\underline{4}}\phi_5-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\lfloor\underline{6}}\phi_7$$

$$+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{2^8\lfloor\underline{8}}\phi_9-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)}{2^{10}\lfloor\underline{10}}\phi_{11}$$

$$+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)}{2^{12}\lfloor\underline{12}}\phi_{13}$$

$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)(m^2-9^2)(m^2-11^2)(m^2-13^2)}{2^{14}\lfloor\underline{14}}\phi_{15}$$

$+\cdots\cdots$, 而 m 爲耦數.

故得:

a_2+a_4，二分通弦，

$$CI=2\phi_2-\frac{1}{2^2}\phi_4-\frac{1}{2^6}\phi_6-\frac{2}{2^{10}}\phi_8-\frac{5}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{14}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{42}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{132}{2^{26}}\phi_{16}\cdots\cdots,$$

a_4+a_6，四分通弦，

$$CL=4\phi_2-\frac{10}{2^2}\phi_4+\frac{14}{2^6}\phi_6+\frac{12}{2^{10}}\phi_8+\frac{22}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{52}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$+\frac{140}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{408}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

a_6+a_8，六分通弦，

$$CO=6\phi_2-\frac{35}{2^2}\phi_4+\frac{189}{2^6}\phi_6-\frac{189}{2^{10}}\phi_8-\frac{143}{2^{14}}\phi_{10}-\frac{234}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{510}{2^{22}}\phi_{14}-\frac{1292}{2^{26}}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

a_8+a_{10}，八分通弦

$$=8\phi_2-\frac{84}{2^2}\phi_4+\frac{924}{2^6}\phi_6-\frac{3432}{2^{10}}\phi_8+\frac{2860}{2^{14}}\phi_{10}+\frac{1768}{2^{18}}\phi_{12}$$

$$-\frac{2584}{2^{22}}\phi_{14}+\frac{5168}{2^{26}}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

而m分通弦，

$$C_m = m\phi_2 - \frac{m(m^2-1^2)}{2^2\,\underline{|3}}\phi_4 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4\,\underline{|5}}\phi_6$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6\,\underline{|7}}\phi_8 + \cdots\cdots, \qquad \text{(X)}$$

$2\phi_1 - a_1 - a_3$, $\frac{1}{2}$ 分倍矢, $2aD = a'D - DT$

$$= \frac{1}{2^2}\phi_3 + \frac{1}{2^6}\phi_5 + \frac{2}{2^{10}}\phi_7 + \frac{5}{2^{14}}\phi_9 + \frac{14}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{42}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$+ \frac{132}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_3 - a_5$, $1\frac{1}{2}$ 分倍矢, $2bH = b'H + b''H$

$$= \frac{9}{2^2}\phi_3 - \frac{15}{2^6}\phi_5 - \frac{14}{2^{10}}\phi_7 - \frac{27}{2^{14}}\phi_9 - \frac{66}{7^{18}}\phi_{11} - \frac{182}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$- \frac{540}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_5 - a_7$, $2\frac{1}{2}$ 分倍矢, $2cJ = c'J + c''J$

$$= \frac{25}{2^2}\phi_3 - \frac{175}{2^6}\phi_5 + \frac{210}{2^{10}}\phi_7 + \frac{165}{2^{14}}\phi_9 + \frac{286}{2^{18}}\phi_{11} + \frac{65}{2^{22}}\phi_{13}$$

$$+ \frac{1700}{2^{26}}\phi_{15},$$

$2\phi_1 - a_7 - a_9$, $3\frac{1}{2}$ 分倍矢, $2dK = d'K + d''K$

$$=\frac{49}{2^2}\phi_3-\frac{735}{2^6}\phi_5+\frac{3234}{2^{10}}\phi_7-\frac{3003}{2^{14}}\phi_9-\frac{2002}{2^{18}}\phi_{11}$$

$$-\frac{3094}{2^{22}}\phi_{13}-\frac{6460}{2^{26}}\phi_{15},$$

而 $\frac{n}{m}$ 分倍矢,

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot4}\phi_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XI)}$$

以上見項名達象數一原卷二.

項氏旣於象數一原卷一,如董祐誠之例,由 1, 3, 5, 7,……,等分弧弦歸納得(X)式,又於象數一原卷二,由 2, 4, 6, 8,……, 等分弧弦歸納得 (X) 式. 則董氏所謂"凡弦之倍分,皆取奇數"者,玆知其可以奇耦通用矣. 董氏之 (XI) 式,項氏之 (XI) 式,并以整數立論,象數一

原卷二,三,則設法用分數證$C_{\frac{n}{m}}$,$b_{\frac{n}{m}}$視董氏之僅證$C_{\frac{1}{m}}$ $b_{\frac{1}{m}}$者,亦有進也.

* * *

(C) 零分起度弦矢率論.

前節求$b_{\frac{n}{m}}$以$\frac{n}{m}=\frac{n}{2}$,玆再以$\frac{n}{m}=\frac{n}{3}$, $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{5}$證$C_{\frac{n}{m}}$, $b_{\frac{n}{m}}$.

第三十三圖

$$\left(\text{第一：}\quad \text{令}\ \frac{n}{m}=\frac{n}{3}\right).$$

如第三十三圖 BE 爲本弧,三分爲 BC, CD, DE, 作 CD 弦引出圓外,交 AB, AE 之引長線於 S, T. 則 $\triangle_s\ AST$, ABE 爲相似三角形.又作 CI, CL, CO 各線爲 $\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, \frac{19}{3}$ 弧通弦.

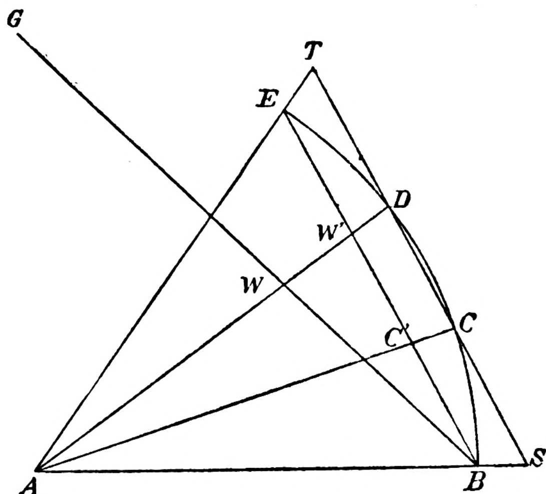
$\frac{n}{3}$ 分弧起度,可分爲 $\frac{2}{3}$ 分弧起度,及 $\frac{1}{3}$ 分弧起度之二例.

前者以 $A'AC$ 線上半圓起算,有:

負第一形	CSf'	第五形	$Ab''c'$
第一形	AST	第六形	$Cc'c''$
第二形	CTa'	第七形	
第三形	$Aa'b'$	第八形	
第四形	$Cb'b''$	....	

後者以 $A'AC$ 線下半圓起算,有:

負第二形	CTa'	第五形	$Ag''h'$
第一形	AST	第六形	$Ch'h''$
第二形	CSf'	第七形	
第三形	$Af'g'$	第八形	
第四形	$Cg'g''$	....	



第三十四圖

次用"借率法",俾可借前所得者,以御新形:

因 $$AS=\frac{AC\times AB}{AC'}=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\phi_3},$$

而 AC' 爲前整分起度内之第三形腰.故

第一形 AST 腰, $$AS=\frac{\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$$

$$=\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}.$$

又因 $$CS=\frac{AC\times BC'}{AC'}=\frac{AC\times BC}{AC'}=\frac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3},$$

而 BC 爲前整分起度內之第二形腰.參觀第三十圖及第三十四圖,故

第二形 CSf' 腰 $CS=\dfrac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-\phi_3}$

$$=\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}.$$

又因 $$CT=\frac{AC\times C'E}{AC'}=\frac{AC\times BW'}{AC'}=\frac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3},$$

而 BW',即前整分起度內之第四形腰.故

又第二形 CTa 腰 $CT=\dfrac{\phi_1(2\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-\phi_3}$

$$=2\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}.$$

復次用"易率法":

因 $c_3=3\phi_2-\phi_4$

令 $\phi'_1=\phi_1,\ \phi'_2=c_3.$

即 $\dfrac{\phi'_2}{3}=\phi_2-\dfrac{\phi_4}{3},$

則 $$\frac{\phi'_3}{3^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{3}\cdot\frac{\phi'_2}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7,$$

同理 $$\frac{\phi'_5}{3^4}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_3}{3^2}}{\phi_1}=\phi_5-\frac{4}{3}\phi_7+\frac{6}{3^2}\phi_9-\frac{4}{3^3}\phi_{11}+\frac{1}{3^4}\phi_{13},$$

$$\frac{\phi'_7}{3^6}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_5}{3^4}}{\phi_1}=\phi_7-\frac{6}{3}\phi_9+\frac{15}{3^2}\phi_{11}-\frac{20}{3^3}\phi_{13}$$

$$+\frac{15}{3^4}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_9}{3^8}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_7}{3^6}}{\phi_1}=\phi_9-\frac{8}{3}\phi_{11}+\frac{28}{3^2}\phi_{13}-\frac{56}{3^3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{11}}{3^{10}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_9}{3^8}}{\phi_1}=\phi_{11}-\frac{10}{3}\phi_{13}+\frac{45}{3^2}\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{13}}{3^{12}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_{11}}{3^{10}}}{\phi_1}=\phi_{13}-\frac{12}{3}\phi_{15}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{15}}{3^{14}}=\frac{\frac{\phi'_3}{3^2}\cdot\frac{\phi'_{13}}{3^{12}}}{\phi_1}=\phi_{15}-\cdots\cdots.$$

因以上之關係可逐次代入,化得:

第一形腰之易率式,

$$\phi_1+\phi_3+\phi_5+\phi_7+\phi_9+\phi_{11}+\phi_{13}+\phi_{15}$$

$$=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

而 $$5=(2\times 1)+1\times 3,$$

$$28=(5\times 4-1)+1\times 3^2,$$

$$165=(28\times 6-5\times 6)+1\times 3^3,$$

$$1001=(165\times 8-28\times 15+5\times 4)+1\times 3^4,$$

$$6188=(1001\times 10-165\times 28+28\times 20-5\times 1)+1\times 3^5,$$

$$38760=(6188\times 12-1001\times 45+165\times 56-28\times 15)+1\times 3^6.$$

....

又因 $$c_3=3\phi_2-\phi_4,$$

令 $$\phi'_1=\phi_1,\ \phi'_2=c_3,$$

即 $$\frac{\phi'_2}{3}=\phi_2-\frac{\phi_4}{3},$$

則 $$\frac{\phi'_3}{3^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{3}\cdot\frac{\phi'_2}{3}}{\phi_1}=\phi_3-\frac{2}{3}\phi_5+\frac{1}{3^2}\phi_7,$$

同理 $$\frac{\phi'_4}{3^3}=\frac{\frac{\phi'_2}{3}\cdot\frac{\phi'_3}{3^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{3}{3}\phi_6+\frac{3}{3^2}\phi_8-\frac{1}{3^3}\phi_{10},$$

$$\frac{\phi'_6}{3^5}=\phi_6-\frac{5}{3}\phi_8+\frac{10}{3^2}\phi_{10}-\frac{10}{3^3}\phi_{12}+\frac{5}{3^4}\phi_{14}-\frac{1}{3^5}\phi_{16},$$

$$\frac{\phi'_8}{3^7}=\phi_8-\frac{7}{3}\phi_{10}+\frac{21}{3^2}\phi_{12}-\frac{35}{3^3}\phi_{14}+\frac{35}{3^4}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{10}}{3^9}=\phi_{10}-\frac{9}{3}\phi_{12}+\frac{36}{3^2}\phi_{14}-\frac{84}{3^3}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{12}}{3^{11}}=\phi_{12}-\frac{11}{3}\phi_{14}+\frac{55}{3^2}\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{14}}{3^{13}}=\phi_{14}-\frac{13}{3}\phi_{16}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{16}}{3^{15}}=\phi_{16}-\cdots\cdots,$$

因以上之關係,可逐次代入化得

負第一形腰之易率式,

$$\phi_2+\phi_4+\phi_6+\phi_8+\phi_{10}+\phi_{12}+\phi_{14}+\phi_{16}$$

$$=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{21}},$$

而 $4=(1)+1\times3$

$21=(4\times3)+1\times3^2$

$120=(21\times5-4\times3)+1\times3^3$

$715=(120\times7-21\times10+4\times1)+1\times3^4$

$4368=(715\times9-120\times21+21\times10)+1\times3^5$

....

由是得"求三分之二起度各形腰底率",在 $\frac{2}{3}$ 起度,$\triangle CSf'$ 爲負第一形.

α_{-1},負第一形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{21}},$$

α_1,第一形 AST 腰,

$$AS=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_1,第一形 AST 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{\phi'_4}{3^2}+\frac{5\phi'_6}{3^5}+\frac{28\phi'_8}{3^8}+\frac{165\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1001\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$-\alpha_{-1}+\beta_1=\alpha_2$,第二形 CTa' 腰,

$$CT=\frac{2\phi'_2}{3}+\frac{5\phi_4'}{3^4}+\frac{24\phi'_6}{3^7}+\frac{132\phi'_8}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{10}}{3^{18}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{14}}{3^7}+\frac{178296\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_2, 第二形 CTa' 底,

$$Ta'=\frac{2\phi'_3}{3}+\frac{5\phi'_5}{3^4}+\frac{24\phi'_7}{3^7}+\frac{132\phi'_9}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Aa'b'$ 腰,

$$Aa'=\phi'_1-\frac{5\phi'_3}{3^2}-\frac{10\phi'_5}{3^5}-\frac{44\phi'_7}{3^8}-\frac{231\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{7735\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{46920\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_3, 第三形 $Aa'b'$ 底,

$$a'b'=\phi'_2-\frac{5\phi'_4}{3^2}-\frac{10\phi'_6}{3^5}-\frac{44\phi'_8}{3^8}-\frac{231\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{1309\phi_{12}}{3^{14}}-\frac{7735\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{46920\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cb'b''$ 腰,

$$Cb'=\frac{5\phi'_2}{3}-\frac{40\phi'_4}{3^4}-\frac{66\phi'_6}{3^7}-\frac{264\phi'_8}{3^{10}}-\frac{1309\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{7140\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{41055\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{243984\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_4, 第四形 $Cb'b''$ 底,

$$b'b''=\frac{5\phi'_3}{3}-\frac{40\phi'_5}{3^4}-\frac{66\phi'_7}{3^7}-\frac{264\phi'_9}{3^{10}}-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$-\frac{7140\phi'_{13}}{3^{16}}-\frac{41055\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$, 第五形 $Ab''c'$ 腰,

$$Ab''=\phi_1-\frac{20\phi'_3}{3^2}+\frac{110\phi'_5}{3^5}+\frac{154\phi'_7}{3^8}+\frac{561\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_5, 第五形 $Ab''c'$ 底,

$$b''c'=\phi'_2-\frac{20\phi'_4}{3^2}+\frac{110\phi'_6}{3^5}+\frac{154\phi'_8}{3^8}+\frac{561\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{2618\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{13685\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{76245\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$, 第六形 $Cc'c''$ 腰,

$$Cc'=\frac{8\phi'_2}{3}-\frac{220\phi'_4}{3^4}+\frac{924\phi'_6}{3^7}+\frac{1122\phi'_8}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{442221\phi'_{16}}{3^{22}}$$

β_6, 第六形 $Cc'c''$ 底,

$$c'c''=\frac{8\phi'_3}{3}-\frac{220\phi'_5}{3^4}+\frac{924\phi'_7}{3^7}+\frac{1122\phi'_9}{3^{10}}+\frac{3740\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{16422\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{82110\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{44\phi'_3}{3^2}+\frac{770\phi'_5}{3^5}-\frac{2618\phi'_7}{3^8}-\frac{2805\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{44\phi'_4}{3^2}+\frac{770\phi'_6}{3^5}-\frac{2618\phi'_8}{3^8}-\frac{2805\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{8602\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{35581\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{170085\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$, 第八形腰,

$$=\frac{11\phi'_2}{3}-\frac{616\phi'_4}{3^4}+\frac{7854\phi'_6}{3^7}-\frac{22440\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{21505\phi'_{10}}{2^{13}}-\frac{60996\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{238119\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{1088544\phi'_{16}}{3^{22}},$$

又"求三分之一起度各形腰底率",

α_{-2}, 負第二形CTa'腰,

$$CT=\frac{2\phi'_2}{3}+\frac{5\phi'_4}{3^4}+\frac{24\phi'_6}{3^7}+\frac{132\phi'_8}{3^{10}}+\frac{770\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4641\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{28560\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{178296\phi'_{16}}{3^{22}},$$

α_1, 第一形 AST 腰,

$$AT=\phi'_1+\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{28\phi'_7}{3^8}+\frac{165\phi'_9}{3^{11}}+\frac{1001\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{6188\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_1, 第一形 AST 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{\phi'_4}{3^2}+\frac{5\phi'_6}{3^5}+\frac{28\phi'_8}{3^8}+\frac{165\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1001\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{6188\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{38760\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\beta_1-\alpha_{-2}=\alpha_2$,第二形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{4\phi'_4}{3^4}+\frac{21\phi'_6}{3^7}+\frac{120\phi'_8}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{170544\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_2 第二形 CSf' 底,

$$Sf'=\frac{\phi'_3}{3}+\frac{4\phi'_5}{3^4}+\frac{21\phi'_7}{3^7}+\frac{120\phi'_9}{3^{10}}+\frac{715\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{4368\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{27132\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Af'g'$ 腰,

$$Af'=\phi'_1-\frac{2\phi'_3}{3^2}-\frac{7\phi'_5}{3^5}-\frac{35\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$-\frac{6916\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_3，第三形 $Af'g'$ 底，

$$f'g'=\phi'_2-\frac{2\phi'_4}{3^2}-\frac{7\phi'_6}{3^5}-\frac{35\phi'_8}{3^8}-\frac{195\phi'_{10}}{3^{11}}-\frac{1144\phi'_{12}}{3^{14}}$$

$$-\frac{6916\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{42636\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$，第四形 $Cg'g''$ 腰，

$$Cg'=\frac{4\phi'_2}{3}-\frac{14\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{195\phi'_8}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{5928\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{213180\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_4，第四形 $Cg'g''$ 底，

$$g'g''=\frac{4\phi'_3}{3}-\frac{14\phi'_5}{3^4}-\frac{42\phi'_7}{3^7}-\frac{195\phi'_9}{3^{10}}-\frac{1040\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$-\frac{5928\phi'_{13}}{3^{16}}-\frac{35112\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ag''h'$ 腰，

$$Ag''=\phi'_1-\frac{14\phi'_3}{3^2}+\frac{35\phi'_5}{3^5}+\frac{91\phi'_7}{3^8}+\frac{390\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{1976\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_5, 第五形 $Ag''h'$ 底,

$$g''h'=\phi'_2-\frac{14\phi'_4}{3^2}+\frac{35\phi'_6}{3^5}+\frac{91\phi'_8}{3^8}+\frac{390\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$+\frac{1976\phi'_{12}}{3^{14}}+\frac{10868\phi'_{14}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{16}}{3^{20}},$$

$\alpha_4-\beta_5=\alpha_6$, 第六形 $Ch'h''$ 腰,

$$Ch'=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{140\phi'_4}{3^4}+\frac{273\phi'_6}{3^7}+\frac{624\phi'_8}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$+\frac{11856\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{351120\phi'_{16}}{3^{22}},$$

β_6, 第六形 $Ch'h''$ 底,

$$h'h''=\frac{7\phi'_3}{3}-\frac{140\phi'_5}{3^4}+\frac{273\phi'_7}{3^7}+\frac{624\phi'_9}{3^{10}}+\frac{2470\phi'_{11}}{3^{13}}$$

$$+\frac{11856\phi'_{13}}{3^{16}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{19}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{35\phi'_3}{3^2}+\frac{455\phi'_5}{3^5}-\frac{728\phi'_7}{3^8}-\frac{1482\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{5434\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{15}}{3^{20}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{35\phi'_4}{3^2}+\frac{455\phi'_6}{3^5}-\frac{728\phi'_8}{3^8}-\frac{1482\phi'_{10}}{3^{11}}$$

$$-\frac{5434\phi'_{12}}{3^{14}}-\frac{24700\phi'_{14}}{3^{17}}-\frac{125400\phi'_{16}}{3^{20}}$$

$a_6+\beta_7=a_8$, 第八形腰,

$$=\frac{10\phi'_2}{3}-\frac{455\phi'_4}{3^4}+\frac{4368\phi'_6}{3^7}-\frac{5928\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{10868\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{37050\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{159600\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{777480\phi'_{16}}{3^{22}},$$

....

故"三分弧之二起度各通弦率",

$\phi'_1=r_1 \quad \phi'_2=c_3$

$$a_{-1}-a_2,\ c_{\frac{1}{3}}=\frac{\phi'_2}{3}+\frac{\phi'_4}{3^4}+\frac{3\phi'_6}{3^7}+\frac{12\phi'_8}{3^{10}}+\frac{55\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{273\phi'_{12}}{3^{16}}$$

$$+\frac{1428\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{7752\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_2+a_4,\ c_{\frac{7}{3}}=\frac{7\phi'_2}{3}-\frac{35\phi'_4}{3^4}-\frac{42\phi'_6}{3^7}-\frac{132\phi'_8}{3^{10}}-\frac{539\phi'_{10}}{3^{13}}$$

$$-\frac{2489\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{12495\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{65686\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_4+a_6,\ c_{\frac{13}{3}}=\frac{13\phi'_2}{3}-\frac{260\phi'_4}{3^4}+\frac{858\phi'_6}{3^7}+\frac{858\phi'_8}{3^{10}}+\frac{2431\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{9282\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{41055\phi'_{14}}{3^{19}}+\frac{198237\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_6+a_8,\ c_{\frac{19}{3}}=\frac{19\phi'_2}{3}-\frac{836\phi'_4}{3^4}+\frac{8778\phi'_6}{3^7}-\frac{21318\phi'_8}{3^{10}}-\frac{17765\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{44574\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{156009\phi'_{14}}{3^{19}}-\frac{646323\phi'_{16}}{3^{22}},$$

"三分弧之二起度各倍矢率",

$$2\phi'_1-a_1-a_3,\ b_{\frac{2}{3}}=\frac{4\phi'_3}{3^2}+\frac{5\phi'_5}{3^5}+\frac{16\phi'_7}{3^8}+\frac{66\phi'_9}{3^{11}}+\frac{308\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{1547\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{8160\phi'_{15}}{3^{20}},$$

$$2\phi'_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{5}{3}}=\frac{25\phi'_3}{3^2}-\frac{100\phi'_5}{3^5}-\frac{110\phi'_7}{3^8}-\frac{330\phi'_9}{3^{11}}-\frac{1309\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{5950\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{29325\phi'_{15}}{3^{20}}$$

$$2\phi'_1-a_5-a_7,\ b_{\frac{8}{3}}=\frac{64\phi'_3}{3^2}-\frac{880\phi'_5}{3^5}+\frac{2464\phi'_7}{3^8}+\frac{2244\phi'_9}{3^{11}}-\frac{5984\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{21896\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{93840\phi'_{15}}{3^{20}},$$

又“三分弧之一起度各通弦率”

$$a_2+a_4,\ c_{\frac{5}{3}}=\frac{5\phi'_2}{3}-\frac{10\phi'_4}{3^4}-\frac{21\phi'_6}{3^7}-\frac{75\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{325\phi'_{10}}{3^{18}}-\frac{1560\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{7980\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$-\frac{42636\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_4+a_6,\ c_{\frac{11}{3}}=\frac{11\phi'_2}{3}-\frac{154\phi'_4}{3^4}+\frac{231\phi'_6}{3^7}+\frac{429\phi'_8}{3^{10}}$$

$$+\frac{1430\phi'_{10}}{3^{13}}+\frac{5928\phi'_{12}}{3^{16}}+\frac{27588\phi'_{14}}{3^{19}}$$

$$+\frac{137940\phi'_{16}}{3^{22}},$$

$$a_6+a_8,\ c_{\frac{17}{3}}=\frac{17\phi'_2}{3}-\frac{595\phi'_4}{3^4}+\frac{4641\phi'_6}{3^7}+\frac{5304\phi'_8}{3^{10}}$$

$$-\frac{8398\phi'_{10}}{3^{13}}-\frac{25194\phi'_{12}}{3^{16}}-\frac{96900\phi'_{14}}{3^{19}},$$

$$-\frac{426360\phi'_{16}}{3^{22}},$$

“三分弧之一起度各倍矢率”

$$2\phi'_1-a_1-a_3,\ b_{\frac{1}{3}}=\frac{\phi'_3}{3^2}+\frac{2\phi'_5}{3^5}+\frac{7\phi'_7}{3^8}+\frac{30\phi'_9}{3^{11}}+\frac{143\phi'_{11}}{3^{14}}$$

$$+\frac{728\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{3876\phi'_{15}}{3^{20}},$$

$$2\phi'_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{4}{3}}=\frac{16\phi'_3}{3^2}-\frac{28\phi'_5}{3^5}-\frac{56\phi'_7}{3^8}-\frac{195\phi'_9}{3^{11}}$$

$$-\frac{832\phi'_{11}}{3^{14}}-\frac{3952\phi'_{13}}{3^{17}}-\frac{20064\phi'_{15}}{3^{20}}$$

$$2\phi'_1-a_5-a_7,\ b_{\frac{7}{3}}=\frac{49\phi'_3}{3^2}-\frac{490\phi'_5}{3^5}+\frac{637\phi'_7}{3^8}+\frac{1092\phi'_9}{3^{11}}$$

$$+\frac{3458\phi'_{11}}{3^{14}}+\frac{13832\phi'_{13}}{3^{17}}+\frac{62700\phi'_{15}}{3^{20}}.$$

故 $$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\lfloor 3}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi'_6,$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi_8$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot 4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

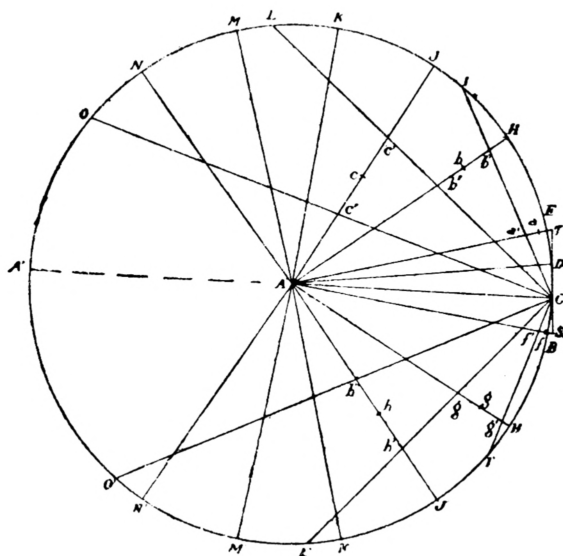
$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XIII)}$$

(第二: 令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{4}$)

如第三十五圖 BE 爲本弧,四分爲 $BC\left(=\frac{BE}{4}\right)$, $CE\left(=\frac{2BE}{4}\right)$, $EF\left(=\frac{BE}{4}\right)$,作 CE 弦引出圓外,交 AB, AF 之引長線於 S, T,則 $\triangle_s$ AST, ABF 爲相似三角形.又作 CI, CL, CO 各線爲 $\frac{10}{4}$, $\frac{18}{4}$, $\frac{26}{4}$ 弧通弦.

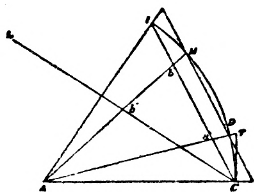
$\frac{n}{4}$ 分弧起度,可分爲 $\frac{3}{4}$ 分弧起度,及 $\frac{1}{4}$ 分弧起度之二例.

如前例,前者以 $A'AC$ 線上半圓起算,後者以 $A'AC$ 線下半圓起算.

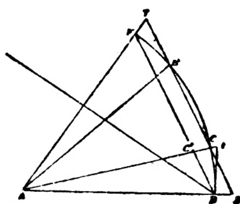


第三十五圖

次如前用"借率法",幷參觀(*B*)半分起度弦矢率論,附圖第三十一圖,及第三十六圖



第三十一圖



第三十六圖

因 $AS=\frac{AC\times AB}{Ac'}=\frac{r\cdot r}{\phi_1-\frac{3}{2^3}\phi_3-\frac{5}{2^7}\phi_5-\frac{14}{2^{11}}\phi_7-\frac{45}{2^{15}}\phi_9-\frac{154}{2^{19}}\phi_{11}-\frac{546}{2^{23}}\phi_{13}-\frac{1980}{2^{27}}\phi_{15}}$,

而 Ac' 卽前半 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 分起度之第三形腰; Aa'

故　第一形 AST 腰,

$$AS=\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}.$$

又因 $CS=\frac{AC\times BC'}{AC'}=\frac{AC\times Bt}{AC'}$（第三十六圖）

$$=\frac{\phi_1\left(\frac{\phi_2}{2}+\frac{\phi_4}{2^4}+\frac{3\phi_6}{2^8}+\frac{10\phi_8}{2^{12}}+\frac{35\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{126\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{462\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1716\phi_{16}}{2^{28}}\right)}{\phi_1-\frac{3\phi_3}{2^3}-\frac{5\phi_5}{2^7}-\frac{14\phi_7}{2^{11}}-\frac{45\phi_9}{2^{15}}-\frac{154\phi_{11}}{2^{19}}-\frac{546\phi_{13}}{2^{23}}-\frac{1980\phi_{15}}{2^{27}}}$$

而 Bt 卽前半 $\left(\frac{1}{2}\right)$ 分起度之第二形腰, CT.（第三十一圖）,

故　第二形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{16}}$$

$$+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}}.$$

復次用"易率法":

因　$b_2=4\phi_3-\phi_5.$

令　$\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_2.$

即　$\frac{\phi'_3}{2^2}=\phi_3-\frac{4\phi_5}{2^4},$

則　$\frac{\phi'_5}{2^4}=\phi_5-\frac{8\phi_7}{2^4}+\frac{16\phi_9}{2^8},$

$$\frac{\phi'_7}{2^6}=\phi_7-\frac{12\phi_9}{2^4}+\frac{48\phi_{11}}{2^8}-\frac{24\phi_{13}}{2^{12}},$$

$$\frac{\phi'_9}{2^8}=\phi_9-\frac{16\phi_{11}}{2^4}+\frac{96\phi_{13}}{2^8}-\frac{256\phi_{15}}{2^{12}}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{11}}{2^{10}}=\phi_{11}-\frac{20\phi_{13}}{2^4}+\frac{160\phi_{15}}{2^8}-\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{13}}{2^{12}}=\phi_{13}-\frac{24\phi_{15}}{2^4}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{\phi'_{15}}{2^{14}}=\phi_{15}-\cdots\cdots,$$

因以上之關係,可逐次代入化得:

第一形腰之易率式,

$$\phi_1+\frac{3\phi_3}{2^3}+\frac{23\phi_5}{2^7}+\frac{182\phi_7}{2^{11}}+\frac{1451\phi_9}{2^{15}}+\frac{11594\phi_{11}}{2^{19}}+\frac{92710\phi_{13}}{2^{23}}$$

$$+\frac{741548\phi_{15}}{2^{27}}=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}}.$$

而 $35=23+3\times4,$

$462=182+35\times8,$

$6435=1451+462\times12-35\times16,$

$92378=11594+6435\times16-462\times48,$

$1352078=92710+92378\times20-6435\times96+462\times64,$

$20058300=741548+1352078\times24-92378\times160$

$+6435\times256.$

又因 $$c_2=2\phi_2-\frac{\phi_4}{2^2}-\frac{\phi_6}{2^6}-\frac{2\phi_8}{2^{10}}-\frac{5\phi_{10}}{2^{14}}-\frac{14\phi_{12}}{2^{18}}$$

$$-\frac{42\phi_{14}}{2^{22}}-\frac{132\phi_{16}}{2^{26}}.$$

$$b_2=4\phi_3-\phi_5,$$

如前令 $\phi'_1=\phi_1,$ $\phi_3'=b_2,$

則 $$\frac{\phi'_2}{2}=\frac{c_2}{2}=\phi_2-\frac{2\phi_4}{2^4}-\frac{2\phi_6}{2^8}-\frac{4\phi_8}{2^{12}}-\frac{10\phi_{10}}{2^{16}}-\frac{28\phi_{12}}{2^{20}}-\frac{84\phi_{14}}{2^{24}}-\frac{264\phi_{16}}{2^{28}}.$$

蓋因 $$\frac{\phi'_3}{2^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{2}\cdot\frac{\phi'_2}{2}}{\phi_1}=\frac{b_2}{2^2}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2^2}$$ 也.

同理, $$\frac{\phi'_4}{2^3}=\frac{\frac{\phi'_2}{2}\cdot\frac{\phi'_3}{2^2}}{\phi_1}=\phi_4-\frac{6\phi_6}{2^4}+\frac{6\phi_8}{2^8}+\frac{4\phi_{10}}{2^{12}}+\frac{6\phi_{12}}{2^{16}}+\frac{12\phi_{14}}{2^{20}}+\frac{28\phi_{16}}{2^{24}},$$

$$\frac{\phi'_6}{2^5}=\phi_6-\frac{10\phi_8}{2^4}+\frac{30\phi_{10}}{2^8}-\frac{20\phi_{12}}{2^{12}}-\frac{10\phi_{14}}{2^{16}}-\frac{12\phi_{16}}{2^{20}},$$

$$\frac{\phi'_8}{2^7}=\phi_8-\frac{14\phi_{10}}{2^4}+\frac{70\phi_{12}}{2^8}-\frac{140\phi_{14}}{2^{12}}+\frac{70\phi_{16}}{2^{16}},$$

$$\frac{\phi'_{10}}{2^9}=\phi_{10}-\frac{18\phi_{12}}{2^4}+\frac{126\phi_{14}}{2^8}-\frac{420\phi_{16}}{2^{12}},$$

$$\frac{\phi'_{12}}{2^{11}}=\phi_{12}-\frac{22\phi_{14}}{2^4}+\frac{198\phi_{16}}{2^8},$$

$$\frac{\phi'_{14}}{2^{13}}=\phi_{14}-\frac{26\phi_{16}}{2^4},$$

$$\frac{\phi'_{16}}{2^{15}}=\phi_{16}.$$

因以上之關係,可逐次代入,化得,

第二形腰之易率式,

$$\frac{\phi_2}{2}+\frac{4\phi_4}{2^4}+\frac{32\phi_6}{2^8}+\frac{256\phi_8}{2^{12}}+\frac{2048\phi_{10}}{2^{16}}+\frac{16384\phi_{12}}{2^{20}}+\frac{131072\phi_{14}}{2^{24}}$$

$$+\frac{1048576\phi_{16}}{2^{28}},$$

$$=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{2^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}$$

$$+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{47}},$$

而 $$5=4+\frac{2}{2},$$

$$63=32+5\times6+\frac{2}{2},$$

$$858=256+63\times10-5\times6+\frac{4}{2},$$

$$12155=2048+858\times14-63\times30-5\times4+\frac{10}{2}$$

$$176358=16384+12155\times18-858\times70+63\times20$$

$$-5\times6+\frac{28}{2},$$

$$2600150=131072+176358\times22-12155\times126$$

$$+858\times140+63\times10-5\times12+\frac{84}{2},$$

$$38779380=1048576+2600150\times 26-176358\times 198$$
$$+12155\times 420-858\times 70+63\times 12-5\times 28$$
$$+\frac{264}{2}.$$

………………………………………………………………

由是得"求四分之三起度各形腰底率",

a_{-1}, 負第一形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{2^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}$$
$$+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{43}},$$

a_1, 第一形 AST 腰,

$$AS=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$
$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_1, 第一形 AST 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{3\phi'_4}{2^5}+\frac{35\phi'_6}{2^{11}}+\frac{462\phi'_8}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_{10}}{2^{23}}$$
$$+\frac{92378\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$-a_{-1}+\beta_1=a_2$, 第二形 CTa' 腰,

$$CT=\frac{3\phi'_2}{2^2}+\frac{7\phi'_4}{2^7}+\frac{77\phi'_6}{2^{13}}+\frac{990\phi'_8}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_2, 第二形 CTa' 底,

$$Ta'=\frac{3\phi'_3}{2^2}+\frac{7\phi'_5}{2^7}+\frac{77\phi'_7}{2^{13}}+\frac{990\phi'_9}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Aa'b'$ 腰,

$$Aa'=\phi'_1-\frac{21\phi'_3}{2^5}-\frac{77\phi'_5}{2^{11}}-\frac{770\phi'_7}{2^{17}}-\frac{9405\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{124982\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{1738386\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{24872292\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_3, 第三形 $Aa'b'$ 底,

$$a'b'=\phi'_2-\frac{21\phi'_4}{2^5}-\frac{77\phi'_6}{2^{11}}-\frac{770\phi'_8}{2^{17}}-\frac{9405\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{124982\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{1738386\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{24872292\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cb'b''$ 腰,

$$Cb'=\frac{7\phi'_2}{2^2}-\frac{77\phi'_4}{2^7}-\frac{231\phi'_6}{2^{13}}-\frac{2090\phi'_8}{2^{19}}-\frac{24035\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$-\frac{306774\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{4145382\phi'_{14}}{2^{37}}-\frac{58035348\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_4，第四形 $Cb'b''$ 底，

$$b'b''=\frac{7\phi'_3}{2^2}-\frac{77\phi'_5}{2^7}-\frac{231\phi'_7}{2^{13}}-\frac{2090\phi'_9}{2^{19}}-\frac{24035\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$-\frac{306774\phi'_{13}}{2^{31}}-\frac{4145382\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_3-\beta_4=\alpha_5$，第五形 $Ab''c'$ 腰，

$$Ab''=\phi'_1-\frac{77\phi'_3}{2^5}+\frac{1155\phi'_5}{2^{11}}+\frac{2926\phi'_7}{2^{17}}+\frac{24035\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{259578\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{3169998\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{41453820\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_5，第五形 $Ab''c'$ 底，

$$b''c'=\phi'_2-\frac{77\phi'_4}{2^5}+\frac{1155\phi'_6}{2^{11}}+\frac{2926\phi'_8}{2^{17}}+\frac{24035\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{259578\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{3169998\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_4+\beta_5=\alpha_6$，第六形 $Cc'c''$ 腰，

$$Cc'=\frac{11\phi'_2}{2^2}-\frac{385\phi'_4}{2^7}+\frac{4389\phi'_6}{2^{13}}+\frac{9614\phi'_8}{2^{19}}$$

$$+\frac{72105\phi'_{10}}{2^{25}}+\frac{731538\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$+\frac{107779932\phi'_{16}}{2^{43}}$$

β_6, 第六形 $Cc'c''$ 底,

$$c'c''=\frac{11\phi'_3}{2^2}-\frac{385\phi'_5}{2^7}+\frac{4389\phi'_7}{2^{13}}+\frac{9614\phi'_9}{2^{19}}$$

$$+\frac{72105\phi'_{11}}{2^{25}}+\frac{731538\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{8534610\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_5-\beta_6=\alpha_7$, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{165\phi'_3}{2^5}+\frac{7315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_7}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{95099940\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{165\phi'_4}{2^5}+\frac{7315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{67298\phi'_8}{2^{17}}-\frac{129789\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{894102\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{95099940\phi'_{16}}{2^{41}}$$

$\alpha_6+\beta_7=\alpha_8$, 第八形腰,

$$=\frac{15\phi'_2}{2^2}-\frac{1045\phi'_4}{2^7}+\frac{33649\phi'_6}{2^{13}}-\frac{259578\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{447051\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{2844870\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{25603830\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{272619828\phi'_{16}}{2^{43}},$$

……………………………………………

又"求四分之一起度各形腰底率",

α_{-2},負第二形 CTa' 腰,

$$CT=\frac{3\phi'_2}{2^2}+\frac{7\phi'_4}{2^7}+\frac{77\phi'_6}{2^{13}}+\frac{990\phi'_8}{2^{19}}+\frac{13585\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{193154\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2808162\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{41453820\phi'_{16}}{2^{43}},$$

α_1, 第一形 AST' 腰,

$$AT=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{2^5}+\frac{35\phi'_5}{2^{11}}+\frac{462\phi'_7}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_1, 第一形 AST' 底,

$$ST=\phi'_2+\frac{3\phi'_4}{2^5}+\frac{35\phi'_6}{2^{11}}+\frac{462\phi'_8}{2^{17}}+\frac{6435\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{92378\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{1352078\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{20058300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$-\alpha_{-2}+\beta_1=\alpha_2$, 第二形 CSf' 腰,

$$CS=\frac{\phi'_2}{2^2}+\frac{5\phi'_4}{2^7}+\frac{63\phi'_6}{3^{13}}+\frac{858\phi'_8}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{176358\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{38779380\phi'_{16}}{2^{43}},$$

β_2, 第二形 CSf' 底,

$$Sf'=\frac{\phi'_3}{2^2}+\frac{5\phi'_5}{2^7}+\frac{63\phi'_7}{2^{13}}+\frac{858\phi'_9}{2^{19}}+\frac{12155\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{176358\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{2600150\phi'_{15}}{2^{37}},$$

$\alpha_1-\beta_2=\alpha_3$, 第三形 $Af'g'$ 腰,

$$Af'=\phi'_1-\frac{5\phi'_3}{2^5}-\frac{45\phi'_5}{2^{11}}-\frac{546\phi'_7}{2^{17}}-\frac{7293\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{102102\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{1469650\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{21544100\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_3, 第三形 $Af'g'$ 底,

$$f'g'=\phi'_2-\frac{5\phi'_4}{2^5}-\frac{45\phi'_6}{2^{11}}-\frac{546\phi'_8}{2^{17}}-\frac{7293\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{102102\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{1469650\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{21544100\phi'_{16}}{2^{41}},$$

$\alpha_2+\beta_3=\alpha_4$, 第四形 $Cg'g''$ 腰,

$$Cg'=\frac{5\phi'_2}{2^2}-\frac{15\phi'_4}{2^7}-\frac{117\phi'_6}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_8}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$-\frac{232050\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{14}}{2^{37}}-\frac{47397020\phi'_{16}}{2^{43}},$$

β_4, 第四形 $Cg'g''$ 底,

$$g'g''=\frac{5\phi'_3}{2^2}-\frac{15\phi'_5}{2^7}-\frac{117\phi'_7}{2^{13}}-\frac{1326\phi'_9}{2^{19}}-\frac{17017\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$-\frac{232050\phi'_{13}}{2^{31}}-\frac{3278450\phi'_{15}}{2^{37}},$$

α_5, 第五形 $Ag''h'$ 腰,

$$Ag''=\phi'_1-\frac{45\phi'_3}{2^5}+\frac{195\phi'_5}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_7}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_9}{2^{23}}$$

$$+\frac{170170\phi'_{11}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{13}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_5, 第五形 $Ag''h'$ 底,

$$g''h'=\phi_2-\frac{45\phi'_4}{2^5}+\frac{195\phi'_6}{2^{11}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{17}}+\frac{13923\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$+\frac{170170\phi'_{12}}{2^{29}}+\frac{2243150\phi'_{14}}{2^{35}}+\frac{30911100\phi'_{16}}{2^{41}},$$

α_6, 第六形 $Ch'h''$ 腰,

$$Ch'=\frac{9\phi'_2}{2^2}-\frac{195\phi'_4}{2^7}+\frac{663\phi'_6}{2^{13}}+\frac{3978\phi'_8}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{10}}{2^{25}}$$

$$+\frac{448630\phi'_{12}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{14}}{2^{37}}+\frac{76247380\phi'_{16}}{2^{43}},$$

β_6, 第六形 $Ch'h''$ 底,

$$h'h''=\frac{9\phi'_3}{2^2}-\frac{195\phi'_5}{2^7}+\frac{663\phi'_7}{2^{13}}+\frac{3978\phi'_9}{2^{19}}+\frac{38675\phi'_{11}}{2^{25}}$$

$$+\frac{448630\phi'_{13}}{2^{31}}+\frac{5694150\phi'_{15}}{2^{37}},$$

α_7, 第七形腰,

$$=\phi'_1-\frac{117\phi'_3}{2^5}+\frac{3315\phi'_5}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_7}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_9}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{11}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{13}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{15}}{2^{41}},$$

β_7, 第七形底,

$$=\phi'_2-\frac{117\phi'_4}{2^5}+\frac{3315\phi'_6}{2^{11}}-\frac{9282\phi'_8}{2^{17}}-\frac{49725\phi'_{10}}{2^{23}}$$

$$-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{29}}-\frac{4934930\phi'_{14}}{2^{35}}-\frac{60195300\phi'_{16}}{2^{41}},$$

α_8, 第八形腰,

$$=\frac{13\phi'_2}{2^2}-\frac{663\phi'_4}{2^7}+\frac{13923\phi'_6}{2^{13}}-\frac{33150\phi'_8}{2^{19}}$$

$$-\frac{160225\phi'_{10}}{2^{25}}-\frac{1355890\phi'_{12}}{2^{31}}-\frac{14045570\phi'_{14}}{2^{37}}$$

$$-\frac{164533820\phi'_{16}}{2^{43}}.$$

故"四分弧之三起度各通弦率",

$$-\alpha_{-1}+\alpha_2,\quad c_{\frac{2}{4}}=c_{\frac{1}{2}}=\frac{\phi'_2}{2}+\frac{\phi'_4}{2^6}+\frac{7\phi'_6}{2^{12}}+\frac{66\phi'_8}{2^{18}}+\frac{715\phi'_{10}}{2^{24}}$$

$$+\frac{8398\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{104006\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{1337020\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_2+a_4,\ c_{\frac{10}{4}}=c_{\frac{5}{2}}=\frac{5\phi'_2}{2}-\frac{35\phi'_4}{2^6}-\frac{77\phi'_6}{2^{12}}-\frac{550\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{5225\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{56810\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{668610\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{8290764\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_4+a_6,\ c_{\frac{18}{4}}=c_{\frac{9}{2}}=\frac{9\phi'_2}{2}-\frac{231\phi'_4}{2^6}+\frac{2079\phi'_6}{2^{12}}+\frac{3762\phi'_8}{2^{18}}$$

$$+\frac{24035\phi'_{10}}{2^{24}}+\frac{212382\phi'_{12}}{2^{30}}+\frac{2194614\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$+\frac{24872292\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_6+a_8,\ c_{\frac{26}{4}}=c_{\frac{13}{2}}=\frac{13\phi'_2}{2}-\frac{715\phi'_4}{2^6}+\frac{19019\phi'_6}{2^{12}}$$

$$-\frac{124982\phi'_8}{2^{18}}-\frac{187473\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{1056666\phi'_{12}}{2^{30}}$$

$$-\frac{8534610\phi'_{14}}{2^{36}}-\frac{8241948\phi'_{16}}{2^{42}};$$

“四分弧之三起度各倍矢率”,

$$2\phi_1-a_1-a_3,\ b_{\frac{3}{4}}=\frac{9\phi'_3}{4^2}+\frac{21\phi'_5}{4^5}+\frac{154\phi'_7}{4^8}+\frac{1485\phi'_9}{4^{11}}$$

$$+\frac{16302\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{193154\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{2406996\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_3-a_5,\ b_{\frac{4}{7}}=\frac{49\phi'_3}{4^2}-\frac{539\phi'_5}{4^5}-\frac{1078\phi'_7}{4^8}-\frac{7315\phi'_9}{4^{11}}$$

$$-\frac{67298\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{715806\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{8290764\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_5-a_7,\ b_{\frac{11}{4}}=\frac{121\phi'_3}{4^2}-\frac{4235\phi'_5}{4^5}+\frac{32186\phi'_7}{4^8}+\frac{52877\phi'_9}{4^{11}}$$

$$+\frac{317262\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{2682306\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{26823060\phi'_{15}}{4^{20}};$$

*　　*　　*

又"四分弧之一起度各通弦率",

$$a_2+a_4,,\ c_{\frac{3}{2}}=\frac{3\phi'_2}{2}-\frac{5\phi'_4}{2^6}-\frac{27\phi'_6}{2^{12}}-\frac{234\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{2431\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{27846\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{339150\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{4308820\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_4+a_6,\quad c_{\frac{7}{2}}=\frac{7\phi'_2}{2}-\frac{105\phi'_4}{2^6}+\frac{273\phi'_6}{2^{12}}+\frac{1326\phi'_8}{2^{18}}$$

$$+\frac{10829\phi'_{10}}{2^{24}}+\frac{108290\phi'_{12}}{2^{30}}$$

$$+\frac{1207850\phi'_{14}}{2^{36}}+\frac{14425180\phi'_{16}}{2^{42}},$$

$$a_6+a_8,\quad c_{\frac{11}{2}}=\frac{11\phi'_2}{2}-\frac{429\phi'_4}{2^6}+\frac{7293\phi'_6}{2^{12}}-\frac{14589\phi'_8}{2^{18}}$$

$$-\frac{60775\phi'_{10}}{2^{24}}-\frac{448630\phi'_{12}}{2^{30}}-\frac{4175710\phi'_{14}}{2^{36}}$$

$$-\frac{44143220\phi'_{16}}{2^{42}},$$

"四分弧之一起度各倍矢率",

$$2\phi_1-a_1-a_3,\quad b_{\frac{1}{4}}=\frac{\phi'_3}{4^2}+\frac{5\phi'_5}{4^5}+\frac{42\phi'_7}{4^8}+\frac{429\phi'_9}{4^{11}}+\frac{4862\phi'_{11}}{4^{14}}$$

$$+\frac{58786\phi'_{13}}{4^{17}}+\frac{742900\phi'_{15}}{4^{20}},$$

$$2\phi_1-a_3-a_5,\quad b_{\frac{5}{4}}=\frac{25\phi'_3}{4^2}-\frac{75\phi'_5}{4^5}-\frac{390\phi'_7}{4^8}-\frac{3315\phi'_9}{4^{11}}$$

$$-\frac{34034\phi'_{11}}{4^{14}}-\frac{386750\phi'_{13}}{4^{17}}-\frac{4683500\phi'_{15}}{4^{20}}$$

$$2\phi_1-a_5-a_7,\quad b_{\frac{9}{4}}=\frac{81\phi'_3}{4^2}-\frac{1755\phi'_5}{4^5}+\frac{3978\phi'_7}{4^8}$$

$$+\frac{17901\phi'_9}{4^{11}}+\frac{139230\phi'_{11}}{4^{14}}+\frac{1345890\phi'_{13}}{4^{17}}$$

$$+\frac{14642100\phi'_{15}}{4^{20}},$$

故 $$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\underline{\lfloor 3}}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\underline{\lfloor 5}}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\underline{\lfloor 7}}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^9-1^2\right\}}{3\cdot 4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\phi'_7$$

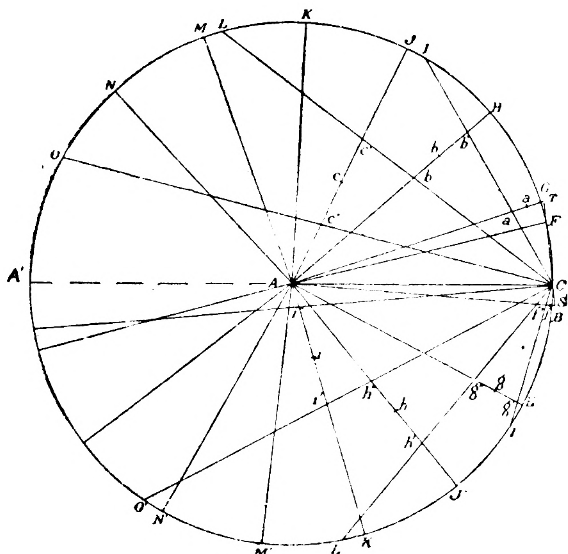
$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XIII)}$$

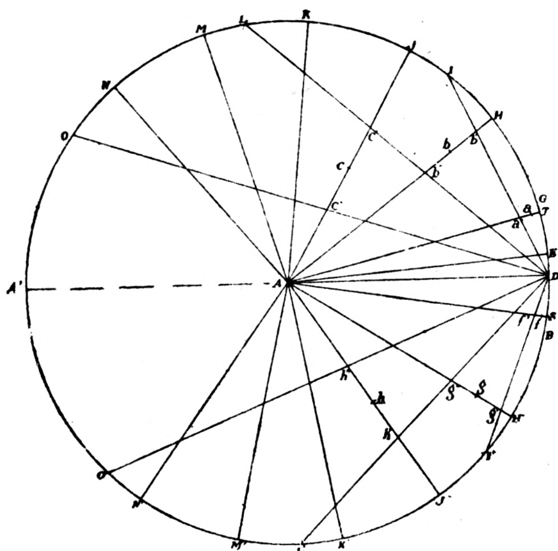
$\left(\text{第三:}\quad \text{令}\ \frac{n}{m}=\frac{n}{5}\right)$

如第三十七圖,及第三十八圖.

BG爲本弧,各析爲 $BC\left(=\frac{BG}{5}\right)$, $CG\left(=\frac{4BG}{5}\right)$,或 $BD\left(=\frac{2BG}{5}\right)$, $DG\left(=\frac{3BG}{5}\right)$.如前作線成相似形.又作 $\frac{3}{5},\frac{13}{5},\frac{23}{5},\frac{33}{5};\frac{7}{5},\frac{17}{5},\frac{27}{5};\frac{1}{5},\frac{11}{5},\frac{21}{5},\frac{31}{5};\frac{9}{5},\frac{19}{5},\frac{29}{5}$ 各通弦線.



第三十七圖



第三十八圖

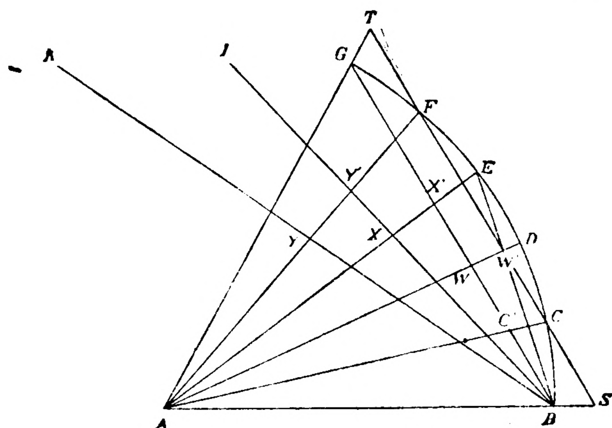
次如前用"借率法",並參觀(A)整分起度弦矢率論,附圖第三十圖,及第三十九圖.

$\frac{1}{5}$ 第一形 AST 腰 AS

$$=\frac{AW'\cdot(=AC')AB}{AW}$$

$$=\frac{(\phi_1-\phi_3)\phi_1}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=\phi_1+2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}$$
$$+610\phi_{15}$$



第三十九圖

又在 $\triangle BCS$ 內, $\angle BCS=\frac{2}{5}a$,

$\triangle BAW$ 內, $\angle BAW=\frac{2}{5}a$,

又 $\angle CSB=\angle WBA$

故 $\triangle_s BCS, BAW$ 爲相似三角形.

$\frac{1}{5}$ 第二形 CSf' 腰 CS

$$=\frac{AC\cdot BC}{AW}=\frac{\phi_1\cdot\phi_2}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=\phi_2+3\phi_4+8\phi_6+21\phi_8+55\phi_{10}+144\phi_{12}+377\phi_{14}$$

$$+987\phi_{16}$$

次如前用"借率法",並參觀(A)整分起度弦矢率論,附圖第三十圖,及第四十圖.

第四十圖

$\frac{2}{5}$第一形AST腰AS

$$=\phi_1+3\phi_3+8\phi_5+21\phi_7+55\phi_9+144\phi_{11}+377\phi_{13}$$

$$+987\phi_{15}$$

$\frac{2}{5}$第二形DSf'腰DS

$$=\frac{AD\cdot BW\ (=BW')}{AW}=\frac{\phi_1(3\phi_2-\phi_4)}{\phi_1-3\phi_3+\phi_5}$$

$$=2\phi_2+5\phi_4+13\phi_6+34\phi_8+89\phi_{10}+233\phi_{12}+610\phi_{14}$$
$$+1597\phi_{16}.$$

復次用"易率法"

因 $$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$$

令 $$\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5.$$

則 $$\frac{\phi'_3}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\frac{7\phi_7}{5}-\frac{2\phi_9}{5}+\frac{\phi_{11}}{5^2}$$

$$\frac{\phi'_5}{5^4}=\phi_5-4\phi_7+\frac{34\phi_9}{5}-\frac{32\phi_{11}}{5}+\frac{81\phi_{13}}{5^2}-\frac{32\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_7}{5^6}=\phi_7-6\phi_9+\frac{81\phi_{11}}{5}-\frac{130\phi_{13}}{5}+\frac{690\phi_{15}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_9}{5^8}=\phi_9-8\phi_{11}+\frac{148\phi_{13}}{5}-\frac{336\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{11}}{5^{10}}=\phi_{11}-10\phi_{13}+\frac{235\phi_{15}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{13}}{5^{12}}=\phi_{13}-12\phi_{15},$$

$$\frac{\phi'_{15}}{5^{14}}=\phi_{15}.$$

故 $\frac{1}{5}$ 第一形腰 AS

$$=\phi_1+2\phi_3+5\phi_5+13\phi_7+34\phi_9+89\phi_{11}+233\phi_{13}$$
$$+610\phi_{15}$$

$$=\phi'_1+\frac{2\phi'_3}{5^2}+\frac{9\phi'_5}{5^4}+\frac{231\phi'_7}{5^7}+\frac{1254\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{35112\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{200564\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1161508\phi'_{15}}{5^{16}},$$

而 $2=2,$

$9=2\times2+5,$

$231=13\times5+9\times4-2\times7,$

$1254=34\times5+231\times6-9\times34+2\times2,$

$35112=89\times5^2+1254\times8\times5-231\times81+32\times9\times5$

$-2\times1,$

$200564=233\times5^2+35112\times10-1254\times148+231\times130$

$-9\times81,$

$1161508=610\times5^2+200564\times12-35112\times\frac{235}{5}$

$+1254\times336-231\times\frac{690}{5}+9\times32.$

又因 $c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}.$

如前令 $\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5,$

則 $\frac{\phi'_2}{5}=\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}.$

蓋因從定義 $\phi'_1:\frac{\phi'_2}{5}=\frac{\phi'_2}{5}:\frac{\phi'_3}{5^2},$

$$\frac{\phi'_3}{5^2}=\frac{\frac{\phi'_2}{5}\cdot\frac{\phi_2'}{5}}{\phi_1}=\frac{b_5}{5^2}=\phi_3-2\phi_5+\frac{7\phi_7}{5}-\frac{2\phi_9}{5}+\frac{\phi_{11}}{5^2},$$

同理 $$\frac{\phi'_4}{5^3}=\frac{1}{\phi_1}\left\{\frac{\phi'_2}{5}\cdot\frac{\phi'_3}{5^2}\right\}=\phi_4-3\phi_6+\frac{18\phi_8}{5}-\frac{11\phi_{10}}{5}$$

$$+\frac{18\phi_{12}}{5^2}-\frac{3\phi_{14}}{5^2}+\frac{\phi_{16}}{5^3},$$

$$\frac{\phi'_6}{5^5}=\phi_6-5\phi_8+\frac{55\phi_{10}}{5}-\frac{70\phi_{12}}{5}+\frac{285\phi_{14}}{5^2}-\frac{155\phi_{16}}{5^2},$$

$$\frac{\phi'_8}{5^7}=\phi_8-7\phi_{10}+\frac{112\phi_{12}}{5}-\frac{217\phi_{14}}{5}+\frac{1421\phi_{16}}{5^2}$$

$$\frac{\phi'_{10}}{5^9}=\phi_{10}-9\phi_{12}+\frac{189\phi_{14}}{5}-\frac{492\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{12}}{5^{11}}=\phi_{12}-11\phi_{14}+\frac{286\phi_{16}}{5},$$

$$\frac{\phi'_{14}}{5^{13}}=\phi_{14}-13\phi_{16},$$

$$\frac{\phi'_{16}}{5^{15}}=\phi_{16}.$$

故 $\frac{1}{5}$ 第二形腰 CS

$$=\phi_2+3\phi_4+8\phi_6+21\phi_8+55\phi_{10}+144\phi_{12}+377\phi_{14}$$

$$+987\phi_{16},$$

$$=\frac{\phi'_2}{5}+\frac{4\phi'_4}{5^3}+\frac{99\phi'_6}{5^6}+\frac{528\phi'_8}{5^8}+\frac{2926\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$+\frac{82992\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{478268\phi'_{14}}{5^{16}}+\frac{13938096\phi'_{16}}{5^{18}},$$

而 $4=3+1,$

$$99=8\times5+4\times3\times5-1,$$

$$528=21\times5+99\times5-4\times18,$$

$$2926=55\times5+528+7-99\times\frac{55}{5}+4\times11,$$

$$82992=144\times5^2+2926\times9\times5-528\times112+99\times70$$
$$-4\times18,$$

……………………………………………

復次用"易率法":

因 $b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11},$

令 $\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5,$

如前求得 $\frac{\phi'_3}{5^2}, \frac{\phi'_5}{5^4}, \frac{\phi'_7}{5^6}, \frac{\phi'_9}{5^8}, \frac{\phi'_{11}}{5^{10}}, \frac{\phi'_{13}}{5^{12}}, \frac{\phi'_{15}}{5^{14}}.$

故 $\frac{2}{5}$第一形腰AS

$$=\phi_1+3\phi_3+8\phi_5+21\phi_7+55\phi_9+144\phi_{11}+377\phi_{13}$$
$$+987\phi_{15},$$

$$=\phi'_1+\frac{3\phi'_3}{5^2}+\frac{14\phi'_5}{5^4}+\frac{364\phi'_7}{5^7}+\frac{1989\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{55913\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{320229\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1858032\phi'_{15}}{5^{16}}.$$

又因 $c_5=5\phi_2-5\phi_4+\phi_6$

$$b_5=25\phi_3-50\phi_5+35\phi_7-10\phi_9+\phi_{11}$$

如前令 $\phi'_1=\phi_1,\quad \phi'_3=b_5,$

由是求得 $\frac{\phi'_2}{5},\frac{\phi'_4}{5^3},\frac{\phi'_6}{5^5},\frac{\phi'_8}{5^7},\frac{\phi'_{10}}{5^9},\frac{\phi'_{12}}{5^{11}},\frac{\phi'_{14}}{5^{13}},\frac{\phi'_{16}}{5^{15}},$

故 $\frac{2}{5}$ 第二形腰，

$$DS=2\phi_2+5\phi_4+13\phi_6+34\phi_8+89\phi_{10}+233\phi_{12}+610\phi_{14}$$
$$+1597\phi_{16}$$
$$=\frac{2\phi'_2}{5}+\frac{7\phi'_4}{5^3}+\frac{168\phi'_6}{5^6}+\frac{884\phi'_8}{5^8}+\frac{4862\phi'_{10}}{5^{10}}$$
$$+\frac{137241\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{788256\phi'_{14}}{5^{16}}+\frac{22915728\phi'_{16}}{5^{18}},$$

復次求得 $\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5}$ 起度各形腰底率.

由是得"五分弧之四起度各通弦率"，

$$c_{\frac{3}{5}}=\frac{3\phi'_2}{5}+\frac{2\phi'_4}{5^3}+\frac{27\phi'_6}{5^6}+\frac{99\phi'_8}{5^8}+\frac{418\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$+\frac{9576\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{46284\phi'_{14}}{5^{15}}+\frac{1161508\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{1}{5}3}=\frac{13\phi'_2}{5}-\frac{78\phi'_4}{5^3}+\frac{273\phi'_6}{5^6}-\frac{741\phi'_8}{5^8}-\frac{2717\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$-\frac{57305\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{262276\phi'_{14}}{5^{15}}-\frac{6332082\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{2}{5}3}=\frac{23\phi'_2}{5}-\frac{483\phi'_4}{5^3}+\frac{9177\phi'_6}{5^6}-\frac{5244\phi'_8}{5^8}$$

$$+\frac{12673\phi'_{10}}{5^{10}}+\frac{215441\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{861764\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$+\frac{18958808\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{3}{5}3}=\frac{33\phi'_2}{5}-\frac{1463\phi'_4}{5^3}+\frac{79002\phi'_6}{5^6}-\frac{218196\phi'_8}{5^8}$$

$$-\frac{103037\phi'_{10}}{5^{10}}-\frac{1095939\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{3400221\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$-\frac{63470792\phi'_{16}}{5^{18}};$$

“五分弧之四起度各倍矢率”,

$$b_{\frac{4}{5}}=\frac{16\phi'_3}{5^2}+\frac{12\phi'_5}{5^4}+\frac{168\phi'_7}{5^7}+\frac{727\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{13376\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{61712\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{299744\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{9}{5}}=\frac{81\phi'_3}{5^2}+\frac{378\phi'_5}{5^4}-\frac{1297\phi'_7}{5^7}-\frac{3078\phi'_9}{5^9}$$

$$-\frac{54549\phi'_{11}}{5^{12}}-\frac{224828\phi'_{13}}{5^{14}}-\frac{1011636\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{14}{5}}=\frac{196\phi'_3}{5^2}-\frac{2793\phi'_5}{5^4}+\frac{44688\phi'_7}{5^7}+\frac{23142\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{262276\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{852397\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{3297184\phi'_{15}}{5^{16}};$$

又“五分弧之一起度各通弦率”，

$$c_{\frac{7}{5}}=\frac{7\phi'_2}{5}-\frac{7\phi'_4}{5^3}-\frac{77\phi'_6}{5^6}-\frac{264\phi'_8}{5^8}-\frac{1078\phi'_{10}}{5^{10}}$$

$$-\frac{24206\phi'_{12}}{5^{13}}-\frac{115444\phi'_{14}}{5^{15}}-\frac{2869608\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{17}{5}}=\frac{17\phi'_2}{5}-\frac{187\phi'_4}{5^3}+\frac{748\phi'_6}{5^6}+\frac{1496\phi'_8}{5^8}$$

$$+\frac{4862\phi'_{10}}{5^{10}}+\frac{95914\phi'_{12}}{5^{13}}+\frac{420546\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$+\frac{9852792\phi'_{16}}{5^{18}},$$

$$c_{\frac{27}{5}}=\frac{27\phi'_2}{5}-\frac{792\phi'_4}{5^3}+\frac{24948\phi'_6}{5^6}-\frac{15444\phi'_8}{5^8}$$

$$-\frac{26598\phi'_{10}}{5^{10}}-\frac{391716\phi'_{12}}{5^{18}}-\frac{1441314\phi'_{14}}{5^{15}}$$

$$-\frac{29993058\phi'_{16}}{5^{18}},$$

"五分弧之一起度各倍矢率",

$$b_{\frac{1}{5}}=\frac{\phi'_3}{5^2}+\frac{2\phi'_5}{5^4}+\frac{33\phi'_7}{5^7}+\frac{132\phi'_9}{5^9}+\frac{2926\phi'_{11}}{5^{12}}$$

$$+\frac{13832\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{68324\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{6}{5}}=\frac{36\phi'_3}{5^2}-\frac{33\phi'_5}{5^4}-\frac{352\phi'_7}{5^7}-\frac{1188\phi'_9}{5^9}$$

$$-\frac{24024\phi'_{11}}{5^{12}}-\frac{107198\phi'_{13}}{5^{14}}-\frac{508896\phi'_{15}}{5^{16}},$$

$$b_{\frac{11}{5}}=\frac{121\phi'_3}{5^2}-\frac{968\phi'_5}{5^4}+\frac{3388\phi'_7}{5^7}+\frac{6292\phi'_9}{5^9}$$

$$+\frac{97526\phi'_{11}}{5^{12}}+\frac{372372\phi'_{13}}{5^{14}}+\frac{1593834\phi'_{15}}{5^{16}}.$$

同理,得$\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}$弧起度各通弦及各倍矢率.

故

$$c_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)\phi'_2-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{2^2\cdot\lfloor 3}\phi'_4$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{2^4\cdot\lfloor 5}\phi'_6$$

$$-\frac{\frac{n}{m}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-5^2\right\}}{2^6\cdot\lfloor 7}\phi'_8$$

$$+\cdots\cdots; \qquad \text{(XII)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\left(\frac{n}{m}\right)^2\phi'_3-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}}{3\cdot4}\phi'_5$$

$$+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\phi'_7$$

$$-\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-2^2\right\}\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-3^2\right\}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\phi'_9$$

$$+\cdots\cdots. \qquad \text{(XIII)}$$

以上見項名達象數一原卷三.

* * *

(*D*) 零分起度弦矢率論.

按連比例定理,

$$\phi'_1:\phi'_2=\phi'_2:\phi'_3,$$

令 $$\phi'_3=b_m,$$

則 $$\phi'_1:\phi'_2=\phi'_2:b_m$$

而 $$\phi'_2=c_m,$$

故(XII), (XIII)二式可改書爲:

$$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{4\cdot\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot3^2)(c_m)^5}{4^2\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{4^3\cdot \lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XIV)}$$

$$b_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}b_m-\frac{n^2(n^2-m^2)(b_m)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(b_m)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, m^6\cdot r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^4}+\cdots\cdots, \qquad \text{(XV)}$$

項名達逐次令 $\frac{n}{m}=\frac{n}{2},\frac{n}{3},\frac{n}{4},\frac{n}{5}$ 以證(XII),(XIII)二式之眞確,卷四寫成四紙,因病未續,其後戴煦續成此卷,爲演(XIV),(XV)二式,如上所舉.

以上見項名達象數一原卷四.

(*E*) 諸術通詮.

象數一原卷五,先以(XV)式化爲:

$$\text{vers}\frac{n}{m}\alpha=\frac{n^2(2\text{ vers}\,m\,\alpha)}{\lfloor 2\cdot m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)\,(2\text{ vers}\,m\,\alpha)^2}{\lfloor 4\cdot m^4\cdot r}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)\,(n^2-m^2\cdot 2^2)\,(2\text{ vers}\,m\,\alpha)^3}{\lfloor 6\ m^6\ r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\text{ vers}\,m\,\alpha)^4}{\lfloor 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\cdots\cdots \qquad \text{(XVI)}$$

項氏以(XIV),(XV)或(XVI)爲本術,

令 $r=1,$

$c_m=2\sin 30°=1,$

而 $m=30°;$

$b_m=2\text{ vers }60°=1,$

而 $m=60°;$

變通爲下之二術:

$$\sin n=\frac{n}{60}\left\{1+\frac{(30^2-n^2)}{\lfloor 3\cdot(60)^2}+\frac{(30^2-n^2)(9\times 30^2-n^2)}{\lfloor 5\cdot(60)^4}+\frac{(30^2-n^2)(9\times 30^2-n^2)(25\times 30^2-n^2)}{\lfloor 7\cdot(60)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\text{vers } n=\frac{n^2}{2(60)^2}\left\{1+\frac{(2^2\cdot 30^2-n^2)}{3\cdot 4\cdot(60)^2}+\frac{(2^2\cdot 30^2-n^2)(4^2\cdot 30^2-n^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(60)^4}+\frac{(2^2\cdot 30^2-n^2)(4^2\cdot 30^2-n^2)(6^2\cdot 30^2-n^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot(60)^6}+\cdots\cdots\right\}$$

又由(XIV),(XV)二式,容易證得董氏四術:

$$c_m=mc-\frac{m(m^2-1^2)c^3}{4\cdot\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)c^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots\cdots, \quad \text{(X)}$$

$$b_m=m^2b-\frac{m^2(m^2-1^2)b^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)b^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, r^2}$$

$$-\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)(m^2-3^2)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\,r^3}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers} ma=m^2(\operatorname{vers} a)-\frac{m^2(4m^2-4)\cdot2\cdot(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)\cdot2^2\cdot(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$-\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)(4m^2-25)\cdot2^3\cdot(\operatorname{vers} a)^4}{4^3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad \text{(XI)}$$

$$c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{4\cdot\lfloor 3\ m^3\cdot r^2}+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)c^5}{4^2\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad (X)_a$$

$$b_{\frac{1}{m}}=\frac{b}{m^2}+\frac{(m^2-1)b^2}{3\cdot4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(m^2-1)(2\cdot m^2-1)b^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^2-1)(2^2\cdot m^2-1)(3^2\cdot m^2-1)b^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot m^8\cdot r^3}+\cdots\cdots,$$

或 $$\operatorname{vers}\frac{1}{m}a=\frac{(\operatorname{vers}\ a)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)\cdot2\cdot(\operatorname{vers} a)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4\cdot m^2-4)\cdot2^2\cdot(\operatorname{vers} a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(4\cdot m^2-4)(4\cdot 4m^2-4)(9\cdot 4m^2-4)2^3\cdot(\text{vers}\,\alpha)^4}{4^3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\cdots\cdots. \qquad (\text{XI})_a.$$

又由(XIV),(XV)二式,可證杜氏九術:

前由董氏(X),(XI)二式,已證如杜氏之(IV),(V)及(II),(III)四式,茲不復贅述.

此外(VI)式,"通弦求通弧",則由前之$(\text{X})_a$式,令$m=\infty$,則$c_{\frac{1}{m}}$爲無窮細,而與弧合,而(m^2-1),$(2^2\cdot m^2-1)$,$(3^2\cdot m^2-1)$,……等甚近於m^2, $2^2\cdot m^2$, $3^2\cdot m^2$,……故$(\text{X})_a$式可變爲:

$$c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot\lfloor 3\cdot m\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot m\cdot r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot m\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

或

$$2a=m\cdot c_{\frac{1}{m}}=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot\lfloor 5\cdot r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots\cdots, \qquad (\text{VI})$$

同理得(VII).

其(IX)式,"矢求通弧"則由$(\text{XI})_a$式,令$m=\infty$,則$(4m^2-4)$, $(4\cdot 4m^2-4)$, $(9\cdot 4m^2-4)$,……等甚近於$4m^2$,

$4\cdot4m^2, 9\cdot4m^2, \cdots\cdots$,故$(XI)_a$式可變爲:

$$\text{vers}\frac{1}{m}a=\frac{(2\text{ vers }a)}{\lfloor 2\cdot m^2}+\frac{(2\text{ vers }a)^2}{\lfloor 4\cdot m^2\cdot r}+\frac{2^2\cdot(2\text{ vers }a)^3}{\lfloor 6\cdot m^2\cdot r^2}$$

$$+\frac{2^2\cdot3^2\cdot(2\text{ vers }a)^4}{\lfloor 8\cdot m^2\cdot r^3}+\cdots\cdots,$$

因 $r:c_{\frac{1}{m}}=c_{\frac{1}{m}}:b_{\frac{1}{m}}$ 之關係,上式左邊可書爲: $\frac{\left(c_{\frac{1}{m}}\right)^2}{2\cdot r}$,

兩邊再各乘$4m^2$,化得

$$(2a)^2=r\{(8\text{ vers }a)+\frac{1^2(8\text{ vers }a)}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{1^2\cdot2^2(8\text{ vers }a)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}+\cdots\cdots\} \quad \text{(IX)}.$$

同理得(VIII).

至(I)式,"圜徑求周"乃由(VI)式推得,前已述及,可不復贅,以上并見項名達象數一原卷五.

(*F*)諸術明變

"諸術明變"中,著下列正弦求各線,餘弦求各線式:

$$\tan a=\sin a+\frac{\sin^3 a}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\sin^5 a}{2\cdot4\cdot r^4}+\frac{3\cdot5\sin^7 a}{2\cdot4\cdot6\cdot r^6}$$

$$+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\sin^9 a}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$\sec\ a = r + \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{3\cdot \sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cdot 5\cdot \sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots,$$

$$\operatorname{vers}\ a = \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{\sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3 \sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5} + \frac{3\cdot 5\cdot \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}$$

$$+ \cdots\cdots,$$

$$\cos\ a = r - \left\{ \frac{\sin^2 a}{2\cdot r} + \frac{\sin^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cdot \sin^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5} \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot \sin^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots \right\},$$

$$\csc\ a = \frac{r^2}{\sin a},$$

$$\cot\ a = \frac{r^2}{\sin a} - \left\{ \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin^3 a}{2\cdot 4\cdot r^2} + \frac{3\cdot \sin^5 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4} \right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot \sin^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \sin^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8} + \cdots\cdots \right\};$$

*　　*　　*

$$\cot\ a = \cos\ a + \frac{\cos^3 a}{2\cdot r^2} + \frac{3 \cos^5 a}{2\cdot 4\cdot r^4} + \frac{3\cdot 5\cdot \cos^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7 \cos^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8} + \cdots\cdots,$$

$$\csc a = r + \frac{\cos^2 a}{2r} + \frac{3\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cdot 5\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}$$

$$+ \frac{3\cdot 5\cdot 7\cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots,$$

$$\sin a = r - \left\{\frac{\cos^2 a}{2\cdot r} + \frac{\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5}\right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot \cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7} + \cdots\cdots\right\},$$

$$\text{covers } a = \frac{\cos^2 a}{2\cdot r} + \frac{\cos^4 a}{2\cdot 4\cdot r^3} + \frac{3\cos^6 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^5} + \frac{3\cdot 5\cdot \cos^8 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^7}$$

$$+ \cdots\cdots,$$

$$\sec a = \frac{r^2}{\cos a},$$

$$\tan a = \frac{r^2}{\cos a} - \left\{\frac{\cos a}{2} + \frac{\cos^3 a}{2\cdot 4\cdot r^2} + \frac{3\cos^5 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^4}\right.$$

$$\left. + \frac{3\cdot 5\cdot \cos^7 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cos^9 a}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot r^8} + \cdots\cdots\right\}.$$

項名達又因橢圜求周術,變通得"圜周求徑"術,如:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1^2}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \cdots\cdots,$$

或 $$d = \frac{\pi d}{2}\left\{1 - \frac{1}{2^2} - \frac{(2^2-1)}{2^2\cdot 4^2} - \frac{(2^2-1)(4^2-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\right.$$

$$-\frac{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}-\cdots\cdots\}$$

項氏自謂此級數,斂級頗難,不足爲術也.以上并見項名達象數一原卷六.

18. 戴煦之求表捷術

戴煦,字鄂士,錢塘人,(1805-1860)自道光乙巳(1845)至咸豐壬子(1852),凡八易寒暑,演錄對數簡法,外切密率,假數測圓三種,總名曰求表捷術.戴煦曾校補項名達遺著象數一原已詳前節.其外切密率則因杜氏僅求弦矢,徐有壬有切線弧背互求二術,而於割線尙未全,嘗以此意告項名達,并爲推演,以示項氏,未及半而項氏卒,辛亥(1851)見李善蘭,由李示以對數探源,弧矢啓祕,并促成其說,因於咸豐壬子(1852)寫定.以切割二線出於圓外,故名曰外切密率,凡四卷:

卷一　本弧求切線術解.　餘弧求切線術解.
　　　弧背求切線算式.

卷二　本弧求割線術解.　餘弧求割線術解.
　　　弧背求割線算式.

卷三　切線求本弧術解.　切線求餘弧術解.

切線求距弧術解. 切線求弧背算式.

卷四 割線求本弧術解. 割線求餘弧術解.

割線求半弧術解. 割線求倍弧術解.

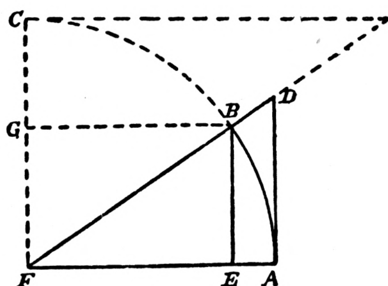
割線求弧背算式.

* * *

(1)本弧求切線:

$$\tan a=a+\frac{2a^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{16\,a^5}{\lfloor 5\cdot r^4}+\frac{272\,a^7}{\lfloor 7\cdot r^6}+\frac{7936\,a^9}{\lfloor 9\cdot r^8}+\cdots, \quad (1)$$

如第四十一圖 $AB=a$ 爲本弧, $BC=90-a$ 爲餘弧,



第四十一圖

$$DA=\tan a,$$

$$BE=\sin a,$$

$$FE=\cos a,$$

因 $$FE:BE=FA:DA,$$

即 $$\cos a : \sin a = r : \tan a,$$

$$1-\text{vers}\ a : \sin a = r : \tan a,$$

由(II),(III)得,

$$\tan a = \frac{r\left(a - \dfrac{a^3}{\underline{|3}\cdot r^2} + \dfrac{a^5}{\underline{|5}\cdot r^4} - \dfrac{a^7}{\underline{|7}\cdot r^6} + \dfrac{a^9}{\underline{|9}\cdot r^8} - \cdots\cdots\right)}{\left(r - \dfrac{a^2}{\underline{|2}\cdot r} + \dfrac{a^4}{\underline{|4}\cdot r^3} - \dfrac{a^6}{\underline{|6}\cdot r^5} + \dfrac{a^8}{\underline{|8}\cdot r^7} - \cdots\cdots\right)},$$

因 $$r = \phi_1,\ a = a_2,$$

故 $$\frac{a^2}{r} = \phi_3,\ \frac{a^3}{r^2} = a_4, \cdots\cdots,$$

前式化爲:

$$\tan a = \frac{\phi_1\left(\phi_2 - \dfrac{\phi_4}{\underline{|3}} + \dfrac{\phi_6}{\underline{|5}} - \dfrac{\phi_8}{\underline{|7}} + \dfrac{\phi_{10}}{\underline{|9}} - \cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1 - \dfrac{\phi_3}{\underline{|2}} + \dfrac{\phi_5}{\underline{|4}} - \dfrac{\phi_7}{\underline{|6}} + \dfrac{\phi_9}{\underline{|8}} - \cdots\cdots\right)},$$

以上分母子按代數除法除得,

$$\tan a = \phi_2 + \frac{2\phi_4}{\underline{|3}} + \frac{16\phi_6}{\underline{|5}} + \frac{272\phi_8}{\underline{|7}} + \frac{7936\phi_{10}}{\underline{|9}} + \cdots\cdots,$$

$$= a + \frac{2a^3}{\underline{|3}\cdot r^2} + \frac{16a^5}{\underline{|5}\cdot r^4} + \frac{272a^7}{\underline{|7}\cdot r^6} + \frac{7936\,a^9}{\underline{|9}\cdot r^8} + \cdots,$$ 證訖

(2) 餘弧求切線:

$$\tan a = \frac{r^2}{\dfrac{\pi}{2} - a} - \frac{2\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)}{\underline{|3}} - \frac{8\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)^3}{3\,\underline{|5}\cdot r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\,\lfloor 7\cdot r^4}-\frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot 5\cdot\lfloor 9\cdot r^6}-\cdots\cdots, \quad (2)$$

如前圖 $BG:GF=FA:DA$,

即 $$\sin(90^\circ-a):\cos(90^\circ-a)=r:\tan a,$$

$$\tan a=\frac{r\left\{r-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^2}{\lfloor 2\cdot r}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^4}{\lfloor 4\cdot r^3}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^6}{\lfloor 6\cdot r^5}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^8}{\lfloor 8\cdot r^7}-\cdots\cdots\right\}}{\left\{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{\lfloor 5\cdot r^4}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{\lfloor 7\, r^6}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^9}{\lfloor 9\cdot r^8}-\cdots\cdots\right\}},$$

令 $r=\phi_2,\ \frac{\pi}{2}-a=\phi_3,$

則 $$\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^2}{r}=\phi_4,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{r^2}=\phi_5,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^4}{r^3}=\phi_6,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{r^4}=\phi_7,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{r^6}=\phi_9,$$

$\cdots\cdots,$

代入化得:

$$\tan a=\frac{\phi_2\left(\phi_2-\frac{\phi_4}{\underline{|2}}+\frac{\phi_6}{\underline{|4}}-\frac{\phi_8}{\underline{|6}}+\frac{\phi_{10}}{\underline{|8}}-\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_3-\frac{\phi_5}{\underline{|3}}+\frac{\phi_7}{\underline{|5}}-\frac{\phi_9}{\underline{|7}}+\frac{\phi_{11}}{\underline{|9}}-\cdots\cdots\right)},$$

$$=\phi_1-\frac{2\phi_3}{\underline{|3}}-\frac{8\phi_5}{3\underline{|5}}-\frac{32\phi_7}{3\underline{|7}}-\frac{1152\phi_9}{3\cdot5\cdot\underline{|9}}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\underline{|3}}-\frac{8\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\underline{|5}\cdot r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot\underline{|7}\cdot r^4}-\frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot5\underline{|9}\cdot r^6}-\cdots\cdots,$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷一.

(3)本弧求割線:

$$\sec a-r=\frac{a^2}{\underline{|2}\cdot r}+\frac{5a^4}{\underline{|4}\cdot r^3}+\frac{61a^6}{\underline{|6}\cdot r^5}+\frac{1385a^8}{\underline{|8}\cdot r^7}$$

$$+\frac{50521a^{10}}{\underline{|10}\cdot r^9}+\cdots\cdots, \qquad (3)$$

如圖 $AB=a$ 爲本弧, $BC=\frac{\pi}{2}-a$ 爲餘弧,

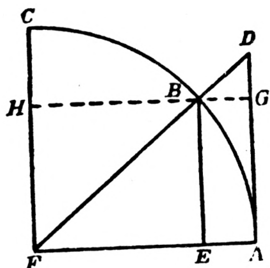
$$FD=\sec a,$$

$$BD=\sec a-r,$$

$$EF=\cos a,$$

$$EA=BG=\text{vers } a,$$

$$FB=r.$$



第四十二圖

因 $$EF:FB=BG:BD,$$

即 $$\cos a:r=\text{vers } a:(\sec a-r)$$

$$\sec a-r=\frac{r\left(\frac{a^2}{\lfloor 2\cdot r}-\frac{a^4}{\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{a^6}{\lfloor 6\cdot r^5}-\frac{a^8}{\lfloor 8\cdot r^7}+\cdots\right)}{\left(r-\frac{a^2}{\lfloor 2\cdot r}+\frac{a^4}{\lfloor 4\cdot r^3}-\frac{a^6}{\lfloor 6\cdot r^5}+\frac{a^8}{\lfloor 8\cdot r^7}-\cdots\right)},$$

令 $$r=\phi_1,\ a=\phi_2,\ \frac{a^2}{r}=\phi_3,\cdots\cdots,$$

代入化得:

$$\sec a-r=\frac{\phi_1\left(\frac{\phi_3}{\lfloor 2}-\frac{\phi_5}{\lfloor 4}+\frac{\phi_7}{\lfloor 6}-\frac{\phi_9}{\lfloor 8}+\cdots\cdots\right)}{\left(\phi_1-\frac{\phi_3}{\lfloor 2}+\frac{\phi_5}{\lfloor 4}-\frac{\phi_7}{\lfloor 6}+\frac{\phi_9}{\lfloor 8}-\cdots\cdots\right)},$$

$$=\frac{\phi_3}{\lfloor 2}+\frac{5\phi_5}{\lfloor 4}+\frac{61\phi_7}{\lfloor 6}+\frac{1385\phi_9}{\lfloor 8}+\frac{50521\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{a^2}{\lfloor 2\cdot r}+\frac{5a^4}{\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{61a^6}{\lfloor 6\cdot r^5}+\frac{1385\,a^8}{\lfloor 8\cdot r^7}+\frac{50521\,a^{10}}{\lfloor 10\cdot r^9}$$

$$+\cdots\cdots.$$

證訖.

(4)餘弧求割線:

$$\sec\ a=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\lfloor 3}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot\lfloor 5\cdot r^2}$$

$$+\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot\lfloor 7\cdot r^4}+\frac{1142\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot 5\cdot\lfloor 9\cdot r^6}+\cdots,\qquad(4)$$

如前圖 $HB:FB=FA:FD$,

$$\sin\ (90-a):r=r:\sec\ a.$$

$$\sec\ a=r^2\div\left\{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{\lfloor 5\cdot r^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{\lfloor 7\cdot r^6}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^9}{\lfloor 9\cdot r^8}-\cdots\cdots\right\},$$

令 $r^2=\phi_2,\ \frac{\pi}{2}-a=\phi_3,\ \frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{r}=\phi_4,\cdots\cdots,$

代入化得:

$$\sec\ a=\frac{\phi_4}{\phi_3-\frac{\phi_5}{\lfloor 3}+\frac{\phi_7}{\lfloor 5}-\frac{\phi_9}{\lfloor 7}+\frac{\phi_{11}}{\lfloor 9}-\cdots\cdots},$$

$$=\phi_1+\frac{\phi_3}{\lfloor 3}+\frac{7\phi_5}{3\lfloor 5}+\frac{31\phi_7}{3\lfloor 7}+\frac{1142\phi_9}{3\cdot 5\cdot\lfloor 9}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{r^2}{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}+\frac{\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\lfloor 3}+\frac{7\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^3}{3\cdot\lfloor 5\cdot r^2}$$

$$+\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^5}{3\cdot\lfloor 7\cdot r^4}+\frac{1142\left(\frac{\pi}{2}-a\right)^7}{3\cdot 5\lfloor 9\cdot r^6}+\cdots\cdots.$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷二.

(5)切線求本弧:

$$a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots, \qquad (5)$$

凡連比例率分,皆可還原,

由(I):

$$\phi'_2=\tan a=\phi_2+\frac{2\phi_4}{\lfloor 3}+\frac{16\phi_6}{\lfloor 5}+\frac{272\phi_8}{\lfloor 7}+\frac{7936\phi_{10}}{\lfloor 9}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\phi_3+\frac{4\phi_5}{\lfloor 3}+\frac{136\phi_7}{3\cdot\lfloor 5}+\frac{992\phi_9}{\lfloor 7}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\phi_4+\frac{6\phi_6}{\lfloor 3}+\frac{264\phi_8}{3\cdot\lfloor 5}+\frac{7040\phi_{10}}{3\cdot\lfloor 7}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_6=\phi_6+\frac{10\phi_8}{\lfloor 3}+\frac{640\phi_{10}}{3\cdot\lfloor 5}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_8=\phi_8+\frac{14\phi_{10}}{\lfloor 3}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_{10}=\phi_{10}+\cdots\cdots,$$

齊其級數,化而併之,得:

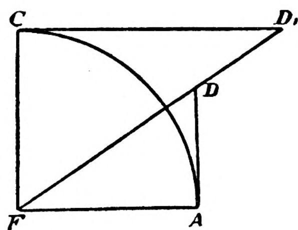
$$a=\tan a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\cdot r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

(6)切線求餘弧:

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left(\tan a+\frac{2r^2}{\lfloor 3 \tan a}-\frac{32 r^4}{3\cdot\lfloor 5 \tan^3 a}\right.$$

$$\left.+\frac{704 r^6}{3\cdot\lfloor 7 \tan^5 a}-\cdots\cdots\right),$$

切線求餘弧,若依切線求本弧還原法入之,反不適用,乃另用下法求之.如第四十三圖



第四十三圖

$$CD_1:CF=FA:DA,$$

即　$\tan(90°-a):r=r:\tan a$

則　$\tan a=\dfrac{r^2}{\tan(90°-a)};$

又從杜氏(V)式知:

$$\frac{\dfrac{r_2}{\tan a-\dfrac{\tan^3 a}{3 r^2}+\dfrac{\tan^5 a}{5 r^4}-\dfrac{\tan^7 a}{7 r^6}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成爲四率比例,

令　$r=\phi_2$, $\tan a=\phi_3$,

則
$$\frac{r^2}{\tan a}=\phi_1,$$

上式可書爲:

$$\frac{\dfrac{\phi_2\cdot\phi_2}{\phi_3-\dfrac{\phi_5}{3}+\dfrac{\phi_7}{5}-\dfrac{\phi_9}{7}+\cdots\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

按商除法除得:

$$\frac{\left(\phi_1+\dfrac{2\phi_3}{\lfloor 3}-\dfrac{32\phi_5}{3\cdot\lfloor 5}+\dfrac{704\phi_7}{3\cdot\lfloor 7}-\cdots\cdots\right)}{r}=\frac{r}{a},$$

如令 $r=\phi_2,\ \dfrac{r^2}{\tan(90^\circ-a)}=\phi_1=\tan\ a,$

則
$$\phi_3=\frac{r^2}{\tan a},\ \phi_5=\frac{r^4}{\tan^3 a},\ \phi_7=\frac{r^6}{\tan^5 a}\cdots\cdots,$$

而上式之第四率,應改書爲$\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$,故

$$\frac{\tan\ a+\dfrac{2\,r^2}{\lfloor 3\ \tan a}-\dfrac{32\,r^4}{3\cdot\lfloor 5\ \tan^3 a}+\dfrac{704\,r^6}{3\cdot\lfloor 7\ \tan^5 a}-\cdots}{r}=\frac{r}{\dfrac{\pi}{2}-a}.$$

證訖.

以上見戴煦外切密率卷三.

(7) 割線求本弧:

$$a^2=r\left\{2(\sec a-r)-\frac{5\cdot 2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}+\frac{64\cdot 2^3(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1560\cdot 2^4(\sec a-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\}, \qquad (7).$$

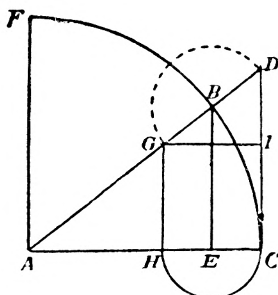
如第四十四圖 $BC=a$ 爲本弧, $AD=\sec a$,

$BD=\sec a-r$,

$GD=2(\sec a-r)$,

而 $HC=2\text{ vers } a$,

故 $\sec a:r=2(\sec a-r):2\text{ vers } a$.



第四十四圖

令 $\phi_1=r_1$, $\phi_3=2(\sec a-r)$,

則 $\sec a=\phi_1+\frac{1}{2}\phi_3$,

故 $\phi'_3=2\text{ vers } a=\frac{\phi_1\cdot\phi_3}{\phi_1+\frac{\phi_3}{2}}=\phi_3-\frac{\phi_5}{2}+\frac{\phi_7}{2^2}-\frac{\phi_9}{2^3}+\frac{\phi_{11}}{2^4}-\cdots,$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^2}{r}=\phi_5-\frac{2\phi_7}{2}+\frac{2\phi_9}{2^2}-\frac{4\phi_{11}}{2^3}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^3}{r^2}=\phi_7-\frac{3\phi_9}{2}+\frac{6\phi_{11}}{2^2}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_9=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_7}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^4}{r^3}=\phi_9-\frac{4\phi_{11}}{2}+\cdots\cdots,$$

$$\phi_{11}'=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_9}{\phi_1}=\frac{(2\text{ vers } a)^5}{r^4}=\phi_{11}-\cdots\cdots,$$

由(VIII)式

$$a^2=r\left\{(2\text{ vers }a)+\frac{1^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{1^2\cdot2^2(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

得 $$a^2=r\left\{2(\sec a-r)\frac{5\cdot2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{64\cdot2^3(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\frac{1560\cdot2^4(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=10'',\cdots\cdots15^\circ$,割線自 $10''$ 至 15° 用此式.

(8) 割線求餘弧:

$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left\{\sec a-\frac{r^2}{\lfloor 3\cdot\sec a}-\frac{17\,{}^4r}{3\,\lfloor 5\cdot\sec^3 a}+\frac{367\,r^6}{3\,\lfloor 7\cdot\sec^5 a}-\cdots\cdots\right\}, \qquad (8)$$

如切線求餘弧之例,由(VII)式知,

$$\frac{\dfrac{r^2}{\sin a+\dfrac{1^2\cdot\sin^3 a}{\lfloor 3\cdot r^2}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot\sin^5 a}{\lfloor 5\cdot r^4}+\dfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot\sin^7 a}{\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots}}{r}=\frac{r}{a},$$

可成爲四率比例.

令 $r=\phi_2,\ \sin a=\phi_3,$

則 $$\frac{r^2}{\sec a}=\phi_1=\csc a,$$

上式可書爲:

$$\frac{\phi_1-\frac{\phi_3}{\lfloor 3}-\frac{17\phi_5}{3\cdot\lfloor 5}-\frac{367\phi_7}{3\cdot\lfloor 7}-\cdots\cdots}{r}=\frac{r}{a}$$

或
$$\frac{\pi}{2}-a=r^2\div\left\{\sec a-\frac{r^2}{\lfloor 3\cdot\sec a}-\frac{17\,r^4}{3\,\lfloor 5\cdot\sec^3 a}\right.$$

$$\left.-\frac{367\,r^6}{3\,\lfloor 7\,\sec^5 a}-\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=60^\circ,\cdots\cdots89^\circ50'50''$,割線自 60° 至 $89^\circ59'50''$ 用此式.

(9) 割線求半弧:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=r\left\{\frac{r(\sec a-r)}{(\sec a+r)}-\frac{8\,r^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec a+r)^2}+\frac{184r^4(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec a+r)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{8448\,r^6(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot(\sec a+r)^4}+\cdots\cdots\right\}, \qquad (9).$$

由(5)式切線求本弧,得

$$a^2=\left(\tan\ a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{\tan^5 a}{5\ r^4}-\frac{\tan^7 a}{7\cdot r^6}+\cdots\cdots\right)^2,$$

$$=\tan^2 a-\frac{8\tan^4 a}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}-\frac{8448\tan^8 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots,$$

或
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)-\frac{8\tan^4\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{184\tan^6\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}$$

$$-\frac{8448\tan^8\left(\frac{a}{2}\right)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

因
$$\frac{\sec a+r}{\sec a-r}=\frac{r}{\frac{\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{r}},$$

故上式可化為:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=r\left\{\frac{r(\sec a-r)}{(\sec a+r)}-\frac{8r^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot(\sec a+r)^2}\right.$$
$$+\frac{184r^4(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6(\sec a+r)^3}-\frac{8448r^6(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8(\sec a+r)^4}$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\},$$

而 $a=15^\circ,\cdots\cdots30^\circ$,割線自 15° 至 30° 用此式.

此外割線自 30° 至 45°,

則由
$$\frac{2r^2-\sec^2 a}{\sec^2 a}=\frac{r}{\sec 2a},$$

求得 $\sec 2a$,

命為連比例第一率,半徑為二率,如 (8), 割線求餘弧術,入之,依前得倍本弧 $2a$ 之餘弧

$$\frac{\pi}{2}-2a=a',$$

以減象限弧 $\frac{\pi}{2}$,得倍本弧 $2a$,半之,卽本弧.

又割線自45°自60°,

則由
$$\frac{2r^2-\sec^2(90°-a)}{\sec^2(90°-a)}=\frac{r}{\sec^2(90°-a)},$$

求得 $\sec 2(90°-a)$,

命為連比例第一率,半徑為二率,如(8)割線求餘弧術入之,得

$$2\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\text{之餘弧}$$

$$\frac{\pi}{2}-2\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=2a-\frac{\pi}{2},$$

以加象限弧 $\frac{\pi}{2}$,得倍本弧 $2a$,半之卽本弧.割線求弧背,所以分為

10″——15°, 15°——30°, 30°——45°,

45°——60°, 60°——89°59′50″

五限者為便於降位也.以上見戴煦外切密率卷四.

(10) 本弧弧分,徑求四十五度以內正割對數.

$$\log_{10}\sec a=u\left\{\frac{a^2}{\lfloor 2}+\frac{2a^4}{\lfloor 4}+\frac{16a^6}{\lfloor 6}+\frac{272a^8}{\lfloor 8}+\frac{7836a^{10}}{\lfloor 10}+\cdots\right),$$

(10).

戴煦著假數測圓(1852)論八線對數,其前則於續對數簡法(1846)曾論"用數",謂求 $\log_{10}N$,應先求其用

數 $1+y$ 之對數,而 y 爲小數.

而 $$\log_{10}(1+y)=u\ \log_e(1+y)$$
$$=u\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\right\},$$

說詳李儼對數之發明及其東來.(26) 由上義可求"以本弧弧分徑求四十五度以內正割對數",因 45° 以內各正割爲半徑($r=1$)外帶割線半徑差

$$(y=\sec a-r=\sec a-1)$$

故 $$\log_{10}\sec a=\log_{10}\{1+\overline{\sec a-1}\}=\log_{10}(1+y)$$
$$=u\ \log_e(1+y)=u\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $$y=(\sec a-1),$$

又 $$\phi'_3=\sec a-r=\sec a-1=\frac{\phi_3}{\lfloor 2}+\frac{5\phi_5}{\lfloor 4}+\frac{61\phi_7}{\lfloor 6}+\frac{1385\phi_9}{\lfloor 8}$$
$$+\frac{50521\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots,$$

則 $$\phi'_5=\frac{(\sec a-r)^2}{r}=(\sec a-1)^2=\frac{6\phi_5}{\lfloor 4}+\frac{150\phi_7}{\lfloor 6}$$
$$+\frac{5166\phi_9}{\lfloor 8}+\frac{252750\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots,$$

(26) 見中算史論叢(一)民國二十年(1931),上海.

$$\phi'_7=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}=(\sec a-1)^3=\frac{90\phi_7}{\lfloor 6}+\frac{6300\phi_9}{\lfloor 8}$$

$$+\frac{466830\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_9=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}=(\sec a-1)^4=\frac{2520\phi_9}{\lfloor 8}+\frac{378000\phi_{11}}{\lfloor 10}$$

$$+\cdots\cdots,$$

$$\phi'_{11}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4}=(\sec a-r)^5=\frac{113400\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots,$$

故
$$\phi'_3-\frac{1}{2}\phi'_5+\frac{1}{3}\phi'_7-\frac{1}{4}\phi'_9+\frac{1}{5}\phi'_{11}-\cdots\cdots$$

$$=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}-\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi_3}{\lfloor 2}+\frac{2\phi_5}{\lfloor 4}+\frac{16\phi_7}{\lfloor 6}+\frac{272\phi_9}{\lfloor 8}+\frac{7936\phi_{11}}{\lfloor 10}+\cdots\cdots$$

上式之分母,爲"本弧求割線"之分母,其分子爲"本弧求切線"之分子.故,

$$\log_{10}\sec a=u\left\{\frac{a^2}{\lfloor 2}+\frac{2a^4}{\lfloor 4}+\frac{16a^6}{\lfloor 6}+\frac{272a^8}{\lfloor 8}+\frac{7936a^{10}}{\lfloor 10}+\cdots\right\}$$

爲四十五度以內諸正割對數之公式.

19. 丁取忠李善蘭顧觀光

同時丁取忠,李善蘭,顧觀光雖亦論究割圜學說.

以視明,董,項,戴尙多遜色.

丁取忠著數學拾遺,咸豐元年(1851)鄒漢勳序稱:"於友人家得一算書,蓋杜德美原術,第其文隱奧難解,而又無算例,(丁取忠)果臣乃發憤爲算例凡若干言,書成,名曰數學拾遺.時丁取忠初不知有明氏,董氏書也.[27]

李善蘭則古昔齋算學十二爲級數回求,示有"弧背求正弦",間"正弦求弧背"之一例,所謂回求卽還原術也.其方圓闡幽所舉之弧背求正弦,弧背求正矢,正弦求弧背,正矢求弧背,卽杜術之(II),(III),(VII),(VIII);弧背求正切,弧背求正割,正切求弧背,正割求弧背三術,正割求弧背一術,卽戴氏之(1),(3),(5),(7),(9).其稍異者爲次之二術:

(1)正弦求弧背,用圜外積術:

$$a=\frac{1}{r}\left\{(r+\operatorname{vers} a)\sin a-\left(\frac{2\sin^3 a}{\underline{|3}\cdot r}+\frac{2\cdot 3\sin^5 a}{\underline{|5}\cdot r^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot\sin^7 a}{\underline{|7}\cdot r^5}+\frac{2\cdot 3^2\cdot 3^2\ 5^2\cdot\sin^9 a}{\underline{|9}\cdot r^7}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

(2)正割求弧背又術:

(27)　見白芙堂叢書本數學拾遺.

$$a^2=r\left\{t-\frac{2t^2}{\lfloor 4\cdot r}+\frac{23\,t^3}{\lfloor 6\cdot r^2}-\frac{264\,t^4}{\lfloor 8\cdot r^3}+\cdots\cdots\right\},$$

而 $$t=\frac{2r\cdot 2(\sec a-r)}{2r+(\sec a-r)}=\frac{2^2\cdot\tan^2\frac{a}{2}}{r}$$ 爲用數.

顧觀光(字尙之,金山人,1799-1862)以項名達未有切割求餘線術特爲補之.(28)又以戴煦僅有以本弧弧分徑求四十五度以內正割對數,爲著"用諸乘差求八線對數法"(1855).用求他三角函數之對數值.(29)

20. 徐有壬之測圜密率及割圜八線綴術

徐有壬(1800-1860)著測圜密率三卷,未記年月,咸豐壬子(1852)戴煦自序外切密率稱:"泰西杜氏德美以連比例九術入中國,……但能求弦矢,而不能求切割二線,鈞卿徐氏(有壬)有切線弧背互求二術",觀此則測圜密率之成,蓋在壬子(1852)前矣.徐有壬又著割圜八線綴術大約未完稿,卷數亦未定.先是南豐吳嘉善(字子登),長沙丁取忠(字果臣)曾聞其說,及徐氏卒後,吳嘉善爲衍成三卷,見同治元年(1862)吳嘉

(28) 見顧觀光算賸續編內"書割圜捷術後".(1851)

(29) 見顧觀光算賸餘稿.

善序.湘陰左潛(字壬叟)又爲補草,合成四卷,語見同治癸酉(1873)左潛序.是年冬十一月左潛又撰綴術釋戴一卷,綴術釋明二卷,以徐氏所擬綴術,治戴煦外切密率及明安圖割圜密率捷法.

徐有壬於測圜密率卷一第五術,"圜徑冪求圜周冪"稱:

$$p^2=9d^2\left(1+\frac{1^2}{3\cdot4}+\frac{1^2\cdot2^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{1^2\cdot2^2\cdot3^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots\right\},$$

測圜密率卷二,首述杜氏(II),(III),(VII),(XIII)四術外,有"弦矢求弧背","正切求弧背","弧背求正切"三術,卽:

$$a=\sin a+\frac{2\operatorname{vers}^2 a}{3\cdot\sin a}\left\{1-\frac{\operatorname{vers}^2 a}{5\cdot\sin^2 a}+\frac{3\cdot\operatorname{vers}^2 a}{5\cdot7\cdot\sin^2 a}\right.$$

$$\left.-\frac{3\cdot5\cdot\operatorname{vers}^2 a}{5\cdot7\cdot8\sin^2 a}+\cdots\cdots\right\},$$

$$a=\sin a-\frac{\tan^3 a}{3\cdot r^2}+\frac{3\cdot\tan^5 a}{3\cdot5\cdot r^4}-\frac{3\cdot5\cdot\tan^7 a}{3\cdot5\cdot7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

$$\tan a=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6,$$

$$=a+\frac{a^3}{3}+\frac{2a^5}{3\cdot5}+\frac{17a^7}{3\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{62a^9}{3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}$$

$$+\frac{1382\,a^{11}}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}+\cdots\cdots,\qquad (r=1).$$

$$=a+\frac{2a^3}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{16a^5}{\lfloor 5\ r^4}+\frac{272a^7}{\lfloor 7\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

而 $T_1=a,$

$$T_2=\frac{T_1\cdot a^2}{3\cdot r^2},$$

$$T_3=\frac{T_2\cdot 2a^2}{5\cdot r^2}, \qquad D_1=T_2{}^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{T_3\cdot 2a^2+D_1}{7\cdot r^2}, \qquad D_2=T_2\cdot T_3\cdot 2T_1,$$

$$T_5=\frac{T_4\cdot 2a^2+D_2}{9\cdot r^2}, \qquad D_3=\left(T_2T_4+\frac{1}{2}T_3{}^2\right)\cdot 2T_1,$$

$$T_6=\frac{T_5\cdot 2a^2+D_3}{11\cdot r^2}, \qquad D_4=(T_2T_5+T_3T_4)\cdot 2T_1.$$

以上三術幷可用杜氏九術解之.

其卷三共立大小互求十八術,卽:

(1)大矢求小矢:

$$\text{vers}\frac{a}{m}=\frac{(\text{vers}\,a)}{m^2}+\frac{(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^2-1)(4m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots\cdots,$$

(2)小矢求大矢:

$$\text{vers}\,m\,a=m^2(\text{vers}\,a)-\frac{m^2(m^2-1)\cdot 2\cdot(\text{vers}\,a)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(m^2-1)(m^2-4)\cdot 2^2\cdot(\text{vers}\,a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}+\cdots,$$

(3)大弦求小弦:

$$\sin\frac{a}{m}=\frac{\sin a}{m}+\frac{m(m^2-1)\sin^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{m(m^2-1)(9m^2-1)\sin^5 a}{\lfloor\underline{5}\cdot m^5\cdot r^4}+\cdots\cdots,$$

(4)小弦求大弦:

$$\sin m\,a=m\sin a-\frac{m(m^2-1)\sin^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}$$

$$+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)\sin^5 a}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)\sin^7 a}{\lfloor\underline{7}\cdot r^6}+\cdots\cdots,$$

以上四術,本董祐誠法.

(5)大弦求小矢:

$$\operatorname{vers}\frac{a}{m}=T_1\left(=\frac{\sin^2 a}{2\cdot m^2\cdot r}\right)+\frac{2(4m^2-1)T_1^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{2(16m^2-1)T_1\cdot T_2}{5\cdot 6\cdot r}+\frac{2(36m^2-1)T_1\cdot T_3}{7\cdot 8\cdot r}+\cdots,$$

(6)小弦求大矢:

$$\operatorname{vers} m\,a=T_1\left(=\frac{m^2\sin^2 a}{2r}\right)-\frac{(m^2-4)\cdot T_1\cdot\sin a}{\cdot\ 3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^2-16)\cdot T_2\cdot\sin^2 a}{5\cdot 6\cdot r^2}-\frac{(m^2-36)\cdot T_3\cdot\sin^3 a}{7\cdot 8\cdot r}$$

$$+\cdots\cdots,$$

(7)大矢求小弦冪:

$$\sin\frac{a}{m}=\left\{r\left(\frac{2\text{ vers }a}{m^2}+\frac{(m^2-4)(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}\right.\right.$$

$$+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(m^2-4)(4m^2-4)(9m^2-4)(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(8)小矢求大弦冪:

$$\sin m\,a=\left\{r\left[m^2(2\text{ vers }a)-\frac{m^2(4m^2-1)(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot 4\cdot r}\right.\right.$$

$$+\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$

$$-\frac{m^2(4m^2-1)(4m^2-4)(4m^2-9)(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\ r^3}$$

$$\left.\left.+\cdots\cdots\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

(9)大切求小弦:

$$\sin\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan a}{m}-\frac{(2m^2+1)\tan^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{(24m^4+20m^2+1)\tan^5 a}{\lfloor\underline{5}\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6+784m^4+70m^2+1)\tan^7 a}{\lfloor\underline{7}\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8+52352m^6+6384m^4+168m^2+1)\tan^9 a}{\lfloor\underline{9}\cdot m^9\cdot r^8}$$

$$-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=\frac{\tan a}{m}$, $\qquad t=\frac{\tan^4 a}{r^2}$

$$T_2=\frac{(2m^2+1)T_1T_1^2}{2\cdot3\cdot r^2}, \qquad D_1=1\cdot2\cdot\frac{t\cdot T_1}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(18m^2+1)\,T_2\cdot T_1^2}{4\cdot5\cdot r^2}-\frac{D_1}{4\cdot5}, \qquad D_2=3\cdot4\cdot\frac{t\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(50m^2+1)T_3\cdot T_1^2}{6\cdot7\cdot r^2}-\frac{D_2}{6\cdot7}, \qquad D_3=5\cdot6\cdot\frac{t\cdot T_3}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(98m^2+1)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot9\cdot r^2}-\frac{D_3}{8\cdot9}, \qquad D_4=7\cdot8\cdot\frac{t\cdot T_4}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(162m^2+1)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot11\cdot r^2}-\frac{D_4}{10\cdot11}.$$

(10)小切求大弦.

$$\sin m\,a = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - T_6 + \cdots\cdots,$$

$$= m\tan a - \frac{(m^2+2)m\cdot\tan^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}$$

$$+ \frac{(m^4+20m^2+24)m\tan^5 a}{\lfloor\underline{5}\cdot r^4}$$

$$- \frac{(m^6+70m^4+784m^2+720)m\cdot\tan^7 a}{\lfloor\underline{7}\cdot r^4}$$

$$+ \frac{(m^8+168m^6+638m^4+5235m^2+40320)\cdot m\tan^9 a}{\lfloor\underline{9}\cdot r^8}$$

$$- \cdots\cdots,$$

而 $T_1 = m\tan a$,

$$T_2 = \frac{(m^2+2)\cdot T_1\cdot\tan^2 a}{2\cdot 3\cdot r}, \qquad D_1 = \frac{T_1\tan^2 a}{r^2}$$

$$T_3 = \frac{(m^2+18)\cdot T_2\cdot\tan^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2} - \frac{D_1\tan^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2} \qquad D_2 = \frac{T_2\tan^2 a}{r^2},$$

$$T_4 = \frac{(m^2+50)\cdot T_3\cdot\tan^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2} - \frac{D_2\tan^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2} \qquad D_3 = \frac{T_3\tan^2 a}{r^2},$$

$$T_5 = \frac{(m^2+98)\cdot T_4\cdot\tan^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2} - \frac{D_3\tan^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2} \qquad D_4 = \frac{T_4\tan^2 a}{r^2},$$

$$T_6 = \frac{(m^2+162)\cdot T_5\cdot\tan^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2} - \frac{D_4\cdot\tan^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2}.$$

(11)大切求小矢：

$$\text{vers}\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan^2 a}{\lfloor 2\cdot m^2\cdot r}-\frac{(8m^2+1)\tan^4 a}{\lfloor 4\cdot m^4\cdot r^3}+\frac{(184m^4+40m^2+1)\tan^6 a}{\lfloor 6\cdot m^6\cdot r^5}$$

$$-\frac{(6448m^6+2464m^4+112m^2+1)\tan^8 a}{\lfloor 8\cdot m^8\cdot r^7}$$

$$+\frac{(648574m^8+229760m^6+14448m^4+240m^2+1)\tan^{10} a}{\lfloor 10\cdot m^{10}\cdot r^9}$$

$$-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=\frac{\tan^2 a}{2\cdot m^2\cdot r}$， $t=\frac{\tan^4 a}{r^2}$，

$$T_2=\frac{(8m^2+1)T_1\cdot 2T_1}{3\cdot 4\cdot r},\qquad D_1=2\cdot 3\cdot\frac{t\cdot T_1}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(32m^2+1)T_2\cdot 2T_1}{5\cdot 6\cdot r}-\frac{D_1}{5\cdot 6},\qquad D_2=4\cdot 5\cdot\frac{t\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(72m^2+1)T_3\cdot 2T_1}{7\cdot 8\cdot r}-\frac{D_2}{7\cdot 8},\qquad D_3=6\cdot 7\cdot\frac{t\cdot T_3}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(128m^2+1)\cdot T_4\cdot 2T_1}{9\cdot 10\cdot r}-\frac{D_3}{9\cdot 10}\qquad D_4=8\cdot 9\cdot\frac{t\cdot T_4}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(200m^2+1)\cdot T_5\cdot 2T_1}{11\cdot 12\cdot r}-\frac{D_4}{11\cdot 12}.$$

(12)小切求大矢:

$$\operatorname{vers} m\alpha = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5 - T_6 + \cdots\cdots,$$

$$= \frac{m^2 \tan^2 \alpha}{\lfloor 2 \cdot r} - \frac{m^2(m^2+8)\tan^4 \alpha}{\lfloor 4 \cdot r^3} + \frac{m^2(m^4+40m^2+184)\tan^6 \alpha}{\lfloor 6 \cdot r^5}$$

$$- \frac{m^2(m^6+112m^4+2464m^2+6448)\tan^8 \alpha}{\lfloor 8 \cdot r^7}$$

$$+ \frac{m^2(m^8+240m^6+14448m^4+229760m^2+648574)\tan^{10} \alpha}{\lfloor 10 \cdot r^9} - \cdots\cdots,$$

而 $$T_1 = \frac{m^2 \cdot \tan^2 \alpha}{2 \cdot r},$$

$$T_2 = \frac{(m^2+8)T_1 \tan^2 \alpha}{3 \cdot 4 \cdot r^2}, \qquad D_1 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{T_1 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_3 = \frac{(m^2+32) \cdot T_2 \cdot \tan^2 \alpha}{5 \cdot 6 \cdot r^2} - \frac{D_1 \tan^2 \alpha}{5 \cdot 6 \cdot r^2}, \qquad D_2 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{T_2 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_4 = \frac{(m^2+72) \cdot T_3 \cdot \tan^2 \alpha}{7 \cdot 8 \cdot r^2} - \frac{D_2 \tan^2 \alpha}{7 \cdot 8 \cdot r^2}, \qquad D_3 = 6 \cdot 7 \cdot \frac{T_3 \cdot \tan^2 \alpha}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(m^2+128)\cdot T_4\cdot\tan^2 a}{9\cdot 10\cdot r^2}-\frac{D_3\tan^2 a}{9\cdot 10\cdot r^2},\qquad D_4=8\cdot 9\cdot\frac{T_4\cdot\tan^2 a}{r^2},$$

$$T_6=\frac{(m^2+200)\cdot T_5\cdot\tan^2 a}{11\cdot 12\cdot r^2}-\frac{D_4\tan^2 a}{11\cdot 12\cdot r^2}.$$

(13)大弦求小切:

$$\tan\frac{a}{m}=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\sin a}{m}+\frac{(m^2+2)\sin^3 a}{\lfloor 3\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(9m^4+20m^2+16)\sin^5 a}{\lfloor 5\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(225m^6+518m^4+560m^2+272)\sin^7 a}{\lfloor 7\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(11025m^8+25832m^6+31584m^4+22848m^2+7936)\sin^9 a}{\lfloor 9\cdot m^9\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

而 $$T_1=\frac{\sin a}{m},$$

$$T_2=\frac{(m^2+2)T_1\cdot T_1^2}{2\cdot 3\cdot r^2},\qquad D_1=2\cdot\frac{T_1^3}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(9m^2+2)T_2\cdot T_1^2}{4\cdot5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot T_1^2}{4\cdot5\cdot r^2},\qquad D_2=2\cdot\frac{3\cdot T_1^2\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(25m^2+2)T_3\cdot T_1^2}{6\cdot7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot T_1^2}{6\cdot7\cdot r^2},\qquad D_3=2\cdot\frac{3(T_1^2\cdot T_3+T_2^2\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(49m^2+2)T_4\cdot T_1^2}{8\cdot9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot T_1^2}{8\cdot9\cdot r^2},\qquad D_4=2\cdot\frac{3T_1^2\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2^3}{r^2};$$

$$T_6=\frac{(81m^2+2)T_5\cdot T_1^2}{10\cdot11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot T_1^2}{10\cdot11\cdot r^2}.$$

(14)小弦求大切:

$$\tan m\alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6$$

$$=m\sin\alpha+\frac{(2m^2+1)\sin^3\alpha}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(16m^4+20m^2+9)\sin^5\alpha}{\lfloor 5\cdot r^4},$$

$$+\frac{(272m^6+560m^4+518m^2+225)\sin^7\alpha}{\lfloor 7\cdot r^6},$$

$$+\frac{(7936m^8+22848m^6+31584m^4+25832m^2+11025)\sin^9\alpha}{\lfloor 9\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

而　　$T_1=m\sin\alpha,$

$$T_2=\frac{(2m^2+1)\cdot T_1\cdot\sin^2 a}{2\cdot 3\cdot r^2}\qquad D_1=2m^2\frac{T_1^{\,3}}{r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2+9)\cdot T_2\cdot\sin^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2}+\frac{D_1\cdot\sin^2 a}{4\cdot 5\cdot r^2},\qquad D_2=2m^2\frac{3T_1^{\,2}\cdot T_2}{r^2},$$

$$T_4=\frac{(2m^2+25)\cdot T_3\cdot\sin^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2}+\frac{D_2\cdot\sin^2 a}{6\cdot 7\cdot r^2},\qquad D_3=2m^2\frac{3(T_1^{\,2}\cdot T_3+T_2^{\,2}\cdot T_1)}{r^2},$$

$$T_5=\frac{(2m^2+49)T_4\sin^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2}+\frac{D_3\cdot\sin^2 a}{8\cdot 9\cdot r^2},\qquad D_4=2m^2\frac{3T_1^{\,2}\cdot T_4+6T_1\cdot T_2T_3+T_2^{\,3}\cdot}{r^2};$$

$$T_6=\frac{(2m^2+81)T_5\cdot\sin^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2}+\frac{D_4\cdot\sin^2 a}{10\cdot 11\cdot r^2}.$$

(15)大矢求小切冪:

$$\tan\frac{a}{m}=\left\{r\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$=\left\{\frac{r(2\text{ vers }a)}{m^2}+\frac{(m^2+8)r^2(2\text{ vers }a)^2}{3\cdot 4\cdot m^4\cdot r}+\frac{(4m^4+40m^2+136)r^3(2\text{ vers }a)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot m^6\cdot r^2},\right.$$

$$+\frac{(36m^6+392m^4+1904m^2+3968)r^4(2\text{ vers }a)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot m^8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(576m^8+6560m^6+37128m^4+119040m^2+176896)r^5(2\text{ vers }a)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot m^{10}\cdot r^4}+\cdots\cdots\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

而

$$T_1=\frac{(2\text{ vers }a)}{m^2},$$

$$T_2=\frac{(m^2+8)T_1\cdot T_1}{3\cdot4\cdot r}, \qquad D_1=6m^2\frac{T_1{}^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(4m^2+8)T_2\cdot T_1}{5\cdot6\cdot r}+\frac{D_1\cdot T_1}{5\cdot6\cdot r}, \qquad D_2=6m^2\frac{2T_1\cdot T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(9m^2+8)T_3\cdot T_1}{7\cdot8\cdot r}+\frac{D_2\cdot T_1}{7\cdot8\cdot r}, \qquad D_3=6m^2\frac{2T_1T_3+T_2T_2}{r},$$

$$T_5=\frac{(16m^2+8)T_4\cdot T_1}{9\cdot10\cdot r}+\frac{D_3\cdot T_1}{9\cdot10\cdot r}, \qquad D_4=6m^2\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r};$$

$$T_6=\frac{(25m^2+8)T_5\cdot T_1}{11\cdot12\cdot r}+\frac{D_4\cdot T_1}{11\cdot12\cdot r}.$$

(16)小矢求大切冪.

$$\tan m\,a=\Big\{r\,(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots)\Big\}^{\frac{1}{2}};$$

$$=\left\{r\left[m^2(2\operatorname{vers}\alpha)+\frac{(8m^2+1)\cdot m^2\cdot(2\operatorname{vers}\alpha)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{(136m^4+40m^2+4)m^2(2\operatorname{vers}\alpha)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}\right.\right.$$

$$+\frac{(3968m^6+1904m^4+392m^2+36)m^2(2\operatorname{vers}\alpha)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$\left.\left.+\frac{(176896m^8+119040m^6+37128m^4+6560m^2+576)m^2(2\operatorname{vers}\alpha)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4}+\cdots\cdots\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

而 $T_1=m^2(2\operatorname{vers}\alpha)$,

$$T_2=\frac{(8m^2+1)T_1(2\operatorname{vers}\alpha)}{3\cdot4\cdot r},\qquad D_1=6m^2\frac{T_1^2}{r},$$

$$T_3=\frac{(8m^2+4)T_2(2\operatorname{vers}\alpha)}{5\cdot6\cdot r}+\frac{D_1(2\operatorname{vers}\alpha)}{5\cdot6\cdot r},\qquad D_2=6m^2\frac{2T_1T_2}{r},$$

$$T_4=\frac{(8m^2+9)T_3(2\operatorname{vers}\alpha)}{7\cdot8\cdot r}+\frac{D_2(2\operatorname{vers}\alpha)}{7\cdot8\cdot r},\qquad D_3=6m^2\frac{2T_1T_3+T_2^2}{r},$$

$$T_5=\frac{(8m^2+16)T_4(2\operatorname{vers}\alpha)}{9\cdot10\cdot r}+\frac{D_3(2\operatorname{vers}\alpha)}{9\cdot10\cdot r},\qquad D_4=6m^2\frac{2(T_1T_4+T_2T_3)}{r},$$

$$T_6=\frac{(8m^2+25)T_5(2\operatorname{vers}\alpha)}{11\cdot12\cdot r}+\frac{D_4(2\operatorname{vers}\alpha)}{11\cdot12\cdot r}.$$

(17)大切求小切:

$$\tan\frac{a}{m}=T_1-T_2+T_3-T_4+T_5-T_6+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\tan\alpha}{m}-\frac{(2m^2-2)\tan^3\alpha}{\lfloor\underline{3}\cdot m^3\cdot r^2}+\frac{(24m^4-40m^2+16)\tan^5\alpha}{\lfloor\underline{5}\cdot m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{(720m^6-1568m^4+1120m^2+272)\tan^7\alpha}{\lfloor\underline{7}\cdot m^7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(40320m^8-104704m^6+102144m^4-45696m^2+7936)\tan^9\alpha}{\lfloor\underline{9}\cdot m^9\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而 $$T_1=\frac{\tan\alpha}{m},$$

$$T_2=\frac{(m^2-1)T_1\cdot T_1^2}{3\ r^2},$$

$$T_3=\frac{(3m^2-2)T_2\cdot T_1^2}{5\ r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(5m^2-2)\cdot T_3\cdot T_1^2}{7\ r^2}-\frac{D_1}{7r^2},\qquad D_2=2T_2T_3T_1,$$

$$T_5=\frac{(7m^2-2)T_4\cdot T_1^2}{9r^2}-\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(9m^2-2)\cdot T_5\cdot T_1^2}{11r^2}-\frac{D_3}{11r^2},\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1,$$

(18)小切求大切:

$$\tan m\,a=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+\cdots\cdots,$$

$$=m\tan a-\frac{(2m^2-2)m\cdot\tan^3 a}{\underline{\lfloor 3}\cdot r^2}+\frac{(16m^4-40m^2+24)m\cdot\tan^5 a}{\underline{\lfloor 5}\cdot r^4}$$

$$-\frac{(272m^6-1120m^4+1568m^2-720)m\cdot\tan^7 a}{\underline{\lfloor 7}\cdot r^6}$$

$$+\frac{(7936m^8-45696m^6+102144m^4-104704m^2+40320)m\tan^9 a}{\underline{\lfloor 9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

而 $T_1=m\tan a$

$$T_2=\frac{(m^2-1)\cdot T_1\cdot\tan^2 a}{3r^2},$$

$$T_3=\frac{(2m^2-3)\cdot T_2\cdot\tan^2\alpha}{5r^2},\qquad D_1=T_2^2\cdot T_1,$$

$$T_4=\frac{(2m^2-5)\cdot T_3\cdot\tan^2\alpha}{7r^2}+\frac{D_1}{7r^2},\qquad D_2=2T_2\cdot T_3\cdot T_1,$$

$$T_5=\frac{(2m^2-7)\cdot T_4\cdot\tan^2\alpha}{9r^2}+\frac{D_2}{9r^2},\qquad D_3=(2T_2T_4+T_3^2)T_1,$$

$$T_6=\frac{(2m^2-9)\cdot T_5\cdot\tan^2\alpha}{11r^2}+\frac{D_3}{11r^2}.\qquad D_4=2(T_2T_5+T_3T_4)T_1;$$

以下十八術見割圜密率卷三,其證見割圜八線綴術卷三,并用還原術或借徑術入之.至大小割線互求式,僅得小割求大弦,與小割求大矢四術,餘則未能求得差根(如D_1, D_2,……等),故無可立術也.

割圜八線綴術卷四,臚列弦,切,矢,割,弧背求各線式,如:

(a) 弦求各線式:

$$\text{vers}\,\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$\tan a=\sin a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^9 a}{r^8}+\cdots\cdots, \qquad \text{(項名達)}$$

$$=\sin a+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}+\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}$$

$$+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^9 a}{r}+\cdots\cdots, \qquad \text{(項名達)}$$

$$\sec a=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots, \qquad \text{(項名達)}$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots, \qquad \text{(項名達)}$$

$$\cos a=r-\text{vers } a=r-\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots\right\},$$

$$a=\sin a+\frac{1^2\sin^3 a}{\lfloor\underline{3}\cdot r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2}{\lfloor\underline{5}}\cdot\frac{\sin^5 a}{r^4}$$

$$+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{\underline{|7}}\cdot\frac{\sin^7 a}{r^6}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{\underline{|9}}\cdot\frac{\sin^9 a}{r^8}$$

$$-\cdots\cdots; \qquad \text{(VII)}$$

(b) 切求各線式:

$$\sin a=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}-\cdots\cdots,$$

$$\text{vers } a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots,$$

$$\sec a=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots,$$

$$a=\tan a-\frac{1}{3}\cdot\frac{\tan^3 a}{r^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}-\frac{1}{7}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}$$

$$+\cdots,$$

(戴煦)

(c) 矢求各線式:

$$\sin a=2\text{ vers } a-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\text{ vers } a)^2}{r},$$

$$\tan a=(2\operatorname{vers} a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$\sec a=r+\frac{(2\operatorname{vers} a)}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^3}{r^2}+\frac{2}{4\cdot 4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^2}{r}+\frac{1^2}{\lfloor 4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{1^2\cdot 2^2}{\lfloor 6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^4}{r^3}+\frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{\lfloor 8}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^5}{r^4}$$

$$+\cdots\cdots,$$

(d) 割求各線式:

$$\sin^2 a=(\sec a-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 6}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}$$

$$-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4}$$

$$-\cdots\cdots,$$

$$\tan a=(\sec a-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r},$$

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{2}\cdot(\sec a-r)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1}{4\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$a=\frac{1}{\underline{|2}}(\sec a-r)-\frac{5}{\underline{|4}}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{64}{\underline{|6}}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1560}{\underline{|8}}\;\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

(e) 弧背求各線式:

$$\sin a=a-\frac{a^3}{\underline{|3}\cdot r^2}+\frac{a^5}{\underline{|5}\cdot r^4}-\frac{a^7}{\underline{|7}\cdot r^6}+\frac{a^9}{\underline{|9}\cdot r^8}-\cdots\cdots,$$

(II)

$$\tan a=a-\frac{2}{\underline{|3}}\cdot\frac{a^3}{r^2}+\frac{16}{\underline{|5}}\cdot\frac{a^5}{r^4}+\frac{272}{\underline{|7}}\cdot\frac{a^7}{r^6}+\cdots,$$ (戴煦)

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^2}{r}-\frac{1}{\underline{|4}}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{1}{\underline{|6}}\cdot\frac{a^6}{r^5}-\frac{1}{\underline{|8}}\cdot\frac{a^8}{r^7}+\cdots,$$

(III)

$$\sec a=r+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{a^2}{r}+\frac{5}{\underline{|4}}\cdot\frac{a^4}{r^3}+\frac{61}{\underline{|6}}\cdot\frac{a^6}{r^5}+\frac{1385}{\underline{|8}}\cdot\frac{a^8}{r^7}$$

$$+\cdots\cdots,$$ (戴煦)

割圜八線綴術卷二載

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot 4^8}\cdot\frac{\sin^8 \alpha}{r^7}+\cdots\cdots,$$

式之幾何證法.

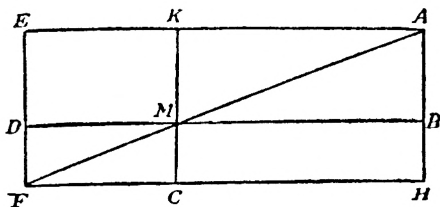
術曰: $\text{vers}\,\alpha=T_1+T_2+T_3+T_4+\cdots\cdots,$

而 $$T_1=\frac{\sin \alpha}{d},\quad T_2=\frac{T_1^2}{d},\quad T_3=\frac{(2T_1+T_2)T_1}{d},$$

$$T_4=\frac{\{2(T_1+T_2)+T_3\}T_3}{d}+\cdots\cdots,$$

如第四十五圖先作AF長方形,

令 EK=正矢,$KA=d-$正矢=餘矢,



第 四 十 五 圖

而 $KC=EK.$

又 $\square AC$=正矢 × 餘矢$=\sin^2 \alpha.$

但 $\square AC=\square AD,$

$\therefore$ $\square AD=\sin^2 \alpha.$

則 $$ED=T_1=\frac{\sin^2 \alpha}{d}.$$

次取 $KL=KM$,作線交 BD 線於 N,次作 AC 對角線,此線必過 N 點,次作 AF 線此線必過 M' 點.

第四十六圖

因 $$KL=KM=T_1,\ T_1^2=\square KN=\square NH=BG,$$

則 $$DG=T_2=\frac{T_1^2}{d}.$$

次取 $M'N'=M'N$,作 $N'H'$ 線.

次取 $MD'=N'H'$ 作 $D'G'$ 線.

第四十七圖

則 $\square LN'=(T_1+T_2)T_2=\square DG_1,$

[因 $DM=LM'+N'H'$

$MD'=N'H'$

$\therefore\quad DD'=LM'.$]

又 $\square MM'=T_2T_1,$

$\therefore\quad \square DG'+\square MM'=(2T_1+T_2)T_2,$

又 $\square NG=\square M'H,$

則 $(2T_1+T_2)T_3=\square N'H=\square B'G''=\dfrac{(2T_1+T_2)T_2}{d}=GG''.$

前圖爲徐有壬所設以證各線互求各式.今證前術,可先設比例式如:

(1) $d:\sin\alpha=\sin\alpha:T_1,$

(2) $d:T_1=T_1:T_2,$

(3) $d:T_2=2T_1+T_2:T_3,$

(4) $d:T_3=2(2T_1+T_2)+T_3:T_4,\cdots\cdots$

命 $\phi_1=r$(爲半徑)$=\dfrac{d}{2},\qquad \phi_2=\sin\alpha,\ 2\phi_1=d,$ 故,

(1) $2\phi_1:\phi_2=\phi_2:T_1\qquad T_1=\dfrac{\sin^2\alpha}{2r}=\dfrac{\sin^2\alpha}{d}=\dfrac{\phi_3}{2},$

(2) $2\phi_1:\dfrac{\phi_3}{2}=\dfrac{\phi_3}{2}:T_2,\qquad T_2=\dfrac{\sin^4\alpha}{2\cdot4\cdot r^3}=\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}.$

(3) $2\phi_1:\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}=\left(\dfrac{2\phi_3}{2}+\dfrac{\phi_5}{2\cdot4}\right):T_3,\ T_3=\dfrac{2\phi_7}{2\cdot4^2}+\dfrac{\phi_9}{2\cdot4^3},$

$$(4)\quad 2\phi_1 : \left(\frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}\right)=\left\{2\left(\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{2\cdot 4}\right)+\frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}\right\}:T_4,$$

$$\therefore\qquad T_4=\frac{4\phi_9}{2\cdot 4^3}+\frac{6\phi_{11}}{2\cdot 4^4}+\cdots\cdots,$$

同理，$$T_5=\frac{8\phi_{11}}{2\cdot 4^4}+\cdots\cdots,$$

并之,得 $$\text{vers}\,a=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{2\cdot 4}+\frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2}+\frac{\phi_9}{2\cdot 4^3}+\left(\frac{4\phi_9}{2\cdot 4^3}+\frac{6\phi_{11}}{2\cdot 4^4}\right)$$

$$+\left(\frac{8\phi_{11}}{2\cdot 4^4}\right)+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots.$$

證訖.

以後各式,徐有壬以還原術,借徑術,商除法之代數法算之.左潛以爲還原術在明氏通弦求弧背,及正矢求弧背法解,已經道及;而借徑術卽明氏借十分全弧通弦率,求百分全弧通弦率,及借百分全弧通弦率,求十分全弧通弦率也.而商除法乃還原術之變法.(30) 實則商除法在項氏象數一原,及戴氏外切密率中已

(30) 見割圜八綫綴術,左潛,同治癸酉(1873)刻.

屢有說述,而借徑術卽項氏所稱之易率法也.

(切求正弦式)

(證)旣得弦求切式,用還原法入之,得切求弦式.

命 $\phi'_2=\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3\alpha}{r^2}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^5\alpha}{r^4}$

$$+\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\sin^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\sin^9\alpha}{r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2+\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot4}+\frac{10\phi_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4^3}+\cdots\cdots,$$

故 $\phi'_3=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\phi_3+\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot4}+\frac{32\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot4^3},$

$$\phi'_4=\frac{\phi'_2\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\phi_4+\frac{3\phi_6}{2}+\frac{15\phi_8}{2\cdot4}+\frac{70\phi_{10}}{2\cdot4^2},$$

$$\phi'_6=\phi_6+\frac{5\phi_8}{2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4},$$

$$\phi'_8=\phi_8+\frac{7\phi_{10}}{2},$$

$$\phi'_{10}=\phi_{10}.$$

故 $\phi_2=\phi'_2-\frac{\phi'_4}{2}+\frac{3\phi'_6}{2\cdot4}-\frac{10\phi'_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi'_{10}}{2\cdot4^3}-\cdots\cdots,$

卽 $\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{\tan^3\alpha}{2r}+\frac{3\tan^5\alpha}{2\cdot4\cdot r^4}-\frac{10\tan^7\alpha}{2\ 4^2\cdot r^6}$

$$+\frac{35\tan^9\alpha}{2\cdot4^3\cdot r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}$$

$$-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}-\cdots$$。證訖.

(割求正弦率)

(證)既得弦求割式,用還原法入之,得割求弦式.

命 $$\phi'_3=2(\sec\alpha-r)=\frac{\sin^2\alpha}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4\alpha}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6\alpha}{r^5}$$

$$+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8\alpha}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{10\phi_7}{4^2}+\frac{35\phi_9}{4^3}+\frac{126\phi_{11}}{4^4},$$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r}=\phi_5+\frac{3\phi_7}{4}+\frac{29\phi_9}{4^2}+\frac{130\phi_{11}}{4^3},$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{2^3(\sec\alpha-r)^3}{r^2}=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{57\phi_{11}}{4^2},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec\alpha-r)^4}{r^3}=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$$

$$\phi'_{11}=\phi_{11}.$$

故 $$\phi_3=\phi_3'-\frac{3\phi'_5}{4}+\frac{8\phi'_7}{4^2}-\frac{20\phi'_9}{4^3}+\frac{48\phi'_{11}}{4^4},$$

即 $$\sin^2\alpha=(\sec\alpha-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^2}{r}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^3}{r^2}$$

$$-\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(\sec\alpha-r)^4}{r^3}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

(切求矢式)

(證)有切求弦式,有弦求矢式,用借徑術入之,得切求矢式.

由切求弦式,

命 $$\phi'_2=\sin\alpha=\tan\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3\alpha}{r}+\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^5\alpha}{r^4}$$

$$-\frac{10}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\tan^7\alpha}{r^6}+\frac{35}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\tan^9\alpha}{r^8}-\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot4^3}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_3=\frac{\phi_2'\cdot\phi'_2}{\phi_1}=\frac{\sin^2\alpha}{r}=\phi_3-\frac{2\phi_5}{2}+\frac{8\phi_7}{2\cdot4}-\frac{32\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{128\phi_{11}}{2\cdot4^3},$$

$$\phi'_5=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_3}{\phi_1}=\frac{\sin^4\alpha}{r^3}=\phi_5-\frac{4\phi_7}{2}+\frac{24\phi_9}{2\cdot4}-\frac{128\phi_{11}}{2\cdot4^2},$$

$$\phi'_7=\frac{\phi'_3\cdot\phi'_5}{\phi_1}=\frac{\sin^6\alpha}{r^5}=\phi_7-\frac{6\phi_9}{2}+\frac{48\phi_{11}}{2\cdot4},$$

$$\phi'_9=\frac{\sin^8\alpha}{r^7}=\phi_9-\frac{8\phi_{11}}{2},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\sin^{10}\alpha}{r^9}=\phi_{11}.$$

又由弦求矢式知

$$\text{vers}\,a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{2}{2\cdot4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}$$

$$+\frac{5}{2\cdot4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\cdots\cdots,$$

$$=\frac{\phi'_3}{2}+\frac{\phi'_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi'_7}{2\cdot4^2}+\frac{5\phi'_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi'_{11}}{2\cdot4^4},$$

齊其分母相消,得

$$\text{vers}\,a=\frac{\phi_3}{2}-\frac{3\phi_5}{2\cdot4}+\frac{10\phi_7}{2\cdot4^2}-\frac{35\phi_9}{2\cdot4^3}+\frac{126\phi_{11}}{2\cdot4^4},$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{3}{2\cdot4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots\cdots$$ 證訖.

(矢求切式)

(證)旣得切求矢式,用還原法入之,得矢求切式,

$$\tan a=(2\,\text{vers}\,a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^2}{r}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^3}{r^2}$$

$$+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\,\text{vers}\,a)^4}{r^3}+\cdots\cdots$$ 證訖.

(切求割式)

(證)有切求弦式,有弦求割式,用借徑術入之,得切求割式.

由切求弦式,

命 $\phi'_2=\sin a=\tan a-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^3 a}{r}+\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\tan^5 a}{r^4}$

$$-\frac{10}{2\cdot 4^2}\cdot\frac{\tan^7 a}{r^6}+\frac{35}{2\cdot 4^3}\cdot\frac{\tan^9 a}{r^8}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_2-\frac{\phi_4}{2}+\frac{3\phi_6}{2\cdot 4}-\frac{10\phi_8}{2\cdot 4^2}+\frac{35\phi_{10}}{2\cdot 4^3}-\cdots\cdots,$$

如前求得$\phi'_3, \phi'_5, \phi'_7, \phi'_9, \phi'_{11},\cdots\cdots$;

又由弦求割式,知

$$(\sec a-r)=\frac{\phi'_3}{2}+\frac{3\phi'_5}{2\cdot 4}+\frac{10\phi'_7}{2\cdot 4}+\frac{35\phi'_9}{2\cdot 4^3}+\frac{126\phi'_{11}}{2\cdot 4^4}+\cdots,$$

齊其分母相消,得

$$\sec a=r+\frac{\phi_3}{2}-\frac{\phi_5}{2\cdot 4}+\frac{2\phi_7}{2\cdot 4^2}-\frac{5\phi_9}{2\cdot 4^3}+\frac{14\phi_{11}}{2\cdot 4^4},$$

$$=r+\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}$$

$$-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\cdots\cdots.$$ 證訖.

(割求切式)

(證)既得切求割式,用還原法入之,得割求切式,如:

$$\frac{\tan^2 a}{r}=2(\sec a-r)+\frac{2^2}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}.$$ 證訖

(矢求割式)

(證)有矢求切式,有切矢割式,用借徑術入之,得矢求割式.

由矢求切式,

命 $\phi'_3=\tan a=(2\text{ vers }a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^2}{r}$

$$+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^3}{r^2}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{(2\text{ vers }a)^4}{r^3}+\cdots\cdots,$$

$$=\phi_3+\frac{3\phi_5}{4}+\frac{8\phi_7}{4^2}+\frac{20\phi_9}{4^3}+\frac{48\phi_{11}}{4^4},$$

$$\phi'_5=\phi_5+\frac{6\phi_7}{4}+\frac{25\phi_9}{4^2}+\frac{88\phi_{11}}{4^3},$$

$$\phi'_7=\phi_7+\frac{9\phi_9}{4}+\frac{51\phi_{11}}{4^2},$$

$$\phi'_9=\phi_9+\frac{12\phi_{11}}{4},$$

$$\phi'_{11}=\phi_{11};$$

又由切求割式,知

$$\sec a-r=\frac{\phi'_3}{2}-\frac{\phi'_5}{2\cdot4}+\frac{2\phi'_7}{2\cdot4^2}-\frac{5\phi'_9}{2\cdot4^3}+\frac{14\phi'_{11}}{2\cdot4^4},$$

$$=\frac{\phi_3}{2}+\frac{\phi_5}{4}+\frac{\phi_7}{2\cdot4}+\frac{\phi_9}{2\cdot4^2}+\frac{\phi_{11}}{2\cdot4^3}.$$

即 $\sec a=r+\frac{1}{2}(2\operatorname{vers} a)+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^2}{r}$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^3}{r^2}+\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} a)^4}{r^3}+\cdots.$$ 證訖.

(割求矢式)

(證)既得矢求割式,用還原法入之,得割求矢式,如:

$$\operatorname{vers} a=\frac{1}{2}(\sec a-r)-\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r}-\frac{1}{4\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^3}+\cdots.$$ 證訖.

(切求弧背式)

(證)有切求弦,有弦求弧背,用借徑術入之,即得.

(弧背求割式)

(證)有弧背求弦,有弦求割,用借徑術入之,即得.

(割求弧背式)

(證)有弧背求割式,用還原法入之,即得.

(矢求弧背式)

(證)有弧背求矢式,用還原法入之,即得.

以上見割圜八線綴術卷二,其餘各式證法互見明氏項氏,戴氏書中,玆不復載.

割圜八線綴術卷三,又證大小割與各線互求各

式,如:

(小割求大弦冪式)

(證)有割求弦式,有小弦求大弦式,用借徑術入之,卽得小割求大弦冪式.

命割求弦式內 $\sin^2 a$ 爲三率,卽,

$$\phi'_3=\sin^2 a=(\sec a-r)-\frac{3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{8}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{20}{4^3}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{48}{4^4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4}-\cdots\cdots,$$

$$\phi'_5=\frac{\sin^4 a}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{25}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{88}{4^3}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{\sin^6 a}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{9}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{51}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{\sin^8 a}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{12}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\sin^{10} a}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

又將小弦求大弦式兩邊自乘,得:

$$(\sin m\,a)^2=m^2\sin^2 a-\frac{(2m^4-2m^2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^2}+\frac{(16m^6-80m^4+64m^2)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^4}$$

$$-\frac{(16m^8-224m^6+784m^4-576m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\ 6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^6}$$

$$+\frac{(256m^{10}-7680m^8+69888m^6-209920m^4+147456m^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^8}-\cdots\cdots,$$

代入通分相消,得

$$(\sin m\,a)^2=m^2(\sec a-r)-\frac{(4m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^2}{r^2}+\frac{(16m^4+100m^2+64)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^3}{r^4}$$

$$\frac{64m^6+1120m^4+3556m^2+1560)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^4}{r^6}$$

$$+\frac{(256m^8+9600m^6+85008m^4+183200m^2+62136)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{m^2(\sec a-r)^5}{r^8}$$

爲小割求大弦冪式,倒置其乘數,卽大割求小弦冪式也.

(小割求大矢式)

(證)有割較求矢式,有小矢求大矢式,用借徑術入之,卽得小割求大矢式。

命割較求矢式內 $2\,\mathrm{vers}\,a$ 爲三率,卽,

$$\phi'_3=(2\,\mathrm{vers}\,a)=(\sec a-r)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}$$

$$+\frac{1}{4\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_5=\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^2}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r}$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^3}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r}-\frac{3}{2}\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}$$

$$+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^4}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\,\mathrm{vers}\,a)^5}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大矢式入之,卽,

$$\text{vers}\, m\, a=\frac{m^2(2\,\text{vers}\, a)}{\lfloor 2}-\frac{(m^4-m^2)(2\,\text{vers}\, a)^2}{\lfloor 4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^6-5m^4+4m^2)(2\,\text{vers}\, a)^3}{\lfloor 6\cdot r^2}$$

$$-\frac{(m^8-14m^6+49m^4-36m^2)(2\,\text{vers}\, a)^4}{\lfloor 8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(m^{10}-30m^8+273m^6-820m^4+576m^2)(2\,\text{vers}\, a)^5}{\lfloor 10\cdot r^4}$$

$$=\frac{m^2(\sec a-r)}{\lfloor 2}-\frac{(m^4+5m^2)(\sec a-r)^2}{\lfloor 4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^6+25m^4+64m^2)(\sec a-r)^3}{\lfloor 6\cdot r^2}$$

$$-\frac{(m^8+70m^6+889m^4+1560m^2)(\sec a-r)^4}{\lfloor 8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(m^{10}+150m^8+5313m^6+45800m^4+62136m^2)(\sec a-r)^5}{\lfloor 10\cdot r^4}$$

爲小割求大矢式,倒置其乘數,即大割求小矢式也

(大矢求小割式)

(證)既得小割求大矢式,用還原術入之,得大矢求小割式.

$$命\ \phi'_3=\frac{(2\,\text{vers}\, m\, a)^2}{m^2}=(\sec a-r)-\frac{(m^2+5)(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{(m^4+25m^2+64)(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\frac{(m^6+70m^4+889m^2+1560)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\ r^3}$$

$$+\frac{(m^8+150m^6+313m^4+45800m^2+62136)(\sec a-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\ r^4}$$

$$\phi'_5=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^2}{m^4\cdot r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{(2m^2+10)(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot r^2}$$

$$+\frac{(9m^4+150m^2+381)(\sec a-r)^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^3}-\frac{(34m^6+1260m^4+10626m^2+18320)(\sec a-r)^5}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^4}$$

$$\phi'_7=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^3}{m^6\ r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{(2m^2+10)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot r^3}$$

$$+\frac{(21m^4+300m^2+759)(\sec a-r)^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^4}{m^8\cdot r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{(4m^2+20)(\sec a-r)^5}{3\cdot4\cdot r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\ \text{vers}\ m\ a)^5}{m^{10}\cdot r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

即 $(\sec\alpha - r) = \phi'_3 + \frac{(m^2+5)\phi'_5}{3\cdot4} + \frac{(4m^4+25m^2+61)\phi'_7}{3\cdot4\cdot5\cdot6}$

$$+\frac{(6m^6+245m^4+854m^2+1385)\phi'_9}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}$$

$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)\phi'_{11}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}$$

$$(\sec\alpha - r) = \frac{(2\operatorname{vers} m\alpha)}{m^2} + \frac{(m^2+5)}{3\cdot4}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\alpha)^2}{m^4\cdot r} + \frac{(4m^4+25m^2+61)}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\alpha)^4}{m^6\cdot r^2}$$

$$+\frac{(36m^6+245m^4+854m^2+1385)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\alpha)^6}{m^8\cdot r^3}$$

$$+\frac{(576m^8+4100m^6+16653m^4+41550m^2+50521)}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}\cdot\frac{(2\operatorname{vers} m\alpha)^8}{m^{10}\cdot r^4}$$

爲大矢求小割式,倒置其乘數,即小矢求大割式.

（小割求大割式）

（證）有割求矢式,有小矢求大割式,用借徑術入之,即得小割求大割式.

命割求矢式內(2 vers a)爲三率,卽,

$$\phi'_3=(2\ \mathrm{vers}\ a)=(\sec a-r)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^2}{r}+\frac{1}{4}\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}$$

$$+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_5=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ a)^2}{r}=\frac{(\sec a-r)^2}{r}-\frac{2}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_7=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ a)^3}{r^2}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{6}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ a)^4}{r^3}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}-\frac{4}{2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^5}$$

$$\phi'_{11}=\frac{(2\ \mathrm{vers}\ a)^5}{r^4}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4};$$

乃依小矢求大割式,

$$(\sec ma-r)=m^2(2\ \mathrm{vers}\ a)+\frac{m^2(5m^2+1)(2\ \mathrm{vers}\ a)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4+25m^2+4)(2\ \mathrm{vers}\ a)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6+854m^4+245m^2+36)(2\text{ vers }a)^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8+41550m^6+16653m^4+4100m^2+576)(2\text{ vers }a)^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\ 10\cdot r^4},$$

代入通分相消,得

$$(\sec ma-r)=m^2(2\sec a-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot r}+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6-4270m^4+4445m^2-1560)(\sec a-r)^4}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8-207750m^6+324093m^4-229000m^2+62136)(\sec a-r)^5}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot r^4},$$

爲小割求大割式,倒置其乘數,卽大割求小割式.

(小弦求大割式)

(證)有弦求割式,有小割求大割式,用借徑術入之,卽得小弦求大割式.

命弦求割式內 $2(\sec a-r)$ 爲三率,卽,

$$\phi'_3=(2\sec a-r)=\frac{\sin^2 a}{r}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin^4 a}{r^3}+\frac{10}{4^2}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{35}{4^3}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\frac{126}{4^4}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}=\frac{\sin^4 a}{r^3}-\frac{6}{4}\cdot\frac{\sin^6 a}{r^5}+\frac{29}{4^2}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}-\frac{130}{4^3}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec a-r)^3}{r^3}=\frac{\sin^6 a}{r^5}-\frac{9}{4}\cdot\frac{\sin^8 a}{r^7}+\frac{57}{4^2}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec a-r)^4}{r^5}=\frac{\sin^8 a}{r^7}-\frac{12}{4}\cdot\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec a-r)^5}{r^7}=\frac{\sin^{10} a}{r^9},$$

乃依小割求大割式,代入通分相消,得

$$2(\sec m\,a-r)=m^2(2)(\sec a-r)+\frac{m^2(5m^2-5)(2)^2(\sec a-r)^2}{3\cdot4\cdot r}$$
$$+\frac{m^2(61m^4-125m^2+64)(2)^3(\sec a-r)^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}+\cdots\cdots,$$

卽

$$(\sec m\,a-r)=\frac{m^2\sin^2 a}{\lfloor 2\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-5)\sin^4 a}{\lfloor 4\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4+100m^2+64)\sin^6 a}{\lfloor 6\cdot r^5}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6+3416m^4+3920m^2+2304)\sin^8 a}{\lfloor\!\underline{8}\cdot r^7}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8+167200m^6+266448m^4+262400m^2+47456)\sin^{10} a}{\lfloor\!\underline{10}\cdot r^9},$$

爲小弦求大割式,倒置其乘數,卽大弦求小割式.

(小切求大割式)

(證)有切求割式,有小割求大割式,用借徑術入之,卽得小切求大割式.

命切求割式內 $2(\sec a-r)$ 爲三率,卽,

$$\phi'_3=2(\sec a-r)=\frac{\tan^2 a}{r}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\tan^4 a}{r^3}+\frac{2}{4^2}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}-\frac{5}{4^3}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\frac{14}{4^4}\cdot\frac{\tan^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_5=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}=\frac{\tan^4 a}{r^3}-\frac{2}{4}\cdot\frac{\tan^6 a}{r^5}+\frac{5}{4^2}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}-\frac{14}{4^3}\cdot\frac{\tan^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_7=\frac{2^3(\sec a-r)^3}{r^3}=\frac{\tan^6 a}{r^5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{\tan^8 a}{r^7}+\frac{9}{4^2}\cdot\frac{\tan^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_9=\frac{2^4(\sec a-r)^4}{r^4}=\frac{\tan^8 a}{r^7}-\frac{4}{4}\cdot\frac{\tan^{10} a}{r^9},$$

$$\phi'_{11}=\frac{2^5(\sec\alpha-r)^5}{r^9}=\frac{\tan^{10}\alpha}{r^9}$$

乃依小割求大割式,代入通分相消,得

$$(\sec m\alpha-r)=\frac{m^2\tan^2\alpha}{\lfloor\underline{2}\cdot r}+\frac{m^2(5m^2-8)\tan^4\alpha}{\lfloor\underline{4}\cdot r^3}+\frac{m^2(61m^4-200m^2+184)\tan^6\alpha}{\lfloor\underline{6}\cdot r^5}$$

$$+\frac{m^2(1385m^6-6832m^4+12320m^2-8448)\tan^8\alpha}{\lfloor\underline{8}\cdot r^7}$$

$$+\frac{m^2(50521m^8-332400m^6+881328m^4-1148800m^2+648576)\tan^{10}\alpha}{\lfloor\underline{10}\cdot r^9},$$

為小切求大割式,倒置其乘數,即大切求小割式.

(小割求大切冪)

(證)有割求切式,有小切求大切式,用借徑術入之,即得小割求大切冪式.

命割求切式內 $\frac{\tan^2\alpha}{r}$ 為三率,即

$$\phi'_3=\frac{\tan^2\alpha}{r}=2(\sec\alpha-r)+\frac{1}{4}\cdot\frac{2^2(\sec\alpha-r)^2}{r},$$

$$\phi'_5=\frac{\tan^4 a}{r^3}=\frac{2^2(\sec a-r)^2}{r}+\frac{2^3}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{2^4}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3},$$

$$\phi'_7=\frac{\tan^6 a}{r^5}=\frac{(\sec a-r)^3}{r^2}+\frac{3\cdot 2^4}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{3\cdot 2^5}{4^2}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_9=\frac{\tan^8 a}{r^7}=\frac{(\sec a-r)^4}{r^3}+\frac{4\cdot 2^5}{4}\cdot\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

$$\phi'_{11}=\frac{\tan^{10} a}{r^9}=\frac{(\sec a-r)^5}{r^4},$$

乃依小切求大切式,兩邊自乘,得

$$(\tan m\, a)^2=m^2\tan^2 a+\frac{(4m^2-4)\,m^2\tan^4 a}{\lfloor 3\cdot r^2}+\frac{(136m^4-320m^2+184)\,m^2\tan^6 a}{\lfloor 5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(992m^6-3808m^4+4928m^2-2112)\,m^2\tan^8 a}{\lfloor 7\cdot r^6}$$

$$+\frac{(176896m^8-952320m^6+1964928m^4-1838080m^2+648576)\,m^2\tan^{10} a}{\lfloor 9\; r^8}$$

$$\frac{(\tan m\,a)^2}{r}=m^2\cdot 2\cdot(\sec a-r)+\frac{m^2\cdot(8m^2-5)\cdot 2^2(\sec a-r)^2}{3\cdot 4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(136m^4-200m^2+64)\cdot 2^3\cdot(\sec a-r)^3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^2}$$

$$+\frac{m^2(3968m^6-9520m^4+7112m^2-1560)\cdot 2^4\cdot(\sec a-r)^4}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^3}$$

$$+\frac{m^2(176896m^8-595200m^6+722568m^4-366400m^2+62136)\cdot 2^5\cdot(\sec a-r)^5}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot r^4},$$

爲小割求大切冪式,倒置其乘數,即大割求小切冪式也.

以上割線與各線互求各式證法,并見徐有壬割圜八線綴術卷三,卷四.就中僅小割求大弦,與小割求大矢四術,可以立術,餘則未能求得差根,故割圜密率卷三,僅記十八術.

21. 夏鸞翔,吳誠,蔣士棟,淩步芳.

夏鸞翔(字紫笙,杭州人,1823–1864)爲項名達弟子,於所著致曲術稱:辛酉

(1861)歲暮,偶用西人微積分推得:

$$a^2=\sin^2 a+\frac{4\sin^4 a}{3\cdot4\cdot r^2}+\frac{4^2\cdot2^2\cdot\sin^6 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^4}+\frac{4^3\cdot2^2\cdot3^2\cdot\sin^8 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot r^6}$$

$$+\cdots\cdots, \qquad (1).$$

$$a=r^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{vers}^{\frac{1}{2}}a+T_1\frac{\operatorname{vers} a}{2\cdot2\cdot3\cdot r}+T_2\frac{3^2\cdot\operatorname{vers} a}{2\cdot4\cdot5\cdot r}$$

$$+T_3\frac{5^2\operatorname{vers} a}{2\cdot6\cdot7\cdot r}+\cdots\cdots,$$

$$=r^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2}}\ \operatorname{vers}^{\frac{1}{2}}a+\frac{\operatorname{vers}^{\frac{3}{2}}a}{2^{\frac{1}{2}}\cdot\lfloor 3\cdot r^{\frac{1}{2}}}+\frac{3^2\cdot\operatorname{vers}^{\frac{5}{2}}a}{2^{\frac{3}{2}}\cdot\lfloor 5\cdot r^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{3^2\cdot5^2\cdot\operatorname{vers}^{\frac{7}{2}}a}{2^{\frac{5}{2}}\cdot\lfloor 7\cdot r^{\frac{5}{2}}}+\cdots\cdots, \qquad (2)$$

$$=r\left\{\frac{2\operatorname{vers} a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\operatorname{vers} a}{2\cdot\lfloor 3\cdot r}+\frac{3^2\operatorname{vers}^2 a}{2^2\ \lfloor 5\cdot r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3^2\cdot5^2\cdot\operatorname{vers}^3 a}{2^3\cdot\lfloor 7\cdot r^3}+\cdots\cdots\right), \qquad (2)_b$$

$$a=r\left\{\frac{2\operatorname{vers} a}{r}\right\}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2^2\cdot\operatorname{vers} a}{3\cdot4\cdot r}+\frac{2^2\cdot4^2\cdot\operatorname{vers}^2 a}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r}\right.$$

$$+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\ \text{vers}^3\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots); \qquad (3).$$

夏鸞翔又撰萬象一原九卷 (1862),用正弦微分式自乘後求積分,得,

$$\alpha=r\left\{\frac{\sin^2\alpha}{r^2}+\frac{2^2\cdot\sin^4\alpha}{3\cdot 4\cdot r^4}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\sin^6\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot r^6}\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\sin^8\alpha}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot r^8}+\cdots\cdots\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (1).$$

吳誠著割圜通解一卷,因董,項,戴,李,徐,夏各家之說,以代數演算,俾其義可以一貫.

此外蔣士棟(無錫人)之弧矢釋李,圓率釋董(1897),則篇幅太簡,未足以盡董,李之旨.凌步芳(字仲儒號貢南,番禺人,?-1902) 之割圜捷術通義四卷,則於杜術外增三十二術,幷取徑於微積溯源.其第三十術「弧求正切」自註稱:「弧在半象限以下,切線甚小者,可用此術求之」,卽,

$$\tan\alpha=\alpha+\frac{1\cdot\alpha^3}{3\cdot r^2}+\frac{1\cdot 2\cdot\alpha^5}{3\cdot 5\cdot r^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\alpha^7}{3\cdot 5\cdot 7\cdot r^6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\alpha^9}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot r^8}$$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\alpha^{11}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot r^{10}}+\cdots\cdots. \qquad \text{(近似值)}.$$

(四) 三角函數表計算法

22. 明末三角函數表計算法之輸入

明季耶穌會士輸入三角函數表計算法.論此者有大測二卷,題修政歷法極西耶穌會士鄧玉函(Jean Terrenz,德干司但司人,1621 來華,1576-1630 卒.)譔,湯若望 (Johann Adam Schall von Bell, 號道未,德哥倫人,1622 來華, 1591-1666) 訂;門人鄭洪猷,陳應登,陳于階,周胤,潘國祥劉有慶受法,徐光啓 (1592-1633) 督修,崇禎四年 (1631) 正月二十八日呈進.大測卷一,表原篇第三,先言六宗率,表法篇第四,言三要法,及二簡法;爲計算三角函數表之用.惟僅能得最小之45′函數,以後每越45′,便得一率,直至90°爲止.

先設半徑 r=10,000,000,作圓內切六種多邊形,計算其邊數,卽得各弧之通弦,如:

宗率一. 圜內六邊等切形,求邊數. 從幾何原本IV, 15得邊 =10,000,000.

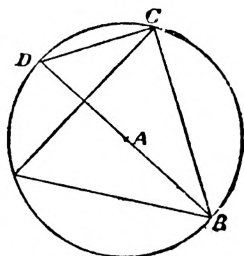
宗率二. 內切圜直角方形,求邊數. 從幾何原本IV, 6; I, 47得邊 =14,142,196.

宗率三.圓內三邊等切形,求邊數. 從幾何原本 XIII, 12.

因 $\overline{DB}^2=\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AB}^2$,

$\therefore \quad \overline{BC}^2=3\overline{AB}^2$

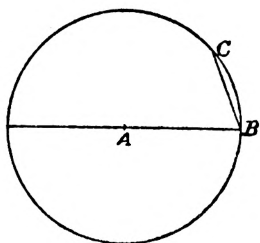
知三邊等形內切圓,其各邊上方形,三倍於半徑上方形.由是得邊 $=17320508$.



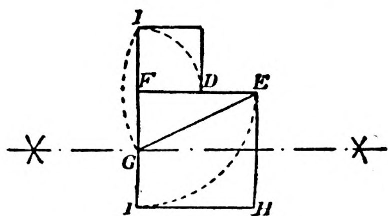
第四十八圖

宗率四. 圓內十邊等切形,求邊數. 從幾何原本 XIII, 9. 言以比例分半徑爲自分連比例,[幾何原本 VI, 30 稱爲理分中末線],其大分卽十邊等形之一邊.

如第四十九圖,及第五十圖 $r=AB=EF$, 用自分連比例法,分爲大小分,其大分 DF 與十邊形之 BC 等.



第四十九圖



第五十圖

因 $\overline{AB}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\overline{EG}^2$,

$\therefore \quad EG=11180340;$

又 $$\overline{AB}^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\overline{EG}^2,$$

$$AB(AB-DF)=\overline{DF}^2$$

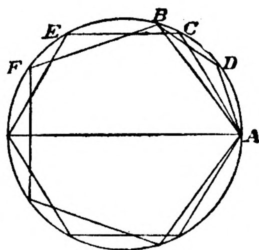
則 $$\overline{EG}^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2-AB\cdot DF=\overline{DF}^2,$$

$$\overline{EG}^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+AB\cdot DF+\overline{DF}^2=\left(\frac{AB}{2}+DF\right)^2,$$

$$\therefore\quad DF=EG-\frac{AB}{2}=6180340.$$

由是得邊=6180340.

宗率五. 圜内五邊等切形,求邊數. 從幾何原本XIII,10.言圜内五邊等切形,其一邊上方形,與六邊等形,十邊等形之各一邊上方形幷,等.



第五十一圖

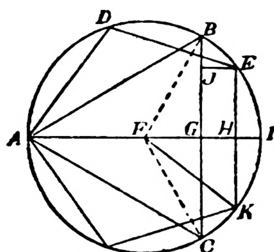
卽 $$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$$

$$\therefore\quad AB=11755704.$$

由是得邊=11755704.

宗率六. 圜内十五邊等切形,求邊數. 從幾何原本IV, 16.知從圜内一點,作一三邊等形,又作一五邊等

形,同以此點爲其一角,從此角求兩形相近之第一差弧,即十五邊形之一邊.



第五十二圖

如第五十二圖 ABC 三邊等形, $ADEK$…… 五邊等形之相近第一差弧爲 BE, 即十五邊等形之一邊.

因 $$BC=17320508,$$

$$EK=11755704,$$

則 $$BJ=\frac{BC-EK}{2}=2782402,$$

又 $$FG=\sqrt{\overline{BF}^2-\overline{BG}^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$

$$=5000000,$$

$$FH=\sqrt{\overline{FK}^2-\overline{HK}^2}=\sqrt{r^2-\left(\frac{EK}{2}\right)^2}$$

$$=8090170,$$

則 $$EJ=GH=FH-FG=3090170,$$

$$\therefore \quad BE=\sqrt{\overline{BJ}^2+\overline{EJ}^2}=4158234.$$

由是得邊 $=4158234$.

故「六題總表」:　　　　半之得半弧之半弦:

邊	弧度	弦數	弧度	半弦數	sine
3	120	17320508	60	8660254,	$\sin 60° = 0.8660254$,
4	90	14142196	45	7071098,	$\sin 45° = 0.7071098$,
5	72	11755704	36	5877852,	$\sin 36° = 0.5877852$,
6	60	10000000	30	5000000,	$\sin 30° = 0.5000000$,
10	36	6180340	18	3090170,	$\sin 18° = 0.3090170$,
15	24	4158234	12	2079117.	$\sin 12° = 0.2079117$.

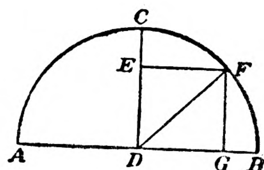
要法一. 前後兩弦,其能等於半徑.

如第五十三圖

$$\overline{DF}^2 = r^2 = \overline{FG}^2 + \overline{EF}^2$$

卽　$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

或　$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$.



第五十三圖

要法二. 有各弧之前後兩弦,求倍本弧之正弦.

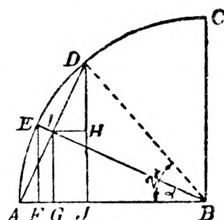
如第五十四圖 $\sin a = EF$,

$\cos a = BF = BI$, $\dfrac{\sin 2a}{2} = HJ$.

$\triangle BEF = BAI$.

故　$BF = BI = \cos a$

又　$\triangle_s$ BEF, BIG 兩形之比例等.



第五十四圖

故 $$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{HJ}$$

又 $$\triangle AGI=\triangle IHD,$$

故 $$HJ=\frac{1}{2}DJ=\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

即 $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

要法三. 各弧之全弦上方,與其正半弦上,偕其矢上,兩方幷等.

如第五十五圖 $\overline{DH}^2+\overline{AH}^2=\overline{AD}^2$ 是也.

系法. 有一弧之正弦及其餘弦,而求其半弧之正弦.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

或 $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

簡法一. 兩正弦之較,與六十度左右距等弧之正弦等.

第五十五圖

第五十六圖

如第五十六圖 $\triangle DFK$ 成三邊等角形. FD, KD 底平分於 I, 於 J.

卽 $$DJ=JK=DI=IF$$

或 $$\sin\alpha=\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha)$$

簡法二. $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

旣有六宗率,三要法,二簡法.試以12°爲例,

逐次半弧得 $\sin 12°$, $\sin 6°$, $\sin 3°$, $\sin 1°30'$, $\sin 0°45'$;

前之餘弧得 $\sin 78°$, $\sin 84°$, $\sin 87°$, $\sin 88°30'$, $\sin 89°15'$

前之餘弧可半者半之,得 $\sin 42°$, $\sin 21°$, $\sin 10°30'$, $\sin 5°15'$; $\sin 43°30'$, $\sin 21°45'$; $\sin 44°15'$;

前之餘弧 $\sin 48°$, $\sin 69°$, $\sin 79°30'$, $\sin 84°45'$, $\sin 46°30'$, $\sin 68°15'$, $\sin 45°45'$;

可半者半之,得 $\sin 24°$, $\sin 34°30'$, $\sin 17°15'$, $\sin 39°45'$, $\sin 23°15'$;

前之餘弧 $\sin 66°$, $\sin 55°30'$, $\sin 72°45'$, $\sin 50°15'$, $\sin 66°45'$,

可半者半之,得 $\sin 33°$, $\sin 16°30'$, $\sin 8°15'$, $\sin 27°45'$,

前之餘弧 $\sin 57°$, $\sin 73°30'$, $\sin 81°45'$, $\sin 62°15'$,

可半者半之,得 $\sin 28°30'$, $\sin 14°15'$, $\sin 36°45'$;

前之餘弧 $\sin 61°30'$, $\sin 75°45'$, $\sin 53°15'$;

可半者半之,得 $\sin 30°45'$;

前之餘弧 $\sin 59°15'$.

此皆 12° 所生之率,其他幷如前法,而表之大段可以立具,惟其所得最小之正弦確值,僅至45′也.此外正切眞數表,小於45°之角,用 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 算之,正割眞數表用 $\sec\alpha=\tan\alpha+\tan(45°-\frac{1}{2}\alpha)$ 算之.

清順治間居於南京之穆尼閣(Nicolas Sinogolerski, 1611-1656),[31] 以對數表之說授諸薛鳳祚,方中通,幷兼論三角函數表.天步眞原題大西穆尼閣撰,海岱薛鳳祚增補,中有「三角八線表」及「舊表八線法原」說明三角函數表計算法,大致本諸大測.

又設 $$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}\left\{(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

及 $$\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{3}\right)=\sin\alpha+\frac{1}{6}\sin 2\alpha\text{(略數)},$$

後式設 α 為極小之角.故已知 $\sin 45'$ 及 $\sin 1°15'$ 可得

(31) 據 Le Rév Père Vanhée 及 David Eugene Smith 之說.其詳傳見: Le P. Louis Pfister, S. J., Notices Biographiques et Bibliographiques sur Les Jésuites de l'ancienne mission de Chine Chang-Hai, 1932, pp. 262-265.

$\sin 1^\circ$ 之值.

23. 清初中算家之三角函數表計算法

清初中算家論三角函數表計算法者,有李子金,孔興泰,楊作枚,梅文鼎.

李子金算法通義(1677)卷五,有「徑背求弦新法說」,天弧象限表(1683)有「徑背求弦法,可代象限表」.其徑背求弦新法,創立「立,平,定」三差及「立,曲,平,定」四差,以求各弧之正弦,其法如次:

(1)「創立三差通用法」.

令 $$\frac{d}{2}=100,000,000,\quad a=157,080,000.$$

則 $$定差=\frac{157080000}{90}=1745333,$$

$$平差=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}$$

$$=3523.455,$$

$$立差=\frac{1}{90}\times3523.455=39.1495.$$

因其畸零太多,令立差=39,反求之,得;

$$平差=2\times3523.455-90\times39=3536.91\text{ 或 }3537,$$

$$定差=90\{3537+(3510)\}+\frac{100000000}{90}=1745340.$$

以上述三差所推之數,有少至$\frac{45}{100}$者,李子金另設三差爲38, 3600, 1770000,所推之數,差在$\frac{2}{100}$,較爲密合.

(2)「創立四差通用法」.

如前令 $\frac{d}{2}=100,000,000,\quad a=157080000.$

則
$$定差=\frac{157080000}{90}=1745333,$$

$$平差=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right]\right\}=2347,$$

$$曲差=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{90}[7046.91-2347]\right\}=17.40,$$

而
$$7046.91=\frac{1}{90}\left[\frac{1}{90}(157080000-100000000)\right],$$

$$\frac{1}{90}[7046.91-2347]=52.22,$$

$$立差=\frac{1}{90}(52.22-17.40)=0.3869.$$

因其畸零太多,令立差=0.38, 反求之,得;

$$曲差=52.22-90\times 0.38=18.02,\ 或\ 18,$$

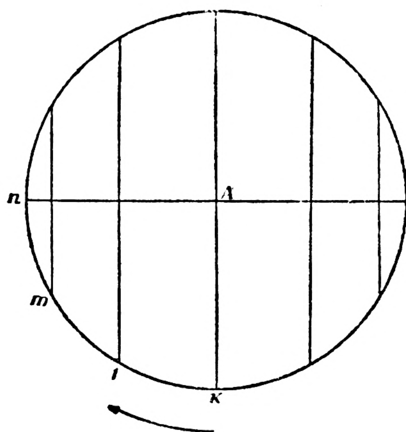
$$平差=7046.91-90\times\{18+34.20\}$$

$$=2348.91 \text{ 或 } 2350,$$

$$定差=90\{2350+4699.91\}+\frac{100000000}{90}$$

$$=1745600.$$

李子金又設「三差法合象限表之圖」而說明之:



第五十七圖

如第五十七圖 $k\ l\ m\ n$ 象限弧平分爲三節,自 k 至 l, 似在平行,故謂之平差.自 l 至 m, 正當彎曲之處,故謂之曲差.自 m 至 n, 其象有似直立,故謂之立差.其四差法求正弦公式爲:

$$\sin m=(1745600m-2350m^2-18m^3-0.38m^4)\div 100000000\left(=\frac{d}{2}\right).$$

其「徑背求弦法,可代象限表」內,求正餘弦公式爲:

$$\cos A=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\left[\{(a^2+a'^2)-d^2\}\times\frac{a^2+a^3+\frac{a^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right]\div\frac{d}{2}}$$

$$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{a'^2-\left[\{(a^2+a'^2)-d^2\}\times\frac{a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}}{\left(a^2+a^3+\frac{a^4}{2}\right)+\left(a'^2+a'^3+\frac{a'^4}{2}\right)}\right]\div\frac{d}{2}}$$

而 $10\times\frac{3\cdot 141}{180^\circ}=0.1745,\ 0.1745\,A=a,\ 0.1745(180^\circ-A)=a',\ d=20.$

* * *

孔興泰著大測精義說明半弧正弦求法.

楊作枚著解割圜之根一卷,以幾何前六卷之法,證明大測中六宗,三要,二簡法諸條之公式,又另創「圜內作九等邊內切形,求得40度之通弦」之法,(1772)

梅文鼎(1633-1721)著平三角舉要五卷,環中黍尺五卷.其平三角舉要卷五,及環中黍尺卷五,以幾何法證:

$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B,$

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B,$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B,$

$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$

24. 清初三角函數表計算法之輸入

明季輸入六宗三要,二簡法之見於大測者,可算得正弦一百二十個,其最小者45′,遞加至90°,其45′以下以比例得之.至數理精蘊(1723刻)下編卷十六又新增四法,卽求圜內18, 9, 14, 7邊之法,與六宗相參伍,可得正弦三百六十個,其最小者15′,又有「新增有小弧之正弦,求其三分之一弧之正弦」,卽求 $\sin\frac{a}{3}$,可得最小者5′,其5′以下,以比例得之.

(1)求內容十八邊形之一邊幾何. 先設「新增按分作相連比例四率」甲,即「設如以十萬爲一率,作相連比例四率,使一率與四率相加,與二率三倍等,問二率三率四率各幾何?」

蓋由 $\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4$; $\phi_1+\phi_4=3\phi_3$,

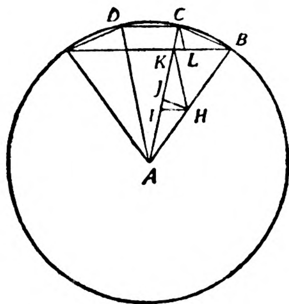
可得方程式:

$$\phi_2^3-3\phi_1^2\phi_2+\phi_1^3=0, \quad 而 \ \phi_1=100000,$$

次解此方程式,得: $\phi_2=34729$,

代入得 $\phi_3=12061$, $\phi_4=4187$.

數理精蘊中所示之方程解法,乃1660年之Vieta舊法,稱爲益實歸除法.即令 $\phi_2=\frac{\phi_1^3}{3\phi_1^2}$ 取其略小之首位而得.其後Newton, Horner 二氏改良之法,時尚未發明也.既得 ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4,便可應用以求內容十八邊形之一邊.如圖 $BC=CD=DE$ 爲十八邊形之一邊, A 爲中心,又作 CL 平行於 AD, 聯各線.



第五十八圖

則 △, ABC, BKC, CKL 爲相似.

又 $$BE=3BC-KL.$$

即得 $$AB:BC=BC:CK=CK:KL,$$

又 $$AB+KL=3BC.$$

故已知AB及上二式之關係,即可得十八邊形之一邊BC也.

(2)求內容九邊形之一邊幾何.如上圖聯邊即得.

(3)求內容十四邊形之一邊幾何.先設「新增按分作相連比例四率法」乙,即「設如以十萬爲一率,作相連比例四率,使一率與四率相加,與二率兩倍再加一率之數等,問二率三率四率各幾何?」.

如上例由 $$\phi_1:\phi_2=\phi_2:\phi_3=\phi_3:\phi_4,$$

及 $$\phi_1+\phi_4=2\phi_2+\phi_3$$

可得方程式 $$\phi_2^3-\phi_1\cdot\phi_2^2-2\phi_1^2\cdot\phi_2+\phi_1^3=0$$

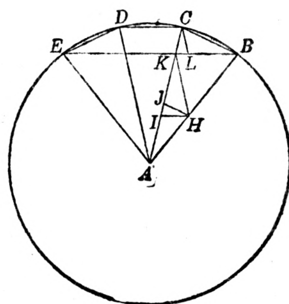
而 $$a=100000,$$

次解此方程式,得: $$\phi_2=44504,$$

代入得 $$\phi_3=19806,\quad \phi_4=8814.$$

此乃用1660年之Vieta舊法,即令$\phi_2=\dfrac{\phi_1^3}{2\phi_1^2}$取其略小之首位而得.既得$\phi_2,\phi_3,\phi_4$,便可應用以求內容十四邊形之一邊.

如第五十九圖 $BC=CD=DE$ 爲十四邊形之一邊，A 爲中心，又作 CL 平行於 AD，聯各線．則 $\triangle_s ABC, BKC, CKL$ 爲相似．又自 K 作 KH 平行於 AD，交 AB 於 H；自 H 作 HI, HJ，平行於 BE, BC.



第五十九圖

則 $$\triangle AHJ=\triangle KHI,$$

又 $$\triangle HIJ=\triangle CKL.$$

則 $$AB=AK+KC=2BC+CK-KL,$$

卽 $$AB+KL=2BC+CK.$$

故已知 AB 及上二式之關係，卽可得十四邊形之一邊 BC 也.

(4)求內容七邊形之一邊幾何．如上圖聯 BD 邊卽得.

* * *

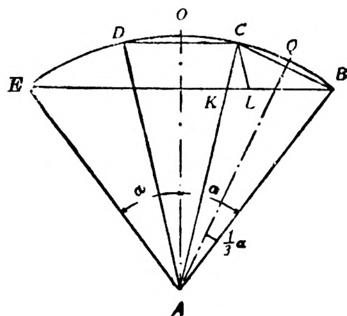
「新增有本弧之正弦，求其三分之一弧之正弦」.

如第六十圖 $\angle OAB=\angle\alpha$,

$$\angle EAB=\angle 2\alpha$$

又 $$\angle QAB=\angle\frac{1}{3}\alpha,$$

$$\angle CAB=\angle\frac{2}{3}\alpha.$$



第六十圖

如前圖 $BC=CD=DE$ 爲 $\frac{2}{3}\alpha$ 之弧,A 爲中心,又作 CL 平行於 AD,聯各線.則△s ABC, BKC, CKL 爲相似.

又 $$BE=3\,BC-KL,$$

卽得 $$AB:BC=BC:CK=CK:KL.$$

令 $$r=1,$$

則 $$1:2\sin\frac{1}{3}\alpha=(2\sin\frac{1}{3}\alpha)^2:\left\{3(2\sin\frac{1}{3}\alpha)-2\sin\alpha\right\}$$

$$\therefore\quad(2\sin\frac{1}{3}\alpha)^3-3(2\sin\frac{1}{3}\alpha)+2\sin\alpha=0.$$

$$\sin\alpha=3\sin\frac{1}{3}\alpha-4\sin^3\frac{1}{3}\alpha.$$

或 $x^3-3x+2\sin\alpha=0$, 而 $x=2\sin\frac{1}{3}\alpha.$

其 x 之同數,可由益實歸除法求得.

其後余熙(字晉齋,桐城人)著八線測表圖說一卷,見四庫全書總目卷一〇七,子部,天文算法類存目;何

夢瑶(字報之,南海人,雍正庚戌,1730進士)著算迪十二卷,其卷三有「割圜作八線表法」,屈曾發(字省園,虞山人)著數學精詳十三卷(1772年自序),其卷十一有「六宗三要二簡法說」;厲之鍔(字寶青;錢塘人)著琹緯瑣言(1800);幷本數理精蘊之說.

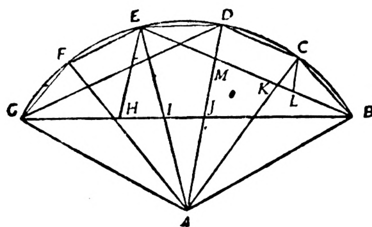
25. 汪萊安清翹之五分取一法

「割圜非八線不可,而八線所由來,舊有六宗三要二簡法,然所得僅五分弧耳.每得五分,而得一通弦.其間二百九十九秒之八線,皆由中比例而得.且其以小弧求大弧,僅有求倍弧一法.以大弧求小弧,僅有求半弧,求三分之一之弧二法.其三分取一一法,已須用益實歸除.[詳數理精蘊下編卷十六,羅茗香(士琳1783?-1853)實曰:益實歸除卽是元人正負開方之法],甚屬不易.更無五分取一,七分取一之法.歙縣汪孝嬰(萊,1768-1813)創爲五分取一一法,且曰,由是而通變之,可得七分取一等法.其意蓋欲以補六宗三要所未備也.」(32)其所著衡齋算學第三册(1798),「平圓形」有:

---

(32) 見陳杰算法大成上編卷三第56頁,浙江書局重刊本.

「有圓內若干度之通弦,求其度五分之一通弦」,



第六十一圖

如第六十一圖如前各家之例,先聯各線,次作 $CL \parallel DA$, $EH \parallel DA$,則得前三$\triangle_s$之大$\triangle ABC$, 小$\triangle BCK$, 又小$\triangle CKL$. 又得次設$\triangle BMJ$, 及後設二$\triangle_s$之大 BEH, 小$\triangle EHL$:此六$\triangle_s$并爲相似.

令 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, 爲比例式之1, 2, 3, 4率,

則
$$AB=r=1=\phi_1,$$
$$BC=2\sin\alpha=\phi_2,$$
$$CK=\phi_3,\ KL=\frac{{\phi_2}^3}{{\phi_1}^2}=\phi_4;$$
$$BE=2\sin 3\alpha=3\phi_2-\phi_4,$$
$$BG=2\sin 5\alpha.$$

又
$$BJ=BM=GI=2BC-KL=2\phi_2-\phi_4,$$
$$IJ=DE-HI=BC-HI.$$

$$\therefore \qquad BG=5\,BC-HI-2\,KL,$$

由此可求得方程式:

$$\sin 5\,\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$$

惟汪萊不遥求上之方程式,而設下之解法:

即因 $$\frac{BC}{KL}=\frac{BE}{HI},$$

已知 $$BC=\phi_2,\ KL=\phi_4,\ EB=3\,\phi_2-\phi_4,$$

則 $$HI=3\phi_4-\phi_6,\ \text{而}\ \phi_6=\frac{{\phi_4}^2}{\phi_2}.$$

故 $$BG=2\sin 5\,\alpha=5\,\phi_2-5\,\phi_4+\phi_6$$

(此與明安圖 I°, d° 之說相同).

或 $$\frac{2\sin 5\,\alpha}{5}=\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}.$$

而稱: $\frac{2\sin 5\,\alpha}{5}$ 爲第一數,ϕ_2 爲第二數,ϕ_4 爲第三數,$\frac{\phi_6}{5}$ 爲第四數,$\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}$ 爲第五數.其法假設一 b 數,使

$$\frac{2\sin 5\,\alpha}{5}+b=\phi_2,$$

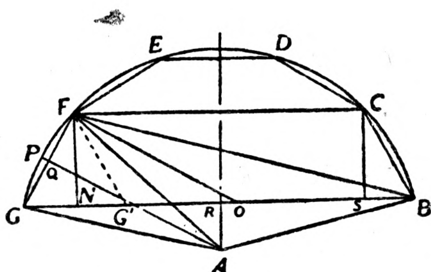
其中 $$\phi_4=\frac{{\phi_2}^3}{\phi_1},\quad \frac{\phi_6}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{{\phi_4}^2}{\phi_2},$$

則前之方程式,幷化爲 ϕ_2 之同數.如代入之 b 數,可使

$$\phi_2-\phi_4+\frac{\phi_6}{5}=\frac{2\sin 5\alpha}{5}$$

則 $\phi_2=2\sin\alpha$ 爲所求密數.反之,若第五數少於第一數,則如前法加位求之;若第五數多於第一數,則退次位求之,三位以下倣此.是處脫胎於數理精蘊中「益實歸除」之代入法也.其時四次式以上解法,在國中尙無善法,故汪萊設爲此例.

安淸翹(1759–1830)矩線原本(1818)以幾何法證 $\sin 3\alpha$, $\sin 5\alpha$. 其 $\sin 5\alpha$ 之證法如下:



第六十二圖

如第六十二圖 $\angle GAB=10\alpha$, $\sin 5\alpha=GR$;

$\angle GAP=\alpha$, $\sin\alpha=GQ$.

自 F 作 GB 之垂線 FN,

又作 $\triangle FNG'=\triangle FNG$, $G'O=FG'$.

因 $\angle FGB=4\alpha$,

$$\therefore \quad \angle GOF = 2\alpha,$$

又 $$\angle OFB = \alpha.$$

而 $\overline{GF}^2 - \overline{GN}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{NO}^2$, 或 $\overline{NO}^2 - \overline{GN}^2 = \overline{FO}^2 - \overline{GF}^2$

即 $(\sin 5\alpha - \sin\alpha + 4\sin^3\alpha)^2 - (\sin 5\alpha - 3\sin\alpha + 4\sin^3\alpha)^2$

$$= (4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha)^2 - (2\sin\alpha)^2,$$

或 $$\sin 5\alpha = 5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha.$$ 證訖.

其後陳維祺纂輯中西算學大成一百卷,(1889 自識), 楊兆鋆著須曼精廬算學(1898江衡序),雖亦論述倍數正弦算法,則多因襲舊說,且在清季造三角比例表法輸入之後也.

在前則董祐誠之圓率解析法,實受汪萊之影響. 董於割圜連比例圖解,自稱:「舊法求弦矢,……用益實歸除,汪氏萊更補求五分之一通弦術,商除進退,皆難遽定」,乃立「弦矢互求四術」,是也.

26. 清季造三角比例表法之輸入

同治三年(1877),華蘅芳,傅蘭雅(Dr. John Fryer)共譯英海麻士(原名不詳,Hymers?)三角數理十二卷,其卷三論造三角比例表之法,有下之各款:

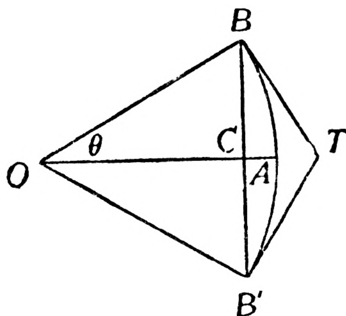
(59)款. 設$\theta<\frac{1}{2}\pi$

則 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$

如圖 $\frac{BC}{OB}<\frac{BA}{OB}<\frac{BT}{OB}$

但 $\frac{BC}{OB}=\sin\theta$, $\frac{BA}{OB}=\theta$,

$\frac{BT}{OB}=\tan\theta$



第六十三圖

故 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$. 證訖.

(60)款. 設θ漸變小至0, 則$\frac{\sin\theta}{\theta}$與$\frac{\tan\theta}{\theta}$必漸近於1, 而其值爲1.

因θ在$\sin\theta$, $\tan\theta$之間,則$\frac{\sin\theta}{\theta}$比$\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$或$\frac{1}{\cos\theta}$更近於1.

因 $\frac{\sin\theta}{\theta}<1<\frac{1}{\cos\theta}$

故也.但θ變至甚小,則$\frac{1}{\cos\theta}$之限爲1,所以θ變至甚小$\frac{\sin\theta}{\theta}$之限亦必爲1;

又因 $\frac{\tan\theta}{\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}$,

所以θ變至甚小, $\frac{\tan\theta}{\theta}$之限亦必爲1也.

(61)款. 依前款之例,知$\theta<\frac{1}{2}\pi$,

則 $$\sin\theta>\theta-\frac{\theta^3}{4}.$$

蓋 $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}>2\times\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

而 $$\frac{\theta}{2}<\tan\frac{\theta}{2},\quad \frac{\theta}{2}>\sin\frac{\theta}{2},$$

故 $$\sin\theta>\theta\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right),$$

(62)款. 求 $\sin 10''$, $\cos 10''$.

命 $\theta=\frac{\pi}{64800}$ 爲 $10''$ 角之眞弧.

因 $\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4}$, $\sin 10''<\theta$, $\theta=0.000048481368110$,

因 $$\sin 10''>\theta-\frac{\theta^3}{4}>\theta-\frac{(0.00005)^3}{4},$$

卽 $\sin 10''>0.000048481368078$,

而 $\sin 10''<\theta<0.000048481368110$.

故可令, $$\sin 10''=0.000048481368,$$

代入得 $$\cos 10''=0.999999998248.$$

有此則每 $10''$ 距離之正餘弦,可以 $\sin(A+\theta)$, $\cos(A+\theta)$

兩公式求之.

(64)款以後又設下列公式爲算表之用:

$$\sin(60^\circ+A)=\sin A+\sin(60^\circ-A)$$ (大測簡法一)

$$\tan(45^\circ+A)=2\tan 2A+\tan(45^\circ-A)$$ (Cagnoli).

$$\sec A=\frac{1}{2}\left[\tan\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)+\cot\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$\sin A+\sin(72^\circ+A)-\sin(72^\circ-A)=\sin(36^\circ+A)-\sin(36^\circ-A).$$ (Euler).

$$\cos A+\cos(72^\circ+A)+\cos(72^\circ-A)=\cos(36^\circ+A)+\cos(36^\circ-A).$$ (Euler).

至徐有壬著造各表簡法,所述造正弦全表,造正矢全表,造正切全表,造八線對數全表四術,則係級數演算法(Calculation by Series),其術與證,已見前章,茲不復贅.

李善蘭年譜

序， 民國六年(1917)曾着意爲中算名家梅文鼎,李善蘭,華蘅芳三先生,各編一年譜. 關於李善蘭事蹟,則徵訪於其高徒席翰伯(淦)先生. 而翰伯先生適以是年歸道山. 幸由其哲嗣翔卿(德鳳)兄搜集殘稿見示,得略識一二. 年來稍稍留意此事,迄未有多得. 乃於去歲勉強成稿,用完素願,又以原稿寄杭州裴沖曼先生,得補列數條. 玆並彙錄,就正當世. 其並世國中算學家著述大略,亦如梅文鼎年譜之例,附記另行,並冠單圈爲誌.

年譜

清嘉慶十五年庚午(1810),一歲.

張鳴珂,疑年賡錄稱:「李壬叔七十三善蘭,生嘉慶十五年(1810)庚午,卒光緒八年(1882)壬午」.[1] 善蘭家在浙江海寧縣硤石鎮北之路仲市.(裴沖曼徵訪)

○是年金山顧觀光(1799-1862)已十二歲,烏程

(1) 見張鳴珂,疑年賡錄卷二,或武進張惟驤疑年錄彙編卷一二,第11頁,乙丑(1925)嘉平月,小雙寂庵刻本.

徐有壬(1800-1860)已十歲,杭州戴煦(1805-1860)已六歲,南匯張文虎(1808-1885)已三歲,均在他年爲善蘭談算之友.

嘉慶十六年辛未(1811),二歲.

○是年李潢(?…1811)卒.李潢有輯古算經考注上,下卷:九章算術細草圖說九卷,附海島算經細草圖說.

○是年垣曲安清翹(1759-1830)自序推步惟是四卷.(2)

○是年十月海州許桂林(1778-1821)自序算牖四卷.(3)

嘉慶十七年壬申(1812),三歲.

○是年汪曰楨(1812-1881)生.

○是年十月左宗棠(1812-1885)生.(4)

嘉慶十八年癸酉(1813),四歲.

○是汪萊(1768-1813)卒.汪萊有衡齋算學七卷,衡齋遺書共七種,九卷.

---

(2) 見推步惟是,數學五書本.

(3) 見算牖,道光庚寅(1830)冬刻本.

(4) 見左文襄公年譜十卷,光緒丁酉(1897)湘陰左氏校刻本.

嘉慶十九年甲戌(1814),五歲.

○是年仲冬紀大奎(1746–1825),撰筆算便覽五卷.

嘉慶二十年乙亥(1815),六歲.

○是年六月山陽駱騰鳳(1770–1841)自序開方釋例四卷.[5]

嘉慶二十一年丙子(1816),七歲.

○是年張作楠撰翠微山房數學共十五種,三十八卷.

嘉慶二十二年丁丑(1817),八歲

○是年李銳(1768–1817)卒.李銳有李氏遺書共十一種十八卷;測圓海鏡細草十二卷.

○是年仲秋垣曲安清翹自序一線表用六卷.[6]

嘉慶二十三年戊寅(1818),九歲.

○是年徐壽(1818–1884)生.[7]

○是年孟冬垣曲安清翹自序矩線原本五卷.[8]

(5) 見開方釋例四卷,何錦道光癸卯(1843)校刻本.

(6) 見一線表用,數學五書本.

(7) "徐雪村六十七,壽生嘉慶二十三年(1818)戊寅,卒光緒十年(1884)甲申,"見武進張惟驤疑年錄彙編(1925)卷一四,第19頁.

(8) 矩線原本,數學五書本.

○是年甘泉范凌霆序甘泉羅士琳(?-1853)比例匯通四卷.(9)

嘉慶二十四年己卯(1819),十歲.

「善蘭年十齡,讀書家塾,架上有古九章,竊取閱之,以爲可不學而能,從此遂好算」.(10)

○是年正月嘉興錢徵吉序陳杰輯古算經細草一卷,圖解三卷,音義一卷.

○是年夏四月陽湖董祐誠(1791-1823)自序割圜連比例圖解上中下卷.

○是年鄒伯奇(1819-1869)生.

嘉慶二十五年庚辰(1820),十一歲.

○是年開化戴敦元(1768-1834)序刻李潢遺著九章算術細草圖說十卷,由語鴻堂刻行.

○是年全椒江臨泰序金華張作楠食田通法十四卷.(11)

○是年焦循(1763-1820)卒.焦循有里堂學算記共五種,十六卷;開方通釋一卷,補衡齋算學第三

---

(9)比例匯通,光緒丙申(1896)石印本.

(10) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)南京刻本.

(11) 見翠微山房數學,光緒丁酉(1897)石印本.

册.(12)

道光元年辛巳(1821),十二歲.

○是年六月陽湖董祐誠自序橢圜求周術一卷.

○是年八月陽湖董祐誠自序斜弧三邊求角補術一卷.

○是年八月陽湖董祐誠自序堆垛求積術一卷.

○是年十二月陽湖董祐誠自序三統術衍補一卷.

○是年許桂林(1778-1821)卒.(13)許桂林有立天元一導竅三卷;(14)算牖四卷.

道光二年壬午(1822),十三歲.

○是年江臨泰自序弧三角舉隅一卷.

道光三年癸未(1823),十四歲

○是年大興徐松序刻陳杰輯古算經細草一卷,圖解三卷,音義一卷.(15)

○是年夏鸞翔(1823-1850),李錫蕃(1823-1850)生.

---

(12) 木犀軒叢書,易餘籥錄本.

(13) 此據閔爾昌,五續疑年錄;生乾隆戊戌(1778),卒道光辛巳(1821)

(14) 羅士琳續疇人傳作四卷,許喬林算牖跋,作三卷,未知孰是.

(15) 見輯古算經,道光庚子(1840)重刻本.

○是年董祐誠(1791-1823)卒.[16]董祐誠有董方立遺書十六卷.

道光四年甲申(1824),十五歲.

「善蘭年十五時,讀舊譯(幾何原本)六卷,通其義」.[17].

○是年強汝詢(1824-1894)生.

道光六年丙戌(1826),十七歲.

○是年甘泉羅士琳自序句股容三事拾遺三卷.

道光七年丁亥(1827),十八歲.

○是年羅士琳撰演元九式一卷.

道光八年戊子(1828),十九歲.

○是年開化戴敦元(1768-1834)序甘泉羅士琳句股容三事拾遺三卷,昌平王萱齡,烏程徐有壬亦序此書.

○是年阮元序羅士琳演元九式稱:「嘉慶間元得元大德朱世傑四元玉鑑三卷,……以副鈔本屬何君夢華,付之李君尙之(銳),略演其法,李君遽卒.吾鄉羅君茗香(士琳)乃取此書各段,演全細草,又於四草外演爲九式一卷.」

(16)　見李兆洛"董方立傳,"冠董方立遺書前.

(17)　見李善蘭幾何原本後九卷序(1587).

道光十年庚寅(1830),二十一歲.

〇是年夏六月張琦序董祐誠遺著董方立遺書十六卷.

〇是年華蘅芳(1830-1902)生.

〇是年安清翹(1759-1830)卒.[18]安清翹有數學五書共十九卷.

道光十二年壬辰(1832),二十三歲.

〇是年嘉應吳蘭修校刻李潢緝古算經考注上下卷,云距(李潢)先生之沒垂二十年.此書題「王孝通撰幷注,李潢述劉衡校.[19]

〇是年順德黎應南序羅士琳句股截積和較算術二卷.[20]

〇是年順德黎應南序項名達之句股六術.

〇是年丁取忠始習算.[21]

道光十四年甲午(1834),二十五歲.

(18) 安清翹家傳,及李宗昉所撰墓碑銘,稱清翹以道光庚寅(1830)卒,年七十二.未刊算稿有數學指南,周易比例,幾何原本補正,數稀.

(19) 見緝古算經考注二卷本.

(20) 見句股截積和較算術二卷,道光二十八年(1848)靈石楊氏刻本.

(21) 見丁取忠粟布演草識,白芙堂叢書本.

○是年冬羅士琳四元玉鑑細草二十四卷甫經脫稿.[22]羅士琳曾作後記.[23]

○是年戴敦元(1768–1834)卒.

○是年張敦仁(1754–1834)卒.張敦仁有緝古算經細草三卷;求一算術上,中,下卷;開方補記八卷,附通論一卷.

道光十五年乙未(1835),二十六歲.

○是年羅士琳四元玉鑑細草由李棠寫樣.[24]

道光十六年丙申(1836),二十七歲.

○是年仲春瓊州張岳崧題刻甘泉易之瀚四元釋例一卷.

道光十七年丁酉(1837),二十八歲.

○是年夏羅士琳自序臺錐積演一卷.

○是年十一月戴熙序刻謝家禾遺著衍元要義弧田問率,直積回求凡三卷,稱謝穀堂算學三種.

(22) 見易之瀚四元玉鑑細草後記,屬觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

(23) 見羅士琳四元玉鑑細草後記,附觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

(24) 見李棠四元玉鑑細草後跋,附觀我生室彙稿本四元玉鑑細草後.

道光十八年戊戌(1838),二十九歲.

〇是年秋張岳崧序羅士琳四元玉鑑細草二十四卷.

道光十九年己亥(1839),三十歲.

〇是年秋天長岑建功校刻明安圖遺著割圜密率捷法四卷.

〇是年秋甘泉羅士琳撰割圜密率捷法後跋.

〇是年七月吳縣馮桂芬(1810-1874)自序弧矢算術細草圖解一卷.

〇是年七月羅士琳撰算學啓蒙識誤及後記.

〇是年九月揚州阮元序刻元朱世傑算學啓蒙三卷.

道光二十年庚子(1840),三十一歲.

李善蘭天算或問卷一,稱:「善蘭自束髮學算,三十後所造漸深」.(25)

〇是年夏四月阮元序羅士琳續疇人傳六卷.

〇是年阮元序羅士琳三角和較算例一卷.

〇是年阮元序明安圖遺著割圜密率捷法四卷.

〇是年趙元益(1840-1902)生.

(25) 見天算或問,則古昔齋算學本.

道光二十一年辛丑(1841),三十二歲.

○是年駱騰鳳(1770-1841)[26]卒.駱騰鳳有藝游錄二卷;開方釋例四卷.

道光二十三年癸卯(1843),三十四歲.

○是年駱騰鳳壻何錦刻駱騰鳳遺著藝游錄二卷,開方釋例四卷.

○是年秋羅士琳自序弧矢算術補.

○是年冬項名達自序三角和較術一卷.

道光二十四年甲辰(1844),三十五歲.

○是年秋九月全椒金望欣序烏程陳杰算法大成稱「上編先已梓行」.

道光二十五年乙巳(1845),三十六歲.

席淦(1845-1917)殘稿稱善蘭以「道光乙巳年(1845)館嘉興陸費家,交當時江浙名士如張嘯山(文虎)孫次山(瀜),顧尙之(觀光)等」.李善蘭於是年冬以所著四元解二卷示顧觀光.[27]李善蘭序四元解稱「汪君謝城(曰楨)以手鈔元朱世傑四元玉鑑三卷見示,

(26) 見丁晏"安徽舒城縣訓導駱先生傳,"附開方釋例卷四後.

(27) 見顧觀光算賸續編內「四元解序」.

……深思七晝夜,盡通其法……」.[28]

○是年項名達自序開諸乘方捷術一卷,由長洲陳奐署簽.

○是年秋戴煦(1805–1860)自序對數簡法二卷.

○是年冬南海江藩序南海何夢瑤算迪八卷,由粤雅堂刻行.

○是年席淦(1845–1917)生.

道光二十六年丙午(1846),三十七歲.

是年顧觀光序李善蘭所著四元解,對數探原.其於四元解序稱「李君又有弧矢啓祕」.[29]

○是年秋八月戴煦自序續對數簡法一卷.

道光二十七年丁未(1847),三十八歲.

○是年英國偉烈亞力(Wylie Alexander)來華,寓滬城北關外,日與華人相討論.[30]

○是年海山仙館叢書刻幾何原本,同文算指,圜容較義,測量法義,測量異同,句股義,諸書.

道光二十八年戊申(1848),三十九歲

(28) 見四元解,則古昔齋算學本.

(29) 見顧觀光算賸續編內"四元解序".

(30) 見偉烈亞力數學啓蒙,金咸福跋.

是年仲秋李善蘭自序麟德術解三卷.[31]

道光二十九年己酉(1849),四十歲.

是年李善蘭居嘉興. 按張文虎華嚴墨海集稱「道光二十九年(1849)夏,與錢君葆堂(熙哲)[32]寓禾郡幻居庵.庵僧出示明賢分寫華嚴經八十一卷,……」[33],又張文虎舒藝室詩存三,稱:「偕錢叔保(熙哲)寓禾城幻居庵,坐雨不得出.李(善蘭),孫(瀜),楊(韵),于(源),何(呂治),朱大令(緒曾),輒相過話雨,觀所藏明季諸賢分寫華嚴經墨跡,雜記以詩,用少陵重過何氏山林韻.……」又註稱:〔李君(善蘭)精究中西算術,近從(陳奐)碩甫受經〕」.[34]

○是年江寧管嗣復序桐城葉棠天元一術圖說一卷.

○是年十月項名達自序象數一原.[35]

○是年阮元卒.

(31) 見則古昔齋算學六,麟德術解卷一,第1頁.

(32) 按錢熙哲字叔保亦字葆堂,錢樹芳第四子;熙祚弟.

(33) 見張文虎舒藝室雜著乙編上,第32頁.

(34) 見張文虎舒藝室詩存三,第21頁.

(35) 見象數一原七卷,光緒戊子(1888)上海刻本.

道光三十年庚戌(1850),四十一歲.

是年指海刻成,收有李善蘭對數探源一種,張文虎校.

○按張文虎金山錢氏家刻書目序稱:「道光中錫之(錢熙祚)通守輯守山閣叢書及指海」(36)又告靈文稱:「道光二十四年(1844)正月……金山錢君雪枝(熙祚)卒於京師」.(37) 又候選訓導錢君(熙經 1796–1849)(38)殯志稱:「錫之邀予同至京師,明年錫之歿,予南歸,(熙經)君握予手曰,錫之已矣,指海稿未竟,盍贊成之乎?予曰然.又六年指海竣事……」.(39)觀此則指海蓋成於此年也.

○是年項名達(1789–1850)卒.項名達有下學盦算術共三種三卷,象數一原六卷.

○道光末年英人麥都思(Dr. Medhurst Walter Henry, 1796–1857)設墨海書館(是爲機器印書之始,以牛力曳之)於滬北,延王韜主筆政.所交多海內知

(36) 見張文虎舒藝室賸稿第24頁.

(37) 見張文虎舒藝室雜著乙編卷下,第73頁.

(38)「錢熙經生於嘉慶元年四月,卒於道光二十九年十有一月,…」見張文虎舒藝室雜著乙編卷下,第62–63頁.

(39) 見張文虎舒藝室雜著乙編卷下第62頁.

名士.與李善蘭,蔣敦復以詩酒徜徉於海上,時人目爲三異民,…….[40]

咸豐元年辛亥(1851),四十二歲.

是年善蘭獲交錢唐戴煦,以所著對數探源,弧矢啓祕見貽.[41]張文虎稱:「咸豐之初(錢熙輔)鼎卿學博續輯藝海珠塵壬癸二集,及刊西人重學」.[42] 藝海珠塵壬癸集,收有李善蘭,方圓闡幽,弧矢啓祕二種.按李善蘭序則古昔齋算學(1867)稱:「方圓(闡幽),弧矢(啓祕),對數(探源)三種,金山錢氏已刻入叢書中」是也.

○錢熙輔,清金山人,字鼎卿,官蕪湖教諭.婦翁吳省蘭刊藝海珠塵,至八集而止.熙輔續輯壬癸二集,以竟其業.[43]

○是年鄒漢勳序丁取忠數學拾遺一卷.

咸豐二年壬子(1852),四十三歲.

(40) 見淞南夢影錄卷三.(裘沖曼徵訪)
但據(Couling, The Encyclopœdia Sinica, 1917, p. 344.)則謂墨海書館設立在道光二十三年(1843).

(41) 見戴煦粵雅堂叢書本外切密率序第1-2頁.

(42) 見張文虎舒藝室賸稿第42頁"金山錢氏家刻書目序."

(43) 見中國人名辭典第1618頁.

是年五月李善蘭至滬,居大境傑閣.[44]

善蘭稱:「歲壬子(1852)余遊滬上,……朝譯幾何,暮譯重學,閱二年同卒業」.[45]按閱二年當作閱四年.

是年戴煦外切密率自序稱:「去歲獲交海昌壬叔李君(善蘭),以所著對數探源,弧矢啓祕見示.其對數探源,與予對數簡法後一術殊途同歸.而弧矢啓祕則用尖堆立算,別開生面,兼有割線諸術,特未及餘弧耳.緣出予未竟殘稿,請正.而壬叔頗賞予餘弧與切割二線互求之術,再四促成.今歲又寄札詢及,遂謝絕繁冗,扃戶鈔錄,閱月乃竟.嗟乎!友朋之助,曷可少哉!……玆非壬叔之勸成,則以予之慵散,必至廢擱以終其身……」.[46]

善蘭稱:「歲壬子(1852)來上海,與西士偉烈亞力約,續徐利二公未完之業.偉烈君無書不覽,尤精天算,且熟習華言.遂以六月朔爲始,日譯一題.中間因應試避兵諸役,屢作屢輟,凡四歷寒暑,始卒業」.[47]

---

(44) 見王韜瀛壖雜誌卷四.

(45) 見李善蘭重學二十卷附曲線說三卷,序,同治五年(1866)刻本.

(46) 見粵雅堂叢書本外切密率序第1-2頁.

(47) 見李善蘭幾何原本序,同治四年(1865)刻本.

○是年歲杪戴煦自序求表捷術共四種九卷.

咸豐三年癸丑(1853),四十四歲.

○是年偉烈亞力(Wylie Alexander)稱:「余自西士遠來中國,以傳耶穌之道爲本.餘則兼習藝能.爰述一書曰數學啓蒙,凡二卷,舉以授塾中學徒,由淺及深,則其知之也易.譬諸小兒,始而匍匐,繼而扶牆,後乃能疾走.茲書之成,姑教之匍匐耳,扶牆徐行耳.若能疾走,則有代數微分諸書在,余將續梓之」.(48) 此爲移譯代微積拾級代數學之先聲.

○是年甘泉羅士琳客揚州,死於太平之難.

○善蘭甥崔敬昌,李壬叔徵君傳稱:「咸豐朝甘泉羅茗香(士琳)徵君,及歸安徐莊愍公(有壬)並以數學著.二公者與先舅父交最摯,郵遞問難,常朝覆而夕又至.先舅父爲之條分縷析,曲暢交通,如所問以報,恆累數千言,必使洞曉而後已」.(49)

○是年張文虎曾寄書與李壬叔問:「重學曾否

(48) 見偉烈亞力數學啓蒙序(1853).

(49) 見崔敬昌李壬叔徵君傳. 此傳載范溪李氏家乘,未刊. 杭州府志及海甯縣新志均採是傳.

授梓『微分法凡幾卷?』[50]

咸豐四年甲寅(1854),四十五歲.

〇是年汪萊門人夏燮序刻汪萊遺著衡齋算學遺書合刻.[51]

〇是年顧觀光作「用屢乘屢除求對數法」,「對數還原」,「對數衍」,并見算賸續編.

咸豐五年乙卯(1855),四十六歲.

是年善蘭遊滬瀆. 按張文虎「嘉興雜詩」,註稱:「乙卯(1855)九月偕錢叔保(熙哲)再寓幻居庵」,又註稱:「李善蘭壬叔昔館禾(嘉興)城,今遊滬瀆」.[52]

是年譯畢幾何原本後九卷.善蘭稱幾何原本後九卷「甫脫稿,韓君綠卿(應陛)寓書稱捐資上板,以廣流傳.卽以全稿寄之.顧君尚之(觀光),張君嘯山(文虎)任校覈,閱二年功竣,韓君復乞序之.[53]

海寧李壬叔善蘭與(張文虎)先生,讀算契合,咸豐初李先生從英吉利人艾約瑟偉烈亞力新譯重

(50) 見舒藝室尺牘偶存第15頁,上海文明書局本.

(51) 衡齋算學遺書合刻,聞梅舊塾藏版.

(52) 張文虎舒藝室詩存三第27-28頁.

(53) 見李善蘭幾何原本後九卷序. 同治四年(1865)刻本.

學及幾何原本後九卷.而艾約瑟輩深明算理格致之學,聞(張)先生名,數造訪質疑問難,咸大折服,謂爲彼國專家勿能及.[54]

○是年顧觀光著開方餘義.[55]

咸豐六年丙辰(1856),四十七歲.

○是年夏鸞翔序戴煦外切密率四卷及假數測圓二卷.[56]

咸豐七年丁巳(1857),四十八歲.

是年正月李善蘭及偉烈亞力(Wylie Alexander)序續譯幾何原本後九卷,是年二月婁縣韓應陛跋幾何原本後九卷.

○容閎(1828–1912)西學東漸記(1900)稱:「曾繼甫(譯音)君後又介予於中國之著名大算學家李君壬叔.予因李君又得識曾君國藩,曾君蓋中國之軍事家及政治家.予之教育計畫,後亦卒賴曾公力爲提倡,乃得實行.予嘗謂世上之事,殆如蛛網之牽絲.不能預定交友之中,究何人能解吾畢生

(54) 見繆荃孫「張文虎墓志銘」續碑傳集卷五十七,宣統庚戌(1910)繆荃孫自序,江楚編輯書局刊本.

(55) 武陵山人遺書,內算賸餘稿本.

(56) 見求表捷術,粵雅堂叢書本.

之結.即如予之因曾(繼甫)而識李(善蘭)因李而識曾(國藩),因曾而予之教育計畫,乃得告成,又因予之教育計畫告成,而中西學術,萃於一堂」.(57)

○是年七月番禺陳澧自序弧三角平視法一卷.

○是年夏鸞翔客都門,撰洞方術圖解二卷.

咸豐八年戊午(1858),四十九歲.

是年幾何原本刊行.(58)

是年冬李善蘭成火器眞訣一卷爲則古昔齋算學之十李善蘭序重學稱:「朝譯幾何,暮譯重學,閱二年同卒業,韓君綠卿(應陛)既任刻幾何,錢君鼎卿(熙輔)亦請以重學付手民,同時上板,皆印行無幾,同燬於火」.(59)按閱二年當作閱四年.

○墨海教士(Rev. William Muirhead, 1822–1900)稱:「一八四八年或日,有一中國算學家攜其四年來所研究之微積學來見麥都斯博士(Dr. Medhurst)及墨海教士(Rev. W. Muirhead)謂曾從偉烈亞力(Wylie Alexander)受代數,幾何後九

(57) 見徐鳳石,惲鐵樵,譯容閎西學東漸記第48頁,上海商務印書館,民國四年(1915)十二月初版.

(58) 見李善蘭代微積拾級序.

(59) 序見同治五年李鴻章重刻重學二十卷前。

卷,三角,微積等科.且嘗譯侯失勒談天(Herschel's Outline of Astronomy),胡威立重學(Whewell's Mechanics),又着意從事奈端數理(Newton's Principia).當時從事此學之人雖少,而此君嘗介紹數人於教士.其一人爲江蘇顯官,惜其信佛之心,過於信耶耳」.[60] 按此所云中國算學家,蓋指李善蘭;而顯官則徐有壬也.其言一八四八當係一八五八年.因偉烈亞力(Wylie Alexander)於一八四七初來中國,且是時各書都未譯也.

咸豐九年己未(1859),五十歲.

是年孟夏善蘭序代微積拾級十八卷,由墨海刊行.代微積拾級題米利堅羅密士(Elias Loomis, 1811–1899)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆述.[61]

(60) 見 Rev. William Muirhand, China and the Gospel, pp. 193–194, 1870.

按格致彙編第三年春季號內傅蘭雅,"江南製造總局翻譯西書事略"(1880)謂此事在一八四五年亦屬誤記.

(61) 此書斯密斯博士疑出於 Elements of Algebra, N. Y. 1846 及 Element of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus, N. Y. 1850, 語見 Smith, D. E., and Mikami, Y. A.: History of Japanese Mathematics, p. 274. 然考代微積拾級譯本,實僅當羅密士1850之書,並未及1846本之代數學,書中"代"字是"代數幾何"(按 Analytical Geometry=Algebraic Geometry)之省稱.

是年夏六月烏程汪曰楨自序如積引蒙八卷,稱:「如積之術,爲西法借根方所從出……余少讀之,不得其詳,既而見焦里堂(循)天元一釋,李壬叔(善蘭)四元解乃始稍稍解悟,誠算術之至巧至捷者也」.

是年重陽後八日李善蘭序談天於崑山舟次.

是年孟冬之月英國偉烈亞力(Wylie Alexander)序談天於春申浦上.

按談天十八卷,卷首一卷題英國侯失勒(Herschel)原本,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭删述,無錫徐建寅續述.據談天凡例,則李譯乃據咸豐元年(1851)刻本而徐氏續述者,乃據同治十年(1871)重刻本也.

是年孟冬英國偉烈亞力序代數學十三卷.代數學題英國棣麽甘(Augustus De Morgan 1806–1871)撰,英國偉烈亞力口譯,海寧李善蘭筆受.

是年冬十一月金山錢熙輔序刻艾約瑟,李善蘭譯胡威立重學二十卷,由顧觀光,張文虎校.(62)又圓錐曲線三卷,題艾約瑟口譯,李善蘭筆受者,當亦成於此時.

(62) 跋見同治五年李鴻章重刻重學二十卷後.

觀前墨海教士(China and the Gospel)所記,奈端數理(Newton's Principia)之譯,當亦在此數年間.算學書目提要稱:「奈端數理四册,英國奈端撰,偉烈亞力傅蘭雅口譯,海寧李善蘭筆述.(丁福保)按是書分平圓,橢圓,拋物線,雙曲線各類.橢圓以下,尙未譯出,其已譯者,亦未加删潤.往往有四五十字爲一句者,理旣奧頤,文又難讀.……後爲大同書局借去,今不可究詰.……」(63)

傅蘭雅主編格致彙編稱:「李善蘭與偉烈亞力譯奈端數理數十頁,後在翻譯館內,與傅蘭雅譯成第一卷;共三册,原書共八册.(64)

咸豐十年庚申(1860),五十一歲.

是年夏婁縣韓應陛卒.按張文虎讀有用書齋雜著序稱:「……西點線面積之學,莫善於幾何原本.凡十五卷,明萬歷間利瑪竇(Ricci Matteo)所譯止前六卷.近歲英吉利末士偉烈亞力續譯後九卷.海寧李壬叔寫而傳之.(韓應陛)君反復審訂,授之剞劂.…

(63) 見丁福保,算學書目提要,卷中第14頁,光緒己亥(1899)無錫埃實學堂刻.

(64) 見格致彙編第三年卷,「江南製造總局繙譯西書事略」(1880).

(咸豐)十年(1860)夏……病死」.[65]

(咸豐)十年(1860)李善蘭在莊愍(徐有壬)幕.[66]「善蘭……輒復著書,久之得若干種,咸豐庚申(1860)在蘇州署,遭亂盡失之.[67]

○是年戴煦(1805–1860)[68]卒.戴煦有求表捷術共四種九卷,未刻者又有若干種.

咸豐十一年辛酉(1861),五十二歲.

是年吳嘉善至上海,與善蘭論當世算家,善蘭極推顧觀光.[69]

○是年顧觀光撰對數衍一卷.

○是年時曰醇自序百雞術衍一卷.

同治元年壬戌(1862),五十三歲.

是年初春錢塘夏鸞翔自序萬象一原九卷,中有演代微積拾級術.

是年顧觀光(1799–1862)卒.顧觀光有武陵山人遺書八種九卷,九數存古九卷.觀光「疾將終,以所著

(65) 見張文虎舒藝室雜著乙編,卷上,第34頁.

(66) 見諸可寶疇人傳三編,卷六,光緒十二年(1886).

(67) 見李善蘭則古昔齋算學自序.同治丁卯(1867)金陵刻本.

(68) 見伍崇曜求表捷術跋,粵雅堂叢書本.

(69) 見武陵山人遺書內算賸初編序.

書,屬長子深曰,求爾師爲我傳,及李壬叔序之遂無他言,卒年六十四」.(70)

是年十月吳縣馮桂芬自序西算新法直解八卷於滬城北郊寓舍.是書乃演代微積拾級說也.

按李善蘭在滬時,劉彝程曾晤之.劉彝程簡易庵算稿自序稱:「……識李君壬叔於滬瀆,由是悉心於弧矢級數之學,不數年自著割圜闡率一卷(1869),對數問答(71)數種」是也.

○是年三月吳嘉善序割圜八線綴術四卷.

○是年六月宜賓汪香祖自序衍元筆算今式二卷.

○是年秋南豐吳嘉善序長沙李錫蕃遺著借根方句股細草一卷.

○是年八月總理衙門王大臣奏設同文館於京師.(72)

同治二年癸亥(1863),五十四歲.

(70) 見張文虎"顧尙之別傳",武陵山人遺書本,或張文虎舒藝室雜著甲編本.

(71) 卽對數四問,經世文編本.

(72) 見京師同文館學友會第一次報告書,京華印書局代印,民國五年(1916)三月.

曾國藩稱是年五月李善蘭壬叔,楊峴見山來坐,攜陳碩甫先生奂片一紙,知已由賊中逃出到滬,言將來皖,年八十二歲,段茂堂之弟子,東南之精於經學小學,巋然僅存矣.[73]

曾國藩稱是年五月李壬叔帶來二人,一張斯桂號魯生,浙江蕭山人,工於製造洋器之法.一張文虎江蘇南匯人,精於算法,兼通經學小學,爲阮文達公所器賞.[74]

王韜稱:「海昌李壬叔茂才名善蘭,一字秋紉,…咸豐壬子來滬,…在滬十年,…同治初年曾滌生相國開府兩江,徵至幕中,自此蹤跡遂與闊絕矣.[75]

是年夏(五月)張文虎自滬至皖,時善蘭已從軍安慶.[76]在皖所居賓館,在南城任家坡,爲節相內軍械所,時與李善蘭張文虎同居者,有華蘅芳徐壽等.[77]

李善蘭在安慶,與莫友芝,鄧瑤,張文虎,孫衣言,周學

(73) 求闕齋日記卷九.

(74) 求闕齋日記卷九.

(75) 見王韜瀛壖雜志卷四.

(76) 見張文虎「送壬叔以算學徵入同文館」詩,舒藝室詩存六,第14頁.

(77) 見張文虎「雜詩」,舒藝室詩存五,第13頁.

濬,方宗誠,方駿謨等,常過從錢泰吉寓.(78)

是年東坡生日以十四人集周縵雲侍郎學濬蟄庵共賦詩.(79)李善蘭與張斯桂對奕,屢敗,而竟苦戰不已.(80)

是年某月及七月李善蘭作書約容閎入曾國藩幕.西學東漸記稱:「一八六三年余(容閎自稱)營業九江,某日,忽有自安徽省城致書於余者,署名張斯桂.…彼自言承總督(曾國藩)之命,邀余至安慶一行.總督聞余名,亟思一見,故特作此書云……兩閱月後,張君之第二函至,囑予速往.並附李君善蘭(即壬叔)一書.李君亦予在滬時所識者.此君爲中國算學大家,曾助倫敦傳道會教士偉烈亞力(Rev. Wylie Alexander)譯算學書甚夥,中有微積學,即予前在耶路大學二年級時,所視爲畏途,而每試不能及格者.…七月間予復得張君之第三函,及李君之第二函,兩函述文正之意,言之甚悉.謂總督欲予棄商業而入政界.居其屬下任事.(81)

(78) 見錢警石年譜.(裘沖曼徵訪)

(79) 見張文虎舒藝室詩存五,第33頁,及第17頁.

(80) 見張文虎舒藝室詩存五,第11頁.

(81) 見西學東漸記第81-83頁.惟譯本誤以張斯桂爲張世貴.

是年九月容閎抵安慶,逕赴文正大營,得晤故人張斯桂,李善蘭,華若汀(蘅芳)徐雪村(壽)等,此數人皆予(容閎自稱),上海舊交相識,見予至,意良欣慰.(82)

丁取忠同治十一年(1872)算學二十一種序稱:「癸亥(1863)曾以活字印十數種」.又同書凡例稱:「原書印後,博求四方通算士,互相考正.海寧李壬叔先生(善蘭)校正居多.(83)

同治三年甲子(1864),五十五歲

善蘭自稱:「歲甲子來金陵晤曾沅浦中丞,許代付手民」,(84)此爲刻印則古昔齋算學十三種之動機.

是年二月漢陽劉世仲跋李善蘭則古昔齋算學.(85)

是年李善蘭張文虎並來南京,入城訪朝天宮,見飛霞閣在朝天宮大殿左,僅存牆壁甍榱.官紳議以宮址改建郡學,竣事後移書局於此,李善蘭張文虎等並居之.(86)

(82) 西學東漸記,第 84 頁.

(83) 見白芙堂算學叢書內"算學二十一種",序及凡例.

(84) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)金陵刻本.

(85) 見李善蘭則古昔齋算學跋,同治丁卯(1867)金陵刻本.

(86) 見張文虎,舒藝室詩存五,第 32 頁;及詩存六,第 4 頁.

同治四年乙丑(1865),五十六歲.

是年十月張文虎代曾國藩作幾何原本序稱:「咸豐間海寧李壬叔始與西士偉烈亞力續譯其後九卷.復爲之訂其舛誤,此書遂爲完帙,松江韓中翰嘗刻之,印行無幾,而板燬於寇.壬叔從余安慶軍中,以是書示余曰:此算學家不可少之書,失今不刻復絕矣.會余移駐金陵,因屬壬叔取後九卷重校付刻.繼思無前六卷則初學無由得其蹊徑,而亂後書籍蕩泯.天學初函世亦稀覯.近時(1847)廣東海山仙館刻本,紕繆實多,貽誤來學,因并取六卷者屬校刊之」.[87] 按金陵刻本幾何原本由曾國藩署簽,張文虎覆校.

〇是年六月郭嵩燾序馮桂芬西算新法直解八卷於嶺南節署.

同治五年丙寅(1866),五十七歲.

是年曾國藩郵致三百金爲李善蘭刻算書.[88]

是年九月李善蘭自序重學稱:「今湘鄉相國(曾國藩)爲重刊幾何,而制軍肅毅伯(李鴻章)亦爲重刻重學,

(87) 見張文虎舒藝室雜著甲編卷下第5-6頁,及幾何原本十五卷本,序第12頁.

(88) 見李善蘭則古昔齋算學自序.

又同時復行於世.[89]

〇是年同文館創設天文,算學等科,以七年爲期.[90]

席淦殘稿稱:「同治五年(1866)郭筠仙(嵩燾)侍郎特疏薦(李善蘭)」.

張文虎「送壬叔以算學徵入同文館」詩,亦註稱:「前廣東巡撫郭中丞,始以君名入告」.[91]

同治六年丁卯(1867),五十八歲.

是年春獨山莫友芝爲李善蘭則古昔齋算學署檢.

是年九月李善蘭自序則古昔齋算學十三種,計:方圓闡幽一卷,弧矢啓祕二卷,對數探源二卷,垛積比類四卷,四元解二卷,麟德術解三卷,橢圓正術解二卷,橢圓新術一卷,橢圓拾遺三卷,火器眞訣一卷,尖錐變法解一卷,級數回求一卷,天算或問一卷,共二十四卷.[92]

就中南海馮焌光校方圓闡幽(1851刻)

(89) 見同治五年重刻重學二十卷附曲線說三卷前.

(90) 見京師同文館學友會第一次報告書,京華印書局代印,民國五年(1916)三月.

(91) 見張文虎舒藝室詩序六,第14頁.

(92) 見李善蘭則古昔齋算學自序,同治丁卯(1867)金陵刻本.

南匯張文虎校弧矢啓祕(1851刻)

南匯賈步緯校對數探源(1850刻)

湘鄉曾紀澤校垜積比類

湘鄉曾紀鴻校四元解(1845)

烏程汪曰楨校麟德術解(1848)

江寧汪士鐸校橢圜正術解

無錫徐壽校橢圜新術

無錫華蘅芳校橢圜拾遺

上元孫文川校火器眞訣(1858)

南豐吳嘉善校尖錐變法解

無錫徐建寅校級數回求

長沙丁取忠校天算或問

李儼藏有李善蘭遺墨,則古堂算學目錄一紙,計:方圓闡幽三卷,弧矢別徑三卷,對數探原三卷,垜積圖譜五卷,海鏡別解五卷,四元解二卷,數學一得十卷,十三經算術十三卷,開方圖法十卷,四元啓蒙四卷,授時術細草七卷,回回術細草七卷,時憲術細草十四卷,海鏡廣十二卷,日晷解三卷,橢圓捷法三卷.附註謂:今日爲始,十年爲期,必成此多種,以上報天地.

善蘭所著書,在則古昔齋算學外者,有:

九容圖表七頁在劉鐸古今算學叢書之內.

測圓海鏡解一卷,有傳鈔本.[93]

考數根法三卷,造整數句股級數法二卷.[94]

偉烈亞力稱:「李氏精思四載,乃得對數理.倘生於訥氏,蓋氏之時,則祇此一端,卽可名聞於世」.[95]

同治七年戊辰(1868),五十九歲.

美國丁韙良於光緒丁丑(1877)「李壬叔先生序」稱:「李壬叔……總署延爲同文館算學教習,在京授算法,於玆八載.[96]

王韜瀛壖雜志卷四註稱:(壬叔以同治戊辰入都爲天文館總教習).[97]

同治七年因湘陰郭侍郎(嵩燾)薦舉,徵(李善蘭)入同文館,(曾)文正資送之.[98]

---

(93) 李儼藏傳鈔本測圓海鏡解凡一卷.

(94) 語見席淦遺稿,及崔敬昌,李壬叔徵君傳. 按中西聞見錄之內,有考數根四法一卷. 又造整數句股級數法二卷亦作級數句股二卷.

(95) Wylie Alexander, Chinese Research, p. 194. Shanghai, 1897.

(96) 見格致彙編第二年夏季册,西曆1877年出版.

(97) 見王韜,瀛壖雜志卷四.

(98) 見諸可寶,疇人傳三編卷六.

同治八年己巳(1869),六十歲.

席淦「抱膝居士遺稿」稱:「李壬叔師天算,集中西大成,己巳年應詔來都,掌教天文館,余從游十餘年.……」[99]

李善蘭甥崔敬昌稱:「總理衙門設天文算學館,議舉主政者郭筠仙侍郎以舅父應.同治八年奉召入都,欽賜中書科中書.洊保四品銜,戶部廣東司郎中.在館教習,諸生先後約百餘人.口講指畫,十餘年如一日」.[100]

按李善蘭入京之年或作戊辰(1868),或作己巳(1869),惟比較以戊辰年入京爲可信.

○是年五月鄒伯奇(1819–1869)卒.鄒伯奇有鄒徵君遺書八種,九卷.

○是年劉彝程自序割圜闡率,一卷.

○是年曾國藩入江南製造局爲督辦.[101]

同治九年庚午(1870),六十一歲.

○是年江南製造局印英傅蘭雅譯,英白起德著,

(99) 見席翰伯先生遺像家刻本.

(100) 見崔敬昌李壬叔徵君傳.

(101) 見魏允江南製造局記卷六,第40頁,光緒三十一年(1905)九月,上海文寶書局石印.

運規約指三卷一本.[102]

同治十年辛未(1871),六十二歲.

〇是年秋楊兆鋆年十八,入同文館,受算學於李善蘭凡六年.[103]

〇是年孟秋丁取忠序粟布演草稱撰此書時曾函詢海寧李君壬叔(善蘭),君示以廉法表及求總率二術,而其理始顯.厥後吳君(嘉善)又示以指數表及開方式,李君復爲之圖解,以闡其義,由是三事互求,理歸一貫.[104] 按白芙堂叢書本粟布演草一題「海寧李善蘭壬叔,南豐吳嘉善子登,湘鄉曾紀鴻粟誠演:長沙丁取忠雲梧,湘陰左潛壬叟同述」是也.

同治十一年壬申(1872),六十三歲.

是年二月善蘭序金匱華蘅芳開方別術,此是爲行素軒算稿之一.[105]

(102) 見魏允江南製造局記卷二,"建置表,"圖書附,第20頁.

(103) 見楊兆鋆須曼精廬算學序,吳興劉氏嘉業堂刊本.

(104) 見粟布演草,白芙堂叢書本.

(105) 見行素軒算稿,光緒壬午(1882)自刻本.

同治十二年癸酉(1873),六十四歲.

○是年席淦充同文館副教習.(106)

○是年長沙丁取忠序嘉定時曰醇求一術指一卷.(107)

○是年吳縣潘祖蔭,南豐吳嘉善序南昌梅啓照學彊恕齋筆算十卷.(108)

○是年華蘅芳,徐壽,徐建寅等入江南製造局爲提調.(109)

○是年左潛序割圜八線綴術四卷.此書以本年秋刻於荷池精舍.

○是年十月華蘅芳序代數術二十五卷,是書題英國華里司輯,英國傅蘭雅口譯,金匱華蘅芳筆述.

○是年冬十二月,左潛自序綴術釋戴一卷.

同治十三年甲戌(1874),六十五歲.

(106) 見席翰伯先生遺像,家刻本.

(107) 見求一術指同治十二年(1872)長沙刻本.

(108) 見學彊恕齋筆算,序第1-4頁,光緒壬午(1882)重刻本.

(109) 見江南製造局記卷六,職官表,第41頁.

時善蘭在京同文館.[110]

善蘭在京,曾患風痺,憚於行遠.咫尺之遙,須人扶掖.是殆晚歲體肥之故歟![111] 善蘭與顧觀光,張文虎皆體肥.英人艾約瑟嘗曰:「吾西國爲算學者多瘦,君輩何獨不爾?」[112]

○是年春長沙丁取忠自序對數詳解五卷,稱:「對數一術乃西士所稱爲至簡者,而近日海寧李壬叔善蘭,南海鄒特夫伯奇皆創立新法,較西人舊法簡易數倍」.[113]

○是年夏左潛序黃宗憲求一術通解二卷.

○是年夏四月丁取忠識數學拾遺,又同書「求叉形弧角解」稱:「昔年編輯吳子登氏算書二十一種,其斜弧三角術表云採徐君卿(有壬)法.及考其第一術第二表卽有與徐氏互異者,因函詢李壬叔氏,李氏爲之圖解,極爲明晰,故存之以爲言弧角之一助」.[114]

(110) 見長沙嚴家巴序湘鄉周廣詢算學入門,光緒丙申(1896)周氏自刋本.

(111) 見王韜弢園尺牘卷八,"與李壬叔書"中語.

(112) 見張文虎舒藝室詩存三,第28頁.

(113) 見對數詳解,白芙堂叢書本.

(114) 見丁取忠數學拾遺,白芙堂算學叢書本.

○是年賈步緯校顧觀光九數外錄一卷一本,劉彝程校傅蘭雅,華蘅芳譯英華里司代數術二十五卷,六本;微積溯源八卷,六本;賈步緯校,賈步緯八線簡表一卷一本,由江南製造局印行.(115)

○是年九月金匱華蘅芳自序所譯微積溯源八卷,稱:「先是咸豐年間曾有海寧李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書,流播海內,余素與壬叔相友,得讀其書,粗明微積二術之梗概.所以又譯此書者,蓋欲補其所略也」.

○是年丁取忠序曾紀鴻圜率眞圖解一卷.

光緒元年乙亥(1875),六十六歲.

是年九月張之洞編書目答問,卷後附有「清朝著述諸家姓名略」,其「算學家」條下註稱:〔五十年來爲此學者甚多,此舉其著述最顯著者;梅文鼎,羅(士琳)李善蘭爲最〕.又註稱:(此編生存人不錄,李善蘭乃生存者.以天算爲絕學,故錄一人).

○是年孟冬湘鄉曾紀鴻序綴術釋明二卷.稱:「董(方立)明(靜庵)二君均爲弧矢不祧之宗,無庸軒輊其間,邇百年中繼起者如戴鄂士煦,徐君靑有壬,

(115) 見江南製造局記卷二,第19頁.

李壬叔善蘭所著各書,雖自出新裁,要皆奉董明爲師資也.……」

光緒二年丙子(1876),六十七歲.

是年十月李善蘭序李治測圓海鏡細草十二卷,由同文館鉛版印行.善蘭序稱:「善蘭少習九章,以爲淺近無味.及(應試武林),得讀此(測圓海鏡)書,然後知算學之精深,遂好之至今.後譯西國代數,微分積分諸書,信筆直書,了無疑義者,此書之力焉.蓋諸西法之理,卽立天元一之理也.今來同文館,卽以此課諸生,今以代數演之,則合中西爲一法矣」.

○是年廣方言館設於上海城內,八年移入江南製造局.(116)

○是年孟春月丁取忠跋四象假令細草.(117)

光緒三年丁丑(1877),六十八歲.

是年美國丁韙良「李壬叔先生序」稱:「(善蘭)在京授算法,於茲八載(1870–1877)……年逾六旬,頗憂乏嗣.……」(118)

---

(116) 見江南製造局記卷二,第14頁.

(117) 附白芙堂叢書本四元玉鑑後.

(118) 見格致彙編第二年,夏季册,西曆1877年出版.

是年傅蘭雅編格致彙編第二年夏季四卷,載有李善蘭演代數難題卷十三,第四次考題.相傳此題爲英國大書院內之人包爾所出.出此題時,許人能解此題者,贈以金錢一百.

○是年劉彝程校傅蘭雅,華蘅芳譯,英海麻士(原名不詳, Hymers?)三角數理十二卷六本.(119)

○是年江南製造局刻傅蘭雅江衡譯,英哈韋算式集要四卷.(120)

光緒四年戊寅(1878),六十九歲.

○是年賈步緯校梅瑴成增刪算法統宗十一卷四本,由江南製造局印行.(121)

○是年宋演句股一貫述六卷,刻於渝州.

光緒五年己卯(1879),七十歲.

○是年春二月南昌梅啓照序海寧陳其晉對數述四卷.(122)

○是年烏程汪曰楨序錢孔福所刻張作楠翠薇山房數學.

(119) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(120) 見格致彙編第三年,春季册.

(121) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(122) 見對數述,光緒丙申(1896)石印本.

○是年江南製造局刻董祐誠董方立遺書一卷一本,及江衡校傅蘭雅趙元益譯英棣麽甘(Augustus De Morgan)數學理九卷四本.(123)

光緒六年庚辰(1880),七十一歲.

是年正月同文館同人公壽李善蘭.(124)

是年三月美國丁韙良序同文館算學課藝四卷.

此書題「同文館算學教習李壬叔先生閱定,副教習席淦(1845-1917),貴榮編次;肄業生陳壽田,胡玉麟,熊方柏,李逢春同校」.演課題者,有:陳壽田(已故)汪鳳藻(1851-1918),貴榮(已故)胡玉麟(已故)席淦,楊兆鋆(1854-?),…….(125)

○是年華蘅芳自識開方古義二卷,此爲行素軒算稿之二.(126)

○是年江南製造局設「繙譯館」,翻譯格致化學製造各書.(127)

(123) 見江南製造局記卷二,第19頁.

(124) 見席淦殘稿.

(125) 其稱已故者乃據京師同文館學友會第一次報告書.

(126) 見行素軒算稿,光緒壬午(1882)自刻本.

(127) 見江南製造局記卷二,第14頁.

光緒八年壬午(1882)七十三歲.

海寧州志稿稱:「善蘭於光緒壬午,年七十三,病卒於官」.張鳴珂疑年賡錄卷二稱「李壬叔七十三善蘭……卒光緒八年壬午」.

按杭州府志作「光緒十年卒官」及疇人傳三編作「光緒十年卒於官,年垂七十矣」者,並誤.

席淦殘稿稱「李善蘭十月二十九日卒」.

李善蘭墓在浙江海鹽縣牽罾橋東北.(據管茂才元耀言).(128)崔敬昌稱:「光緒八年冬十月,偶示微疾,越日逝.是年之夏,猶手著級數句股二卷,老尙勤學如此.歿後周小棠(家楣)侍郎囑開其事實,奏請宣付史館立傳,嗣周侍郎薨於位,未果.然先舅父爲一代疇人,他日必有繼周侍郎而請於朝者」.(129)

李善蘭卒無後,以甥崔敬昌爲繼.崔字吟梅,民國六年(1917)年已六十餘.曾任江海關文案,所居在硤石鎭,爲李壬叔先生舊居.(據費孝廉寅言).

(128) 民國六年(1917)據海寧縣公立圖書館長朱尙(字蒼)君轉述.

(129) 見崔敬昌李壬叔徵君傳.

中算史論叢（三）

李儼著

序

民國十七年曾將中算史論文之發表於各雜誌者,輯成中算史論叢第一册.其後續輯得二,三兩册,交商務印書館排印.民國二十一年一月二十九日該館被焚,全稿盡失,事後多方搜求,始將各文之散在各雜誌者,收集完全,再重加修正,今幸告成,第三册所收者,計有下列各篇:

九章算術補註(北平北海圖書館月刊),第二卷第二號,十八年二月,第一二七至一三三頁);孫子算經補註(國立北平圖書館館刊第四卷第四號,十九年七,八月,第一三至二九頁);籌算制度考(燕京學報第六期,十八年十二月,第一一二九至一一三四頁);珠算制度考(燕京學報第十期,二十年十二月,第二一二三至二一三八頁);中算家之縱橫圖(Magic Squares)研究(學藝雜誌第八卷第九號,十六年九月,第一至四〇頁);中算家之 Pascal 三角形研究(學藝雜誌第九卷第九號,十八年十月,第一至一五頁);中算家之

方程論（科學雜誌第十五卷第一期,十九年十一月,第七至四四頁）;中算家之級數論（科學雜誌第十三卷,第九期,第十期,十八年四月,五月,第一一三九至一一七二頁,第一三四九至一四〇一頁）; 三角術及三角函數表之東來（科學雜誌第十二卷第十期,十六年九月,第一三四五至一三九三頁）.

中華民國二十三年二月二十五日

李儼記於西安

九章算術補註

九章第一

幾何　春秋左氏僖公二十七年傳:「楚蔿賈曰:靖諸內而敗諸外,所獲幾何?」.

畝法　廣韻卷第三:「畝,司馬法,六尺爲步,步百爲畝,秦孝公之制,二百四十步爲畝也.」　鹽鐵論:「古者制田百步爲畝,先帝哀憐百姓之愁苦,衣食不足,制田二百四十步而一畝.」

頃　廣韻卷第三:「頃,四百畝也.」　公羊宣十五傳注:「一夫一婦,受田百畝,公田十畝,廬舍二畝半,凡爲田一頃十二畝半.」

里　鄒伯奇補小爾雅釋度量衡三篇:「周制三百步爲里.「穀粱宣十五年傳古者三百步爲里.家語王言周制三百步爲里.」

宛田　清羅士琳算學啓蒙後記:「至於是(算學啓蒙)書畹田之畹,幷見(四元)玉鑑,或疑字書所無.按劉徽所注之九章,本亦作畹.李籍音義謂當作宛,字之誤

也.蓋取爾雅宛中宛邱注中央隆高之義,今則從李所改.楊輝算法作畹.考說文畹下注,田三十晦也,與中央隆高義迥別.夏侯陽算經丸田注,形如覆半彈丸.術曰:徑乘周四而一,與此合.丸畹音近,畹畹形近似,畹雖不見於字書,殆如明邢雲路古今律歷考冪積之冪作羃,同爲算書習用字.」

九章第二

糲米　說文:「糲;粟重一秙,爲十六斗大半斗,舂爲米一斛曰糲.」儼按粟比糲如十六又三分之二比十,故粟率五十而糲率三十.

粺米　說文:「粺毇也」.又:「毇;糲米一斛,舂爲九斗也.」儼按粟率五十而糲率三十,今糲米一斛,舂爲(粺)九斗;故粟率五十而粺率二十七.

糳米　說文:「糳;糲米一斛爲八斗曰糳.」儼按此言粟率五十而糳率二十四.

御米　詩大雅:「彼疏斯粺」.鄭康成箋:「米之率,糲十,粺九,糳八,侍御七.」

太半　史記項羽本紀:「漢有天下太半.」「韋昭曰:凡數三分有二爲太半,一爲少半」.淮南子覽冥訓:「斬艾百姓,殫盡太半」「逵吉按:凡數三分有二爲太半,有一爲

少半,韋昭說也.」 前漢書食貨志:「收泰半之賦.」「師古曰:泰半三分取二.」

瓴甓 前漢書尹賞傳:「穿地方深各數丈,致令辟爲郭.」「師古曰:令辟,甌甎也.」廣韻卷三:「甓;瓴甓,甌甎.」

錢 說文貝下云:「至秦廢貝行錢.」 史記秦始皇本紀:「(秦)惠文王生十九年而立,立二年初行錢.」

縑 釋名釋綵帛:「縑,兼也,其絲細緻,數兼於布絹也.」 廣韻卷二:「縑,絹也.說文曰,幷絲繒也.

匹 漢書食貨志下:「布帛廣二尺二寸爲幅,長四丈爲匹.」

銖 兩 斤 鈞 石 漢書律歷志:「權者,銖兩斤鈞石也.所以稱物平知輕重也.本起於黃鐘之重.一龠容千二百黍,重十二銖,兩之爲兩.二十四銖爲兩,十六兩爲斤,三十斤爲鈞,四鈞爲石.」史記秦始皇本紀:「至以衡石量書.」集解:「石百二十斤.」 廣韻卷一:「斤,十六兩也.鈞,三十斤也.」

翭 廣韻卷二:「翭,說文曰:羽本也」. 方言第十三:「翭,本也」.「今以鳥羽本爲翭音侯.」

矢簳 釋名釋兵「矢,指也.……其體曰幹,言挺幹

也.」

九章第三

衰分　淮南子說林訓「大小之衰然.」高注「衰,差也.」唐陸德明經典釋文卷第十八春秋左氏音義之四以衰注「差,降也.」

大夫　不更　簪褭　上造　公士　史記秦本紀集解引漢書曰:「商君爲法於秦,戰斬一首,賜爵一級,欲爲官者五十石.其爵名一爲公士,二上造,三簪褭,四不更,五大夫,……二十徹侯.」前漢書百官公卿表上:「稱爵一級曰公士「師古曰:言有爵命異於士卒,故稱公士也,」二上造,「師古曰:造,成也,言有成命於上也,」三簪裊,「師古曰:以組帶馬曰裊,簪裊者言飾此馬也.裊音乃了反,」四不更,「師古曰:言不豫更卒之事也.更音工衡反,」五大夫,「師古曰,列位從大夫,」…二十徹侯,皆秦制.」續漢書百官志稱:「關內侯,承秦賜爵,十九等爲關內侯.」梁劉昭注補引:「劉劭爵制曰:一爵曰公士者,步卒之有爵爲公士者.二爵曰上造,造成也,古者成士升於司徒曰造士,雖依此名,皆步卒也.三爵曰簪褭,御駟馬者,要褭古之名馬也,駕駟馬者,其形似簪,故曰簪褭也.四爵曰不更,不更者,爲車右,不復與凡更卒同也.五爵曰

大夫,大夫者,在車左者也.」

持錢 前漢書高祖紀上:「賀錢萬,實不持一錢.」

算 漢儀注曰:「人年十五至五十六,出賦錢一百二十爲一算.又七歲至十四出口錢人二十以供天子.至武帝時,又口加三錢,以補車騎馬.」儼按論衡謝短篇曰:「七歲頭錢二十三.」又說文:「漢律民不繇,貲錢二十三,」幷口錢也.

徭 前漢書高祖紀上:「高祖常繇咸陽」.「應劭曰:繇者,役也,…….繇讀曰徭,古通用字.」

素 禮記鄭注:「素,生帛也.」釋名釋綵帛:「素,朴素也.已織則供用,不復加巧飾也.」

保 史記欒布傳:「窮困,賃傭於齊,爲酒家保.」注:「酒家保,保傭也」.

九章第四

又有積三十九億七千二百一十五萬. 儼按此言億爲萬萬也.

九章第五

商功 前漢書二十四上食貨志稱耿壽昌以善爲算,能商功利,又稱(耿)壽昌習於商功分銖之事. 前漢書二十九溝洫志稱(許)商(乘馬)延年,皆明計算,能

商功利.

穿地　說文:「穿,地也」.段注引召南曰:「誰謂鼠無牙,何以穿我墉.」說文又稱:「竁,穿地也.」周禮小宗伯注:「南陽名穿地爲竁.」前漢書尹賞傳:「穿地方深各數丈.」史記秦始皇本紀:「始皇初卽位,穿治酈山.」

壤　說文「壤,柔土也.」

城　崔豹古今注上:「城者盛也,所以盛受人物也.」

隄　爾雅:「築土遏水曰隄.」

溝　考工記:「廣四尺深四尺,謂之溝.」

壍　廣韻卷第四:「壍,阬也,遶城水也.」

徒　爾雅河曲下,徒駭條,李巡云:「徒駭者,禹疏九河,以徒衆起,故曰徒駭」.又太史條,李巡云:「太史者,禹大使徒衆,通其水道,故曰太史.」史記秦始皇本紀:「始皇初卽位,穿治酈山.及幷天下,天下徒送詣七十餘萬人.」又孝景本紀:「孝景……七年……春免徒隸作陽陵者.」又平準書:「人徒之費,擬於南夷.」

垛墻　廣韻卷第三:「垛,垛障,小城,墻,高土.」

棚　廣韻卷第二:「棚,棚閣.」

踟躕　廣韻:「踟躕,行不進貌.」

九章第六

均輸　史記秦始皇本紀:「調郡縣,轉輸菽粟芻藁.」史記平準書或前漢書食貨志稱:「桑弘羊爲大司農丞,管諸會計事,稍稍置均輸,以通貨物矣.……元封元年,(公元前一一〇年)桑弘羊爲治粟都尉,領大農,盡代僅筦天下鹽鐵.弘羊以諸官各自市,相與爭,物故騰躍,而天下賦輸或不償其僦費.乃請置大農部丞數十人,分部主郡國,各往往縣置均輸鹽鐵官.」孟康注曰:「(均輸者),謂諸當所輸於官者,皆令輸其土地所饒,平其所在時價,官更於他處賣之,輸者既便,而官有利.」漢書百官表屬官有均輸令.梁劉昭注漢志幷引鹽鐵論之說,以明均輸之制.

塞　崔豹古今注上:「塞者,塞也.所以擁塞戎狄也.」又稱:「紫塞,秦築長城,土色皆紫,漢塞亦然,故稱紫塞也.」

僦一里一錢　前漢書酷吏傳:「初大司農取民車三萬兩爲僦,……車直千錢.」注服虔曰:「雇載曰僦,言所輸物不足,償其雇載之費也.」顏師古曰:「僦,顧也言所輸賦物不足償其餘顧庸之費也.」

傭價一日一錢　史記陳涉世家.「嘗爲人傭耕.」儼按前言僦一里一錢,此言傭一日一錢;則僦傭同爲雇傭之費,僦以一里計,傭以一日計也.

太倉　史記平準書:「至今上卽位,……太倉之粟,陳陳相因.」

上林　史記秦始皇本紀:「諸廟及章臺,上林,皆在渭南.」史記孝武本紀:「是時上求神君,舍之上林蹏氏觀.」

問金一斤値錢幾何　答曰:六千二百五十.前漢書張良傳註:「秦以鎰,名金,若漢之論斤.」史記平準書:「又造銀錫爲白金,……故白金三品,其一曰重八兩,圜之,其文龍,名曰白選,直三千,……而吏民之盜鑄白金者,不可勝數.」儼按此處所指之金,蓋指白金.九章算術言金一斤,値錢六千二百五十,史記言白金八兩直三千,卽一斤直六千兩者相類,而吏民之盜鑄白金者,不可勝數,故値亦不一.

牡瓦　牝瓦　廣韻卷一「㼧,屋牡瓦名.」又卷一「甑,牡瓦.」集韻:「瓺,㼧也.」玉篇:「瓺,牡瓦也.」廣雅作甗.集韻:「瓺瓬,小牡瓦也.」玉篇廣韻稱:「㼜,牝瓦也.」三國志:「魏文帝夢兩瓦落地爲鴛鴦」.李商隱詩:「秦

樓鴛瓦漢宮盤.」白居易詩「鴛鴦瓦冷霜華重.」

九章第七

璡　說文:「璡,石之似玉者.」

醇酒　行酒　史記曹參世家「日夜飲醇酒」. 說文:「醇,不澆酒也.醞,泛齊行酒也.」段注曰:「泛齊見周禮,…行酒未聞,疑是貨物行敝之行,謂行用之酒也.」儼按行酒實對醇酒而言.

九章第八

九章第九

孫子算經補註

孫子算經序

「孫子曰:夫算者天地之經緯,羣生之元用,……」

微波榭孔刻算經十書本作「羣生之元用.」汲古閣毛氏景宋本作「羣生之元首,」毛景本今藏北平故宮博物院圖書館,卽天祿琳瑯書目中御題算經十册之一.至古今之說述孫子者,臚舉如左:

(1) 夏侯陽算經序曰:「五曹,孫子,述作滋多,」

(2) 張丘建算經序曰:「夏侯陽之方倉,孫子之蕩杯,此等之術,皆未得其妙.」

(3) 隋書卷三十四,經籍志作「孫子算經二卷.」又律歷志作「孫子算術.」

(4) 唐慧琳一切經音義作「孫子算經,及孫子九章算經.」

(5) 舊唐書卷四十四職官三第二十四,及新唐書卷四十八,志第三十八百官志,並稱「學生三十人.習九章,海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,十五人,」

(6) 舊唐書卷七十九,列傳第二十九,李淳風,及新唐書卷二〇四,列傳第一二九,方技,李淳風,並稱「先是太史監侯王思辯表稱:五曹,孫子十部算經,理多蹖駮,淳風復與國子監算學博士梁述,太[illegible]敎王眞儒等,受詔注五曹,孫子十部算經,書成,高[illegible]國學行用,

(7) 新唐書卷四四,志第三四,選舉志,稱「孫子,五曹共一歲,……試海島,孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,周髀,五經算,各一條.」

(8) 新唐書卷五九;藝文志第四九:「李淳風注五曹,孫子,算經二十卷,注甄鸞孫子算經三卷.」

(9) 日本寬平時代(889—897)藤原佐世奉勅撰日本見在書目,內有孫子算經三卷.蓋日本自大化二年(696)大改新以來,經大寶(701—703),養老.(717—733),文物制度已經大備.令義解之學令中,明記算經之名,中有孫子焉.其試驗方法及修業方式,並如唐制.

(10) 李籍九章算術音義作「孫子算術.」

(11) 太平御覽引作「孫子算經.」

(12) 宋史卷二〇七,藝文志第一六〇藝文六稱「李淳風注釋孫子算經三卷.」

(13) 續一切經音義卷二,稱「劉洪,九章,孫子,五曹,皆計數術也.」

(14) 明程大位算法統宗卷十二,「算經源流」條,稱「宋元豐七年,(1084)刋十書入祕書省,又刻於汀州學校:

黃帝九章,周髀算經,五經算法,海島算經,孫子算法,張丘建算法,五曹算法,緝古算法,夏侯陽算法,算術拾遺.

(15) 清康熙甲子(1984)毛扆(1690—?)作算經跋稱「從太倉王氏(世貞家)得孫子,五曹,張丘建,夏侯陽,四種,……皆元豐七年,(1084)祕書省刋版.」

(16) 孔繼涵算經十書序,稱「今得毛氏汲古閣所藏宋元豐京監本七種,又假戴東原先生所輯永樂大典中海島算,五經算,而十書備」又孔刻算經十書本孫子算經卷下後有「大清乾隆三十八年癸巳(1773)秋闕里孔氏依汲古閣影宋刻本重雕」一行.

(17) 段玉裁戴東原先生年譜:「乾隆三十九年(1774)十月三十日戴氏與段氏書稱纂次永樂大典內散篇,得九章,海島,孫子,五曹,夏侯陽,五種算經.」

(18) 四庫全書總目卷一〇七,子部十七,天文算法類,有:「孫子算經三卷(永樂大典本.)

案隋書經籍志有孫子算經二卷,不著其名,亦不著其時代.唐書藝文志稱李淳風註甄鸞孫子算經三卷,於孫子上冠以甄鸞,蓋如淳風之註周髀算經,因鸞所註,更加辨論也.隋書論審度,引孫子算術蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒,十秒爲豪,十豪爲釐,十釐爲分.本書乃作十忽爲一絲,十絲爲一豪.又論嘉量引孫子算術六粟爲圭,十圭爲秒,十秒爲撮,十撮爲勺,十勺爲合.本書乃作十圭爲一撮,十撮爲一秒,十秒爲一勺.考之夏侯陽算經引田曹倉曹亦如本書.而隋書中所引與史傳往往多合.蓋古書傳本不一,校訂之儒,各有據證,無妨參差互見也.唐之選舉,算學孫子,五曹共限一歲習肄.於後來諸算術中,特爲近古.第不知孫子何許人.朱彝尊曝書亭集:五曹算經跋云:相傳其法出於孫武,然孫子別有算經,考古者存其說可爾.又有孫子算經跋云:首言度量所起,合乎兵法.地生度,度生量,量生數之文.次言乘除之法,設爲之數.十三篇中所云廊地.分利,委積,遠輸,貴賤,兵役分數,比之九章方田,粟米,差分,商助,均輸,盈不足之目,往往相符,而要在得算多,多算勝,以是知此編非僞托也云云.合二跋觀之,彝尊之意,蓋以爲確出於孫武,今考書內設問有云長安洛陽相去九百里,又云佛書二十九章,章六十三字,則後漢明帝以後人語.春秋末人,安有是語乎?舊本久佚,今從永樂大典所載,裒集編次,仍爲三卷.其甄,李二家之註,則不可復考,是則姚廣孝等割裂刊削之過矣.

(19) 阮元疇人傳(1795—1799) 卷一末,孫子傳引:

孫子算經.

「論曰朱竹垞〔彝尊〕以孫子算經爲孫武作.戴東原〔震〕以書中有長安洛陽相去,及佛書二十九章語,斷爲漢明帝以後人,余考韋曜博弈論枯棊三百注引邯鄲淳藝經謂棊局十七道,而孫子乃云棊局十

九道,則其人當更在漢以後矣.然術數之書,類多附益.如卷末推孕婦所生男女,鄙陋荒誕,必非孫子正文.或恐傳習孫子者,轉展增加,失其本眞.今但題作孫子,不稱孫武,而附於周末,以志闕疑.其書詳說乘除開方,可以考見古人從橫布算之式.下卷物不知數,三三數之,五五數之,七七數之一問,爲九章所未及.宋秦道古數學九章大衍求一法,蓋出於此也.」

孫子算經卷上

「度之所起,起於忽.欲知其忽:蠶吐絲爲忽,十忽爲一絲,十絲爲一豪,十豪爲一氂,十氂爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引.五十尺爲一端,四十尺爲一疋,六尺爲一步,二百四十步爲一畝,三百步爲一里.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「度長短者,不失豪氂.」
廣韻卷一之第七絲字條引:「說文云蠶所吐也,又一蠶爲一忽,十忽爲絲.」又卷五,沒第十一忽字條註稱:「又一蠶爲一忽,十忽爲絲.」
隋書卷十六律歷志第十一審度條稱:「孫子算術云:蠶所生吐絲爲忽,十忽爲秒(?),十秒爲豪(?),十豪爲氂,十氂爲分.」
一切經音義卷二十五,涅槃經第四卷毫氂條註稱「按孫子算經:十忽爲一絲,十絲爲一毫,十毫爲一氂,十氂爲一分,十分爲一寸,十寸爲一尺,十尺爲一丈,十丈爲一引是.」
一切經音義卷一,大唐三藏聖教序注稱:「九章算經云:

凡度之法,初起於忽,十忽為絲,十絲為毫,十毫為釐,……」又卷四十一,大乘理趣六波羅蜜多經注稱:「九章算經云:凡度之始,初於忽,(十忽)為絲,十絲為毫,十毫為氂,…」.李籍九章算術音義,秒忽條注稱「忽者數之始也.一蠶所吐謂之忽.孫子算術云:蠶所生吐絲為忽,十忽為秒,十秒為豪,十豪為釐,十釐為分.」

儼按據廣韻及一切經音義可證隋書及九章算術音義引文之誤.

「稱之所起,起於黍,十黍為一絫,十絫為一銖,二十四銖為一兩,十六兩為一斤,三十斤為一鈞,四鈞為一石.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「權輕重者不失黍絫.」

一切經音義一百卷念佛三昧寶王論上卷,錙銖條註稱:「案孫子九章算經云:凡稱之所起,始於黍.十黍為一絫,十絫為一銖,六銖為一錙,錙卽分也,音汾問反.四分為一兩.十六兩為一斤.三十斤為鈞.四鈞為一石;卽一百二十斤也.謹檢諸字書説錙而有三別.案風俗通義云:銖六則錘,二錘則錙,二錙則兩,計此説則半兩名錙,二十四銖為一兩,唯此一書獨異於衆典.諸字書多同一説.謹案字林,字統,字鏡,韻集,韻略,韻譜,韻英,文字集略,文字典説,古今正字,及案説文,九章算經一十三家,並同以六銖為錙,卽四錙成兩也,鄭玄禮記以八兩為錙,集訓,韻銓效鄭生言八兩,未詳此義何所從來.今故疏出諸家異同,取捨任隨所見,今且謹依九章算及取多説,以六銖為錙定矣.風俗通義及以鄭玄未詳其由,莫測古人幽旨也.」

「量之所起,起於粟.六粟為一圭,十圭為一撮,十撮為

一抄,十抄爲一勺,十勺爲一合,十合爲一升,十升爲一㪷,十㪷爲一斛,斛得六千萬粟.所以得知者:六粟爲一圭,十圭六十粟爲一撮,十撮六百粟爲一抄,十抄六千粟爲一勺,十勺六萬粟爲一合,十合六十萬粟爲一升,十升六百萬粟爲一斗,十斗六千萬粟爲一斛,十斛六億粟,百斛六兆粟,千斛六京粟,萬斛六陔粟,十萬斛六秭粟,百萬斛六壤粟,千萬斛六溝粟,萬萬斛爲一億斛六澗粟,十億斛六正粟,百億斛六載粟.」

前漢書卷二十一上律歷志上:「量多少者不失圭撮.」
隋書卷十六律歷志第十一嘉量條稱:「孫子算術曰:六粟爲圭,十圭爲秒(?),十秒爲撮(?),十撮爲勺(?),十勺爲合.」
一切經音義卷二十五涅槃經第十卷注稱:「孫子算經云:

量之所起,初起於粟,六粟爲一圭,六十粟爲一撮,六百粟爲一抄,六千粟爲一勺,六萬粟爲一合,六十萬粟爲一升,六百萬粟爲一斗,六千萬粟爲一斛.……」

李籍九章算術音義程粟條註稱:「孫子算術曰:六粟爲圭,十圭爲抄,十抄爲撮,十撮爲勺,十勺爲合.」

嚴按前漢書以圭撮相連,一切經音義亦言六十粟爲一撮,可證隋書及九章算術音義引文之誤.

「凡大數之法,萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京,萬萬京曰陔,萬萬陔曰秭,萬萬秭曰壤,萬萬壤曰溝,萬萬溝曰澗,萬萬澗曰正,萬萬正曰載.」

通訓定聲引字林:「姟,大數也.」

陔通垓.淮南子:「期乎九陔之上,」謂九天之上也.按御覽引廣韻又作九垓,是其證也.

禮記內則降德於衆兆民疏:「算法:億之數有大小二法.小數以十爲等.十萬爲億.大數以萬爲等,萬萬爲億也.」

徐岳數術記遺:「黃帝爲法,數有十等,及其用也,乃有三焉.十等者:億,兆,京,垓,秭,壤,溝,澗,正,載.三等者,謂上中下也.其下數者,十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也.中數者,萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也.上數者,數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也.」甄鸞又於五經算術卷上稱鄭用下數,毛用中數.

廣韻卷第三秭條引風俗通云:「千生萬,萬生億,億生兆,兆生京,京生秭(?),秭生垓(?),垓生壤(?),壤生澗,澗生正,正生載.載地不能載也」.

一切經音義第二十七卷億載條註稱:「算經:黃帝爲法,有十等,謂億,兆,京,姟,壤(?),秭(?),溝,澗,正,載.及其用也,有三,謂上,中,下.下數十萬曰億,中數百萬曰億,上數萬萬曰億」.又第二十五卷百億閻浮條亦稱:「若依下數,十萬曰億,……若依上數,萬萬曰億.」此一說也.

一切經音義第二十二卷一百洛叉爲一俱胝條稱:「洛叉此云萬也,俱胝此云億也.又案此方黃帝算法總有二十三數,謂一二三四五六七八九十百千萬億兆京垓秭壤溝澗正載.從萬已去,有三等數法.其下十十變之,中者百百變之,上者倍變之,今此阿僧祇品中上數法,故云一百洛叉爲一俱胝當此億也,阿庾多兆也,那由他京也,餘皆依次準配可知.今案此經十,百,千,萬,十十變之,從萬至億,百倍變之,從億已去,皆以能數量爲一數,復數至與能數量等.」此又一說也.

續一切經音義卷二稱:「依此方孫子算經云:十十爲百,十百爲千,十千爲萬,自萬至億有三等,上中下數變

之也. 依黃帝算經總有二十三數,謂一二三四五六七八九十百千萬億兆京姟秭壤溝澗正載也,亦從萬已去,有三等數,謂其下者十十變之,中者百百變之,上者億億變之.」

清孫詒讓札迻卷十一稱:「太平御覽工藝部七引一行算法曰:萬萬穰爲載,數之極矣.或問之曰,何以數之爲載.按孫子算經云:古者積錢上至於天,天不能容,下至於地,地不能載.天不能蓋,地不能載,故名曰載.檢今本孫子算經無此語,疑傳錄失之.」 儼按見太平御覽卷第七百五十工藝部七數.

儼按孫子算經凡大數之法一節雖與今本數術記遺中數之法相同.但此節中多脫文,散見於太平御覽及續一切經音義.且與一切經音義所引中數,上數之法不合,原文似有竄改之處.

「黃金方寸重一斤.」

前漢書卷二十四下,食貨志第四下:「黃金方寸而重一斤.」

「凡算之法,先識其位.一從十橫,百立千僵,千十相望,萬百相當.」

「凡算之法,……六不積,五不隻.……」

夏侯陽算經曰:「夫乘除之法,先明九九.一從十橫,百立千僵;千十相望,萬百相當.滿六已上,五在上方.六不積聚,五不單張.」

儼按如孫子,夏侯陽之說,蓋謂:

	1 2 3 4 5 6 7 8 9
縱者爲	Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅲ Ⅲ Т Т Ⅲ Ⅲ
橫者爲	一 二 三 三 三 丄 丄 丄 丄

如有數 6728 則作 ⊥Τ=Ⅲ 是也. 據清馬昂貨布文字考卷四:「新莽泉布則作「T」爲六,更作「Π,Ⅲ,Ⅲ」爲七,八,九,亦滿六已上,五在上方,六不積聚,五不單張之義也.李儼另有籌算制度考一文載燕京學報第六期,第1129-1134頁民國十八年(1929)十二月.

「以粟求糲米三之五而一,

以糲米求粟五之三而一,

以糲米求飯五之二而一,

以粟米求糲飯六之四而一,

以糲飯求糲米二之五而一,

以䊪米求飯八之四而一.」

九章算術卷二今有題術曰:「以粟求糲米三之五而一.」又「以糲米求粟五之三而一」,又「以糲米求糲飯五之二而一,」又「以粟求糲飯三之二而一.」其粟米之法稱「䊪米二十四,(按孔刻本作三十四,茲據毛景本作二十四),䊪飯四十八」. 是以䊪米䊪飯八之四而一.故原文第三,四,六條應改正如下:

以糲米求糲飯五之二而一,

以粟求糲飯六之四而一,

以粟米求䊪飯八之四而一.

「九九八十一,自相乘,得幾何?

....

一一如一,自相乘得一,一乘不長.」

周髀算經:「商高曰 數之法,出於圓方.圓出於方,方出於

矩,矩出於九九八十一.」

前漢書卷六十七,列傳第三十七,梅福傳:「臣聞齊桓之時,有以九九見者」.唐顏師古注云:「九九算術若今九章五曹之輩.」

其在日本,口遊(970)一書中,九九亦始於九九,終於一一.拾芥抄書中之九九表亦然,蓋並受孫子算經之影響也.

... ...

... ...

孫子算經卷中

「今有粟一斗,問爲糲米幾何?

....

今有粟七斗九升,問爲御米幾何?」

此言粟率五十, 糲米率三十, 粺米率二十七,

　　繫米率二十四. 御米率二十一,

亦詩大雅鄭箋所云:「米之率:糲十,粺九,繫八,侍御七」之義也.

「今有屋基,南北三丈,東西六丈,欲以瓴砌之.......」

廣韻卷第二,瓴字註:「瓴瓦,古史考曰:烏曹作瓴.」

一切經音義第三十四卷金瓴條註「埤蒼云甎瓦也.經從石作磚俗字也.說文從瓦,專聲也.」又第五十三卷瓴土條註:「經文從土作塼,俗字非正也.」

「今有築城上廣二丈,下廣五丈四尺,高三丈八尺,長五千五百五十尺,秋程人功三百尺,問須功幾何?」

九章算術卷五商功:「今有穿渠上廣一丈八尺......秋程人功三百尺,問用徒幾何?」

巖按孫子算經所取,蓋九章法也.

… … … …

… … … …

孫子算經卷下

「今有甲乙丙丁戊己庚辛壬九家共輸租.甲出三十五斛,乙出四十六斛,……」

答曰:

甲二十八斛,

………………,

辛一百六十八,

壬二百六十斛.」

毛景本作:「辛一百六十八斛.」

晉書卷二十六,志第十六食貨稱:「咸和五年(330),(晉)成帝始度百姓田取十分之一率,畝稅米三升.……哀帝(362—365)即位,乃減田租,畝收二升.孝武太元二年(377),除度田收租之制,王公以下,口稅三斛.唯蠲在役之身.八年(383)又增稅米五石.」

「今有丁一千五百萬,出兵四十萬.問幾丁科一兵?」

隋書卷二十四,志第十九食貨稱:「(後周)武帝保定元年(561)改八丁兵爲十二丁兵,率歲一月役.建德二年改軍士爲侍官,募百姓充之.除其縣籍,是後夏人半爲兵矣.宣帝時發山東諸州,增一月功爲四十五日役」.「(隋)高祖登庸,……仍依周制,役丁爲十二番」.「開皇三年(593)……減十二番每歲爲二十日役.」

儼按以上爲周隋之間丁男科兵之制.

「今有佛書凡二十九章,章六十三字.問字幾何?」

魏書卷一百一十四,志第二十釋老十:「(後漢)明帝夜夢金人頂有白光.……(蔡)愔又得佛經四十二章.……愔之還也,以白馬負經,因立白馬寺於洛城雍關西.」戴震因以孫子算經更在明帝以後.

隋書卷三十五,志第三十,經籍四:「後漢明帝夜夢金人飛行殿庭,以問於朝,而傅毅以佛對.帝遣郎中蔡愔,及秦景使天竺求之,得佛經四十二章,及釋迦立像.並與沙門攝摩騰竺蘭東還.愔之來也,以白馬負經,因立白馬寺於洛陽雍門西以處之.」

「今有棊局方一十九道.問用棊幾何?」

文選卷五十二,韋弘嗣(曜)博弈論內:「枯棊三百孰與萬人之將,」李善註引:「邯鄲淳藝經謂棊局縱橫各一十七道,合二百八十九道,白黑棊子各一百五十枚.」阮元因以孫子算經更在漢以後.

「今有三萬六千四百五十四戶,戶輸綿二斤八兩.問計幾何?」

晉書卷二十六,志第十六食貨稱:「(晉武帝)平吳之後(按吳亡於太康元年280),又制戶調之式.丁男之戶,歲輸絹三匹,綿三斤.女及次丁男爲戶者半輸.其諸邊郡或三分之二,遠者三分之一.」

晉書卷三:「太康五年減天下戶課三分之一,六年減百姓綿絹三分之一.」通考,晉武帝置戶調之式,丁男之戶,歲輸絹三匹,綿三斤.

「今有貸與人絲五十七斤,限出歲息一十六斤.問斤息幾何?」

一切經音義第七十一卷子息條註「今人出錢生利亦曰息.」

「今有婦人河上蕩桮,津吏問曰:桮何以多.婦人曰:家有客.津吏曰:客幾何?婦人曰:二人共飯,三人共羹,四人共肉,凡用桮六十五.不知客幾何?」

張丘建算經序稱:「夏侯陽之方倉,孫子之蕩杯.」
張丘建算經卷下:「今有婦人於河上蕩杯,津吏問曰:杯何以多?婦人答曰:家中有客不知其數.但二人共醬,三人共羹,四人共飯,凡用杯六十五.問人幾何?」

巖按集韻桮或作𩞀,杯,盃,䍌,匼.

「今有黃金一斤直錢一十萬.問兩直幾何?」

....

前漢書卷二十四下:食貨志第四下:「黃金重一斤,直錢萬.」此漢法也.後此幣法紊亂,故黃金一斤直錢益多.
夏侯陽算經卷下:「今有金一斤直錢一百貫,問一兩幾何?」卽本孫子算經題問.

巖按元戴侗六書故謂「千錢爲一貫,」故孫子作一十萬,夏侯陽作一百貫也.

「今有錦一疋直錢一萬八千.問丈尺寸各直幾何?」

夏侯陽算經卷下:「今有錦一匹直錢一十八貫.問丈尺寸各得幾何?」亦本孫子算經題問.

「今有物不知其數,三三數之賸二,五五數之賸三,七七數之賸二,問物幾何?」

清黃宗憲求一術通解敍稱:「自孫子算經物不知數一題,有術無草,後人罕通其妙,遂無有論及者.宋秦氏道古

(九韶數書九章)以大衍釋之,其法始顯.」
日本塵劫記(1627)稱此爲「百五減之事.」
大衍求一術與孫子算經物不知數題問之關係,參觀李儼,大衍求一術之過去與未來,學藝雜誌第七卷第二號第1—45頁,民國十四年(1925)九月,上海.

「今有甲乙二人持錢各不知數.甲得乙中半,可滿四十八.乙得大半,亦滿四十八.問甲乙二人元持各幾何?」

答曰:

甲持錢三十六. 乙持錢二十四.

術曰:如方程求之……」

九章算術卷八方程:「今有甲乙二人持錢不知其數,甲得乙半而錢五十,乙得甲太半,而半錢五十.問甲乙持錢各幾何?

答曰: 甲持三十七錢半. 乙持二十五錢. 術曰:如方程損益之,…….」

儼按孫子算經所取,蓋九章舊術.朱彝尊僅言:「比之九章:方田,粟米,差分,商功,均輸,盈不足之目,往往相符.」尙未題及孫子中尙有九章方程題問,如上所記也.

「今有百鹿入城,家取一鹿不盡,又三家共一鹿適盡,問城中家幾何?

答曰:七十五家.

術曰:以盈不足取之.假令七十二家,鹿盈四.令之九十家,鹿不足二十.置七十二於右,上盈四於右

下,置九十於左上,不足二十於左下.維乘之,所得並爲實,幷盈,不足,爲法,除之卽得.」

九章算術卷七,盈不足:「今有米十斗,桶中不知其數,滿中添粟而舂之,得米七斗.問米幾何. 答曰: 二斗五升.術曰: 以盈不足術求之,假令故米二斗不足二升,令之三斗有餘二升.」與孫子算經題問相類.

日本澤田吾一於日本術學史講話第三百二十六頁稱假定一數,以解其數,爲該國「綴術」算法之由來.

「今有雉兎同籠,上有三十五頭,下有九十四足.問雉兎各幾何?」

此爲日本鶴龜問題之起原.

「今有長安洛陽相去九百里,…….」

前漢書卷二十八上,地理志第八上:「京兆尹……縣十二:長安…….河南郡……縣二十二:雒陽,…….」〔……王莽曰宜陽.師古曰:魚豢云漢火德忌水,故去洛水而加隹.如魚氏說,則光武以後改爲雒字也.〕

魏書卷一百六下,志第七,地形二下:「京兆郡領縣八,長安……」,又卷一百六中,志第六,地形二中「洛陽郡領縣二……洛陽.」資治通鑑卷六十九魏紀一:「黃初元年十二月初營洛陽宮,戊午帝如洛陽.」

元胡三省註引:「魏略曰:漢火行也,火忌水,故洛去水而加隹.魏於行次爲土,土水之牡也,水得土而流,土得水而柔,故除隹加水,變雒爲洛.」

鏗按戴震以:「書內設問.有云長安洛陽相去九百里,又云佛書二十九章,章六十三字,則後漢明帝以後人語」.惟此長安洛陽或爲魏地.

「今有出門望見九隄,隄有九木,木有九枝,枝有九巢,

巢有九禽,禽有九雛,雛有九毛,毛有九色,問各幾何?」

日本塵劫記(1627)之鼠算,亦有此相類之連乘數問題.其在西洋,則有

As I was going to St. Ives,
I met seven wives,
Every wife had seven sacks,
Every sack had seven cats,
Every cat had seven kits:
kits, cats, sacks, and wives
How many were going to St. Ives?

一題,見 F. Cajori, *A History of Elementary Mathematics*, p. 222, 1917, New York,及小倉金之助,井出彌門譯註增補 *F. Cajori* 初等數學史 P. 345, 1928,東京.

「今有孕婦行年二十九,難九月.未知所生.」

答曰:生男.

術曰:置四十九,加難月,減行年.所餘以天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七,八風除八,九州除九.其不盡者,奇則爲男,耦則爲女.

明程大位算法統宗卷十二:「孕推男女法歌曰:四十九數加孕月,減行年數定無疑.一除至九多餘數,逢雙是女單是男.今有孕婦年二十八歲,八月有孕.問所生男女?

答曰:生男.

法曰:置四十九,加孕月八,共五十七,減年二十八,餘二十九.減天除一,地除二,人除三,四時除四,五行除五,六律除六,七星除七.不盡奇爲男,偶爲女也. 一三五七九皆奇. 二四六八十皆偶. 如數多,再以八風除八」.此亦本孫子算經之說也.

日本口遊(970)亦有算產婦知男女法,及病者知死生題問,如:

產婦. 令姙婦可生子知男女法.

術曰:置婦女年數(自生年至姙年)加十二神爲實.可除天地二,人三,四時,五行,六律,七星,八風,九宮,殘一三五七(爲陽男也),二四六八(爲陰女也),一說以九除也.(今案同法也.)

口傳曰:若自去年姙者,可加空算三,加婦女之年也.

病者. 有病者不知死生.

曰:置九九八十一,加十二神,得九十三,更加病者年數,幷得□以三除之.若有不盡者,男死女不死;若無不盡者,女死男生云云.

嚴按口遊算產婦知男女法,顯然是受孫子算經之影響.

籌算制度考

古人算數用籌,但其名稱不一,大約策爲最先之名,而算子爲後來通俗之稱.其間又有算,籌,籌算,籌策,算籌諸異名,今分述於下:

(1)策. 後漢書卷六十上,馬融傳稱:「融……元初二年(115)上廣成頌.……隸首策亂,陳子籌昏.」唐李賢註稱:「陳子,陳平,善於籌策者也.昏,亂也.言禽獸多不可算計.」此言隸首用策,陳平用籌,蓋已認策先於籌.唐慧琳,一切經音義十三卷,引顧野王字書:「策,籌也.」又十八卷:「策,或作筴.聲類:筴,籌也.鄭玄云:箸也.筴,亦算也.方言(二):燕北,朝鮮,烈水之間,謂木細枝爲策.」觀方言所載,則策爲細木枝,初不加人工製作者.

(2)算. 說文竹部:「筭(同算)長六寸,計曆數者,從竹,從弄.言常弄乃不誤也.」清張文虎舒藝室隨筆卷二,謂:「筭字有從王之義,非從弄也.常弄之說,恐又後人所增」.但唐慧琳一切經音義九卷亦言:

(筭)字從竹,從弄.言常弄不誤也,」則從弄之義,由來已久.算之名稱,屢見於古算書.如九章算術卷四:開方術曰:置積爲實,借一算步之,超一等.又開立方術曰:置積爲實,借一算步之,超二等.孫子算經卷中問爲方幾何?術曰:置積……爲實,次借一算,爲下法,步之,超一位至百而止.是也.其他載記,至宋尚存此稱.如顧氏文房小說本,宋張耒,明道雜誌稱:「衞朴……每算曆,布算滿按,以手略撫之.人有竊取一算,再撫之卽覺,」又資治通鑑卷一百二十八,唐紀,懿宗皇帝三:「吏執筆握算,入人室廬計其數.」

明陳耀文天中記卷四十一引異苑,稱:

「越王餘算,——晉安有越王餘算策長尺許,白者似骨,黑者似角.云越王行海作算,有餘算棄之於水生焉.」

(3)籌. 淮南子云:「籌,策也」.鄭注禮記云:「籌,算也.」文選卷十一,何晏景陽殿賦:「叢集委積,焉可殫籌,」又卷三十四,枚乘七發:「孔老覽觀,孟子持籌而算之.」徐鍇,說文繫傳曰:籌,其制似箸,人以之算數也.」

(4)籌算. 廣韻:「籌,籌算.」前漢書:「(桑)弘羊……

有心計」,(顏)師古(註)曰:「不用籌算.」

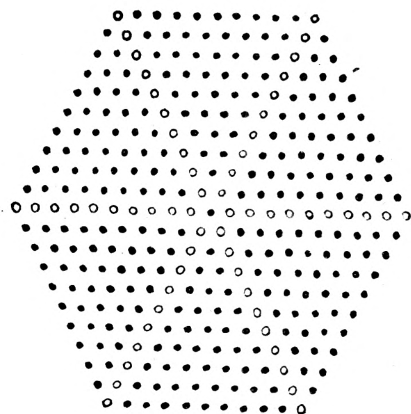
(5)籌策. 太平御覽引老子曰:善計者,不用籌策.」顧野王字書曰:「籌策所以計算也.」唐李賢註後漢書稱:「陳平善於籌策者也.」

(6)算籌. 述異記:「成公輿眞人假爲貨客,誤觸算籌,其算乃合.」邵氏聞見後錄(1157)卷二十七:「有中官取以作算籌,(張)浮休亦得一二.」輟耕錄稱:「苟用算籌亦可」.

(7)算子. 宋薛居正舊五代史卷一〇七,漢書第九,列傳四,王章:宋歐陽修新五代史卷三〇,漢臣傳第一八,王章;宋陳世崇隨隱漫錄卷一,幷云:「此輩與一把算子,未知顚倒,…………」.宋羅大經鶴林玉露天集(1248)卷二「算子」條,稱:「五代史……算子本俗語,…… 温公通鑑改作授之握算,不知縱横,不如歐史矣」. 清梅文鼎古算器考引浦江吳氏中饋錄有:「切肉長三寸,各如算子樣」之語.

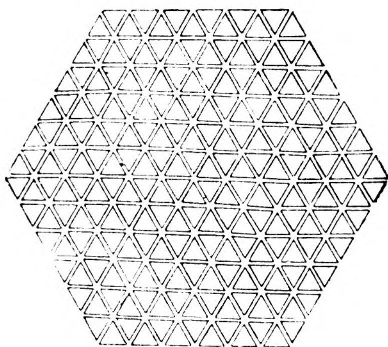
至其形式,則方言謂:「木細枝爲策」.說文竹部曰:「算長六寸,計曆數者」.前漢書律曆志曰:「其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七十一枚,而成六觚爲一握,」

此稱徑一分,乃係圓形之物,如第一圖.

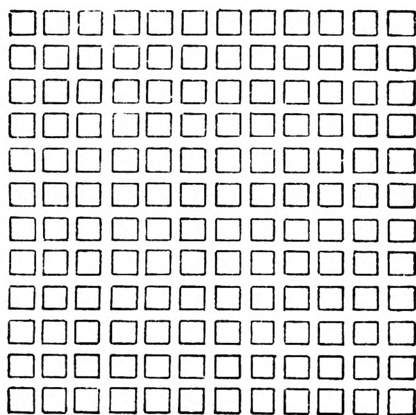


第一圖

其後北周甄鸞註數術記遺稱:「積算,今之常算者也.以竹爲之.長四寸,以效四時;方三分以象三才.」此時已由細木枝,或圓形之物,進而爲有規則之四方形矣隋書律曆志曰:「其算用竹,廣二分,長三寸.正策三廉,積二百一十六枚,成六觚,乾之策也.負策四廉,積一百四十四枚,成方,坤之策也.觚,方皆徑十二,天地之數也.」此蓋將籌分爲正負二種;負者爲四方形,正者爲三角形,如第二圖及第三圖.



第二圖



第三圖

論其長短,則於上記之外,清梅文鼎古算器考引浦江吳氏中饋錄有:「切肉長三寸,各如算子樣」之語.其數目,雖漢書,隋書各有定數,後來卻以「一把」,「盈

握」,爲度.舊五代史,新五代史,及隨隱漫錄幷稱「一把算子」,司馬温公改爲「握算」,尙爲羅大經所譏.元陶宗儀輟耕錄,九姑玄女課條,稱:其法折草一把,不計草數多寡,苟用筭籌亦可.」

其分別正負,亦有用赤黑色者.如魏劉徽註九章算術稱:「正算赤,負算黑.」又夢溪筆談卷八稱:「算法用赤籌,黑籌,以別正負之數」是也.清李銳於知不足齋叢書本益古演段卷上稱:「秦道古(九韶)數學九章卷四上開方圖,負算畫黑,正算畫朱,」蓋李氏所見本如此,今所傳宜稼堂叢書刻本,已無朱黑之別.至宋人楊輝,則以斜畫爲負,頗爲後人所沿用.

其器初用竹,如策,筭,籌,幷從竹是也.亦有用木者方言釋策爲木細枝,卽其例也.其後有用鐵,用牙,用玉者. Terrien de Lacouperie 考證舊文,以爲後魏世宗(500-516)已有鑄鐵爲籌之舉.(1)施耐庵水滸傳亦言及鐵算子.用玉之例亦一見於宋人筆記.如邵博邵氏聞見後錄第二十七,第一條,稱:「張浮休云盜夜發咸

(1) *A. Terrien de Lacouperie, The old Numerals, the Counting Rod and the Swan-pan in China, Numismatic Chronicle,* III (3), pp. 34-36, *reprinted in London in* 1888.

陽原上古墓,有火光出,用劍擊之,鏗然以墜.視之白玉廉也.豈至寶久埋欲飛去邪?既擊碎之.有中官取以作算籌.浮休亦得一二.」至用牙之例,則:世說言王戎持牙籌會計.唐語林卷六言王戎牙籌.資治通鑑卷八十二,晉紀,孝惠皇帝:「元康七年(297)七月以尚書右僕射王戎爲司徒,……每自執牙籌,晝夜會計,常若不足.」又新編五代史(晉史)平話目錄有:「契丹主牙籌計景延廣罪」亦一例也.

至籌算縱橫之則,與其計算之方,說詳李儼中國數學大綱上册,此不贅述.

其盛算之器,謂之算袋.唐段成式酉陽雜俎前集,卷十七,烏賊條,稱:「海人言:昔秦王東遊棄算袋於海,化爲此魚,形如算袋,兩帶極長.」至今尙存此稱,如淸周亮工閩小記卷下謂:「墨魚一名算袋魚」是也.唐時官吏有佩算袋者.舊唐書上元元年(674)制一品以下,文官幷帶手巾算袋.景雲二年(711)又令內外官依上元元年,九品以上文武官咸帶手巾算袋.開元二年(714)幷停京官所帶跨巾算袋.(見舊唐書卷五,卷七,卷八,及卷四十五).新唐書稱:初職事官一品以下,則有手巾,算袋,佩刀,礪石.至睿宗(685—689)時,罷佩刀,礪石(見

新唐書卷二,志第十四,車服志). 按唐顏師古註前漢書外戚傳第六十七下,「盛綠綈方底.」句,稱:「綈,厚繒也,綠其色也.方底盛書,囊形.若今之算幐耳」. 說文:幐,囊也.廣韻:幐,囊屬.師古所謂算幐,卽算袋也.至宋尙存此稱.如宋劉延世孫公談圃卷下(1101)兩言「算袋」是也.宋時尙有一種算子筒,想亦爲留置算子之具.永樂大典卷七六〇三本,西湖老人繁勝錄載:「京都有四百十四行,略而言之,閙慢道業,……算子筒」是也.

算籌亦有時與他物通用.禮記投壺曰:算尺有二寸.說文繫傳竹部曰:籌,壺矢也.從竹,壽聲.臣(徐)鍇曰:投壺之矢也.其制似箸;人以之算數也.是以籌爲壺矢矣.史記云:「借箸爲大王籌之」.是以籌爲箸矣.後漢書胡廣傳,稱:「順帝欲立皇后,而貴人有寵者四人,莫知所建,議欲探籌,以神定選,廣與尙書郭虔,史敞上疏諫曰:竊見詔書,以立后事大,謙不自專,欲假之籌策決疑靈神.篇籍所記,祖宗典故,未嘗有也.……」至宋元以後亦以算子爲算命之需,如水滸所謂鐵算子是也.

珠算制度考

(一)

珠算起於何時,說者不一.清梅文鼎(1633－1721)[1]曆算全書內古算器考,以爲:

「古書散亡,苦無明據.若以愚度之,亦起於明初年,何以知之?曰:歸除歌括,最爲簡妙,此珠盤所恃以行也.然九章比類所載,句長而澀,蓋卽是時所創.後人踵事增華,乃更簡快矣.是書爲錢塘吳信民作.其年月可考而知,則珠盤之來,固自不遠.

按欽天盤曆科所傳通軌.凡乘除皆有定子之法,惟珠算則可用.然則珠算卽起其時.又嘗見他書,元統造大統曆訪求得郭伯玉善算,以佐成之.卽郭太史之裔也.然則珠盤之法,蓋卽伯玉等所製,亦未可定.」[2]

(1) 梅文鼎爲清初中算家,其詳細事績,見李儼梅文鼎年譜,清華學報二卷二期, pp. 609-634, 十四年(1925)十二月,北平.

(2) 見兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書:古算衍略內古算器考,第3頁.雍正癸卯(1723)魏荔彤纂刻本.

清錢大昕十駕齋養新錄算盤條,以爲:

「古人布算以籌.今用算盤,以木爲珠,不知何人所造,亦未審起於何代.按陶南村輟耕錄(1366)有走盤珠,算盤珠之喩.則元代已有之矣.」[3]

輟耕錄稱:

「凡納婢僕,初來時,曰擂盤珠,言不撥自動.稍久曰算盤珠,言撥之則動.既久曰佛頂珠,言終日凝然,雖撥亦不動.」

(二)

據梅文鼎之意,以爲「歸除歌括,最爲簡妙,此珠盤所持以行也.」考歸除歌括,始載於宋,楊輝乘除通變算寶卷中(1274)又見於元,朱世傑算學啓蒙(1299),惟楊輝及朱世傑并用籌算說明,至明景泰元年(1450)吳敬信民九章詳註比類算法大全,及明萬曆癸巳(1593)[4]程大位汝思新編直編算法統宗始明載算盤,

(3) 見十駕齋養新錄卷十七,第3頁,坊刻本.

(4) 李儼所藏明刻本及康熙丙申(1716)曾孫程光紳翻刻本算法統宗十七卷本并作萬曆壬辰(1592)撰.日本現藏延寶四年(1676)翻刻本亦稱程大位萬曆壬辰作,翌年序.見日本三上義夫,第三回總會ニ陳列ヤル和算書解題,日本中等教育數學會雜誌第四卷第一號拔刷.

後書兼及圖式,今分述之:

宋楊輝著乘除通變算寶卷中(1274)載:

「〔九歸新括〕以古句今注兩存之.

歸除求成十.

〔九歸〕遇九成十.　〔八歸〕遇八成十.

〔七歸〕遇七成十.　〔六歸〕遇六成十.

〔五歸〕遇五成十.　〔四歸〕遇四成十.

〔三歸〕遇三成十.　〔二歸〕遇二成十.

歸除自上加.

〔九歸〕見一下一,見二下二,見三下三,見四下四.

〔八歸〕見一下加二,見二下四,見三下六

〔七歸〕見一下三,見二下加六,見三下十二卽九.

〔六歸〕見一下四,見二下十二卽八.

〔五歸〕見一作二,見二作四.

〔四歸〕見一下十二卽六.

〔三歸〕見一下二十一卽七.

半而爲五計.

〔九歸〕見四五作五.　〔八歸〕見四作五.

〔七歸〕見三五作五. 〔六歸〕見三作五.

〔五歸〕見二五作五. 〔四歸〕見二作五.

〔三歸〕見一五作五. 〔二歸〕見一作五.

定位退無差.

商除於斗上定石者,今石上定斗.

商除於人上得文者,今人上定十.」(5)

元朱世傑著算學啓蒙總括(1299)載:

「〔一歸〕一歸如一進, 見一進成十.

〔二歸〕二一添作五, 逢二進成十.

〔三歸〕三一三十一, 三二六十二, 逢三進成十.

〔四歸〕四一二十二, 四二添作五, 四三七十二, 逢四進成十.

〔五歸〕五歸添一倍, 逢五進成十.

〔六歸〕六一下加四, 六二三十二, 六三添作五 六四六十四, 六五八十二, 逢六進成十.

〔七歸〕七一下加三, 七二下加六, 七三四十二 七四五十五, 七五七十一, 七六八十四, 逢七進成十.

(5) 見宜稼堂叢書本乘除通變算寶卷中第9頁,并據北平圖書館藏朝鮮刻本,及日本寛文十年關孝和傳寫本校.

〔八歸〕 八一下加二, 八二下加四, 八三下加六, 八四添作五, 八五六十二, 八六七十四, 八七八十六, 逢八進成十.

〔九歸〕 九歸隨身下, 逢九進成十」.[6]

朱世傑算學啓蒙未嘗明著撞歸起一歌訣,但於卷上「九歸除法門」,稱:

「實少法多從法歸, 實多滿法進前居,
常存除數專心記, 法實相停九十餘,
但遇無除還頭位, 然將釋九數呼除,
流傳故泄眞消息 求一穿韜總不如.」

日本建部賢弘(1664—1739)算學啓蒙諺解卷上,以爲:第四句「法實相停九十餘」,卽撞歸法之「一歸見一無除作九一,……」,第五句「但遇無除還頭位,」卽起一法之「一歸起一下還一,…….」并於該書卷上,九歸除法門第十一問應用「見四無除作九四」演草.[7]

其明著「撞歸」,「起一」歌訣者,有元賈亨,[8]丁巨,

(6) 見觀我生室彙編本(1839)算學啓蒙,并據日人建部賢弘算學啓蒙諺解校.

(7) 見建部賢弘算學啓蒙諺解卷上本,第 17,18 及第 22 頁,元祿三年庚午日本維陽書肆刻本.

(8) 淸學部圖書館善本書目,因算法全能集書中說錠,說鈔,定爲元時書.

安止齋等.賈亨字季通長沙人.永樂大典作賈通著算法全能集,刻本作二卷,也是園書目作六卷,疑誤.丁巨著丁巨算法八卷,有至正十五年(1355)自序,知不足齋叢書所收不足一卷,今殘本永樂大典卷一六三四三迄一六三四四又收有「異乘同除」,及「少廣」題問,安止齋何平子著詳明算法上下二卷,其算題之見於諸家算法序記,及永樂大典殘本者,與賈亨算法全能集完全一致,疑詳明算法出於賈亨.其書在明尚有傳本.明楊士奇文淵閣書目,晁瑮晁氏寶文堂書目葉盛菉竹堂書目并載有詳明算法.

元賈亨算法全能集歸除歌曰:「惟有歸除法更奇,將身歸了次除之,有歸若是無除數,起一回將原數施,或值本歸歸不得,"撞歸"之法莫教遲,若還識得中間法,算者并無差一釐」法:「〔謂四歸見四,本作一十,然下位無除,不以爲十,以四撞身爲九十四,則下位有數除也,故謂之"撞歸".惟此法內用之,餘倣此.」

「二歸爲九十二, 三歸爲九十三,
四歸爲九十四, 五歸爲九十五,
六歸爲九十六, 七歸爲九十七,
八歸爲九十八, 九歸爲九十九.」

元丁巨算法(1355)「今有子粒折收」題云:「此重法也;去租破錠,歸除,減除,皆有之,……"撞歸"九十三,…….」

元安止齋詳明算法序稱:「夫學者初學因歸,則口授心會,至於"撞歸","起一"時有差謬,……」. 按此則"撞歸"之說,至元代始大著也.[9]

今錄丁巨算法(1355)題問,以見"撞歸"法之應用.

「今有子粒折收輕賫,[10]每石正價三兩五錢,分例耗穀,[11]三升五合,今欲先起解鈔一百錠,[12]內除帶解租鈔二錠一兩四分八釐三毫五絲,問該正耗分例各若干?

答曰:鈔一百錠,子粒正耗分例穀一千三百九十九石六斗七升一合九勺…….」

其歸除次序,與珠算完全一致.[13]如上題489885165÷35

(9) 見元賈亨算法全能集,元刻本;丁巨算法,知不足齋叢書本;諸家算法序記,鈔本;永樂大典卷 16343—16344, 影攝本.

(10) 元史卷九三,食貨志第四二「稅糧」條,作「折輸輕賫」或「折納輕賫」.

(11) 元史卷九三,作「鼠耗,分例」.

(12) 一錠爲五十兩.

(13) 其詳參看李儼中國數學大綱上册.第 216—219 頁,民國二十年(1931),上海.

=139,96719.可列式如下:

4898,85165	35
118	
139	
349	
348	
978	
338	
968	
235	
655	
251	
671	
711	
66	
136	
315	
945	
900	

入明而有吳敬.其所著九章詳註比類算法大全(1450)卷首,乘除開方起例內,稱:

「九歸歌法

一歸　無法定身除;

二歸　二一添作五，見二進一十，見四進二十，見六進三十，見八進四十；

三歸　三一三十一，三二六十二，見三進一十，見六進二十，見九進三十；

四歸　四一二十二，四二添作五，四三七十二，見四進一十，見八進二十；

五歸　就身加一倍，見五進一十；

六歸　六一下加四，六二三十二，六三添作五，六四六十四，六五八十二，見六進一十；

七歸　七一下加三，七二下加六，七三四十二，七四五十五，七五七十一，七六八十四，見七進一十；

八歸　八一下加二，八二下加四，八三下加六，八四添作五，八五六十二，八六七十四，八七八十六，見八進一十；

九歸　下位加一倍，見九進一十.

撞歸法　謂如四歸見四,本作一十,然下位無除,不進爲十,以四添五,作九十,更於下位添四,其下位有四除也.又無除卽於九十內除一十,卻於下位又添四,故謂之撞歸,惟此

法內用.

二歸爲九十二,無除減一下還二;

三歸爲九十三,無除減一下還三;

四歸爲九十四,無除減一下還四;

……………………,……………………,

九歸爲九十九,無除減一下還九.

歸法歌　九歸之法乃分平　湊數從來有見成

數若有多歸作十,　歸如不盡搀添行.

歸除歌　惟有歸除法更奇,　將身歸了次除之,

有歸若是無除數,　起一還將原數施,

或遇本歸歸不得,　撞歸之法莫教遲,

若人識得中間意,　算學雖深可盡知」.(14)

吳敬(1450)雖亦以籌算舉例,但於原書起例,河圖書數註,稱:

「不用算盤,至無差誤」.(15)

又於河圖書數歌訣,稱:

---

(14) 見吳敬九章詳註比類算法大全起例第 10,11,12,15,16 頁,明刻本.一二八事變前原書藏上海商務印書館附設東方圖書館內,李儼曾影攝一部.

(15) 見前書第 26 頁.

「免用算盤幷算子，乘除加減不爲難」.[16]

明程大位新編直指算法統宗卷十二,河圖縱橫圖內亦引此文.程氏又於同卷寫算,及一筆錦條於內,幷稱:

「不用算盤數可知.」

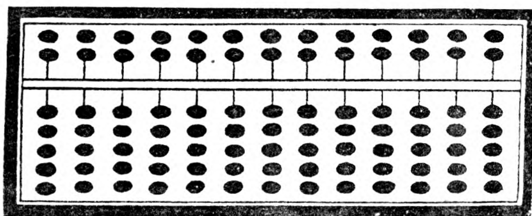
似吳敬(1450)及程大位(1593)所稱算盤,同爲一物.故梅文鼎以爲「是(九章比類)書爲錢塘吳(敬)信民作,其年月可考而知,則珠盤之來,固自不遠.」

其在吳敬(1450)及程大位(1593)間,記;

初定算盤圖式,

九九上進下退法語圖式,

九因九歸重演法語圖式者,有明柯尙遷數學通軌(1578)一書,其初定算盤圖式爲十三位算盤,如第一圖.



第一圖

同時朱載堉(1536—1595?)所著算學新說(1603年刻)中稱:「凡學開方,須造大算盤,長九九八十一位,共五百

(16) 見前書第26頁.

六十七子,方可算也.不然只用尋常算盤四五個接連在一處,算之,亦無不可也.其算盤梁上帖紙一長條,上寫第一位,第二位等項字樣,使初學易曉也.」(17) 似此則當時尋常算盤,爲十一位或十三位算盤,并如今制梁上二珠,梁下五珠也.

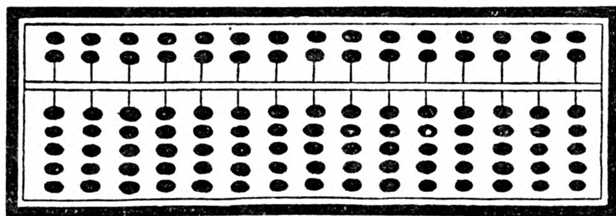


明刻本算法統宗師生問難圖.
原書藏日本早稻田大學.

而該書師生問難圖,則爲十一位.

(17) 李儼藏有明刻本算學新說一冊,書末題:「萬曆三十一年(1603)八月初三日刻完」.

程大位算法統宗(1593)初學盤式爲十五位如第二圖.



第二圖

柯尙遷著書未引入阮元(1764—1849)疇人傳(1795)按同治己巳(1869)重修本長樂縣志卷十一下選舉下第五頁,稱:

「柯尙遷柯時偕弟,下嶼人.嘉靖二十八年(1549)貢生,邢臺縣丞.」

又於同書卷十八藝文,第三頁,稱:

「明柯尙遷周禮全經釋原十二卷,又附錄十二卷,曲禮全經十五卷.案舊志作三禮全經亦無卷數,今從續通志.」

現在日本三重縣宇治山田市之神宮文庫藏有明萬曆六年(1578)長樂柯尙遷曲禮外集補學禮六藝附錄數學通軌集之十五,一册,卷末記,稱:

「天明四年(1784)甲辰八月吉旦奉納皇太神宮

林崎文庫以期不朽,京都勤思堂村井,古巖,敬義拜.」

原書自序,稱:

『近有青陽盧氏算法解發明諸法,近而易知,』(18)

算法解一書,不見於各家藏書目,未知成於何時,書中曾記算盤圖式否?

其在程大位(1593)略後言及算盤者,朱載堉算學新說(1603 年刻)之外有黃龍吟算法指南二卷,與治生要覽同刻成三册,末有

「萬曆甲辰(1604)季夏月吉梓行」

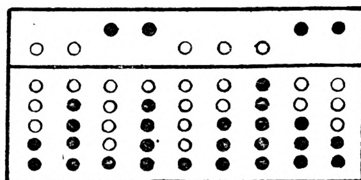
字樣.黃龍吟號嘘雲,新都高源里人.黃書詳載算盤法式,其卷上,稱:

「夫算盤每行七珠,中隔一梁.上梁二珠,每一珠當下梁五珠也.下梁五珠,一珠只是一數.算盤放於人之位次,分其左右,上下.右位爲前,左位爲後;前位爲上,後位爲下.凡前位一珠,當後位十珠.故云逢幾還十,退十還幾之說.上法,退法,九歸,歸除,皆從右起;因法,乘法,俱從左起.」(19)

(18) 李儼藏有傳鈔本數學通軌一册.

(19) 見黃龍吟算法指南卷上第1頁,萬曆甲辰(1604)刻本.李儼藏有黃龍吟算法指南二卷井治生要覽合訂三册,明刻本.

但書中說明時梁上僅具一珠,幷分陰陽珠,如864197523黃書作圖如第三圖.



第三圖

柯尚遷(1578)及程大位(1593)九歸及撞歸歌訣,幾全相類,今錄出以爲比較.就中柯尚遷所引「九歸總歌法語」,「撞歸法語」,「還原法語」,又與吳敬(1450)所引相同.

柯尚遷(1578)

「九歸總歌法語」

「一歸　無法定身除,　又曰:　一歸不須歸,
　　　其法故不立.

二歸　二一添作五,　逢二進一十,　……………
　　　………………　…………………

九歸　下位加下倍,　逢九進一十.」[20]

「撞歸法語」

(20)　「逢二進一十……」,吳敬(1450)作:「見二進一十,……」,餘倣此.

「一歸　見一無除作九一,　………………

九歸　見九無除作九九.

或一歸有歸無除亦作九一, 二歸有歸無除,亦作九二,餘倣此.」

「還原法語」

「一歸　已歸無除起一還一.　………………

九歸　已歸無除起一還一.

俱出歸內,起一於次位,或還一,或還二,或還三.」

程大位(1593)

「九歸歌」

「一歸　不須歸一者原數,不必歸也.其法故不立.

二歸　二一添作五,逢二進一十;

三歸　三一三十一, 三二六十二, 逢三進一十.

……　………………, ………………, ………………,

九歸　九歸隨身下,逢九進一十.」(21)

「撞歸法」

「一歸　見一無除作九一,　………………

九歸　見九無除作九九.」

(21) 程大位(1593)將吳敬(1450),「見幾進一十」,或柯尙遷(1578),「逢幾進一十」以下各句省去.

「已有歸而無除,用起一還原法,卽是起一還將原數施.

一歸　起一下還一.　本位起一,下位還一.

二歸　起一下還二.　本位起一,下位還二.

……　…………………　…………………,……………,

九歸　起一下還九.　本位起一,下位還九.」

明李光裕積玉全書,及徐企龍萬寶全書亦引述算盤圖式.(22)

由此得一結論.卽歸除歌訣,防自宋楊輝(1274)著書,元朱世傑(1299)因之.撞歸,起一之說,見於元賈亨,丁巨(1355),安止齋各家著書.算盤二字始爲明吳敬(1450)所用.而算盤圖式則載於柯尙遷(1578)程大位(1593)黃龍吟(1604)著書,此其大較也.

(三)

珠算之名,始見於漢徐岳數術記遺,數術記遺稱:

「珠算:控帶四時,經緯三才.」

北周甄鸞於此條註,稱:

「刻板爲三分.其上下二分,以停游珠.中間一分以

(22) 見高井計之助算盤雜話,東京講演同好會會報,講演集No. 267號,第19頁,昭和六年(1931)第廿八輯,東京.

定算位.位各五珠.上一珠與下四珠色別.其上別色之珠當(五).其下四珠,珠各當一.…………」[23]

但徐岳數術記遺所稱之珠算,非卽柯尚遷所示之算盤.因柯書明記「初定算盤圖式,」則其時上距發明,自尚不遠.而徐岳數術記遺所載,或僅與西洋人所用者相類.[24]

其次則宋謝察微算經,稱:

「中: 算盤之中, 上: 脊梁之上,又加之左,

下: 脊梁之下,又位之右, 脊: 盤中橫梁隔木.」

後此程大位曾引入算法統宗卷一,用字凡例內.所謂脊梁惟算盤有之.按謝察微算經,新唐書宋史均作二卷,今已不全.無從考訂是否爲宋人遺箸.說郛,唐宋叢書并作周髀算經,未審何故?

復次則十七卷本程大位算法統宗卷十七,稱:

「元豐(1078—1085)紹興(1131—1162)淳熙(1174—

(23) 上文括弧內(五)字原缺.由日,三上義夫校出.見三上義夫,支那數學之特色,東洋學報第十六卷第一號 p. 81,拔刷.又三上義夫日本數學史論,史苑第三卷, pp. 73—74 拔刷.

(24) 關於西洋人所用算盤事實,參看 *F. Cajori: A History of Elementary Mathematics* 1917. *New York. Abacus* 條.或小倉金之助譯註增補 *Cajori* 初等數學史,日文本,1928,東京.

1189)以來,刋刻算書,有盤珠集,元盤集.」

惟盤珠集,元盤集,是否卽爲論述算盤之書,亦不可知.錢大昕則因元陶宗儀輟耕錄(1366)有走盤珠,算盤珠之喻,以爲元代已有算盤.總之,此項算器,明初已見流行,則無疑義.清初亦稱「珠盤」,如梅文鼎在古算器考屢稱珠盤,聊齋志異(1679)卷十一「愛奴」附條,有珠盤及撥盤等語,是也.

(四)

日本亦有算盤,相傳明末日人毛利重能奉豐臣秀吉之命,來華學算,攜程大位算法統宗而歸.著歸除濫觴二卷,教授國人.但其事眞僞未可知.[25]現在日本前田侯爵家藏一算盤爲伊勢國山田前田利家遺物.曾攜往肥前名護屋陣中.算盤匣蓋裏有:

「文安元子年」

字樣,按文安元年甲子,當明正統九年 (1444),[26]此盤

(25) 參看遠藤利貞遺著增補日本數學史 *Smith and Mikami—A History of Japanese Mathematics*. pp. 32—36. 1914. *Chicago*.

(26) 參看:三上義夫:支那數學之特色,東洋學報第六卷,第一號, p. 83, 拔刷.

三上義夫:日本數學發達之由來,史學雜誌第二十九編,第三號, p. 4, 拔刷.

三上義夫:日本數學史論,史苑第三卷, p. 75, 拔刷

算珠略帶圓形,其製作年代,尙待再考,如確爲當時遺物,則算盤由華傳日已在吳敬 (1450), 柯尙遷 (1578) 之前.而算盤行世,又更遠矣.算盤傳入日本,甚見流行,日本近江之大津地方,於慶長年中,曾廣事製造算盤.十六世紀初年歐人所編辭書有 Soroban (十露盤) 之語,明末華人遊日所著「日本風土記」謂算盤日人稱爲所六盤.(27)

至雍州府志稱:「算盤,倭俗謂十露盤.凡算盤以竹串,貫十箇木顆,并置盤上數行.凡算物時以斯木顆爲逐一之微而算之.十露呈露十箇顆之義也」云云,疑非正訓.星野博士以爲明代商於日本者多爲閩粵人.算盤,十露盤,直音訛耳.(28)

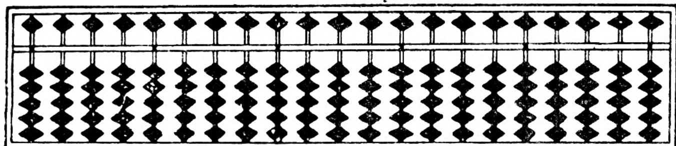
其見於著書者,寬永四年(1627)吉田光由所著塵刧記跋文,稱:依據汝思之書,汝思卽算法統宗作者程大位.其後百川治兵衛龜井算(1645),亦應用珠算算商除.磯村吉德算法闕疑鈔 (1660), 澤口一之古今算法

(27) 見三上義夫:日本數學史概要,高等數學研究第二卷,第二號,第 6 頁.昭和六年(1931)二月,東京.

參看高井計之助算盤雜話,第 9—10 頁.

(28) 見高井計之助算盤雜話,第 8 頁.

記(1670)并有算盤圖,但算珠已由圓形變爲棱形,而梁上由二珠變爲一珠矣.如第四圖.



第四圖

其後在日本又有梁上三珠之算盤.今藏日本山形市山寺村伊澤榮次家中,盤高四寸四分,長二尺一寸四分,爲三十五位算盤.(29)此項梁上三珠之算盤,吾國閩縣潘逢禧之算學發蒙五種(1881)内曾論及之.近年壽孝天亦製成此算盤,稱爲壽式算盤云.

(29) 見三上義夫:梁上三珠之算盤,The XY, Vol. XVIII, No. 7, pp. 1—3.大正十年(1921)九月,東京.

中算家之縱橫圖(Magic Squares)研究

目　次

1. 縱橫圖之定義,及其歷史.
2. 洛書數之起原,及其推演.
3. 宋楊輝之縱橫圖,上.
4. 宋楊輝之縱橫圖,下.
5. 明程大位之縱橫圖.
6. 清方中通之九九圖說.
7. 清張潮之算法圖補.
8. 中國縱橫圖說之頹廢,及和算之方陣研究.
9. 清保其壽之增補算法渾圓圖.
10. 縱橫圖新說之輸入,及其研究.

1. 縱橫圖之定義,及其歷史

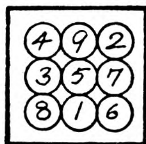
縱橫圖今譯爲奇平方(*Magic Squares*)或幻方,日人稱爲方陣或方陳,宋楊輝稱爲縱橫圖,在各名爲最舊.

洛書數爲最古之三行縱橫圖,在宋則楊輝續古摘奇算法列有十三圖,而造法不詳.至十四世紀有*The Byzantian Greek, Moschopulus* 者,始研求其造法.在

1514年則 *The Nuremberg painter, Albrecht Dürer* 曾刻有十六字方圖,(見格致彙編),其後1550年間有 *Adam Riese* 及 *Michael Stifel*,十七世紀中,有 *Bachet de Méziriac* 及 *Athanasius Kircher*;法人 *De la Hire* 及 *Janveur* 及晚近 *Scheffler* 教授,均深研此道者.此外東方各國;若印度,日本,幷於此事具深切之興味.

2. 洛書數之起原,及其推演.

大戴禮明堂篇二九四七五三六一八,盧辯注大戴禮有法龜文之說.甄鸞注數術記遺云;九宮者,二四爲肩,六八爲足,左三右七,戴九履一,五居中央,亦與龜文之說暗合.辯,北齊人;鸞,後周人;則九宮之圖,由來已久,時尚無河圖洛書之稱也.



(1)

河圖,洛書兩圖,宋朱震依劉牧易數鉤隱圖以九爲河圖,十爲洛書,列周易卦圖於易圖之首,謂劉牧傳於范諤昌,諤昌傳於許堅,堅傳於李溉,溉傳於种放,放傳於希夷陳摶.至朱熹用蔡元定說,乃以劉所傳河圖爲洛書,洛書爲河圖,諸家因之.[1]

(1) 見錢大昕:十駕齊養新錄卷一.

3. 宋楊輝之縱橫圖上

宋楊輝續古摘奇算法(1275)序,稱:

「河圖洛書」條「……一日忽有劉碧澗,丘虛谷攜諸家算法奇題,及舊刊遺忘之文,求成爲集,願助工板刊行,遂添摭諸家奇題,與夫繕本,及可以續古法草,總爲一集.目之曰:續古摘奇算法,與好事者共之,觀者幸勿罪其僭.歲德祐改元(1275)冬至壬辰日,錢塘楊輝謹識.」

按續古摘奇算法爲楊輝算法之一,毛晉諸家所藏,均非全帙.李儼藏有足本楊輝算法,乃據日本關孝和(?—1708)寬文辛丑(1662)傳錄高麗覆明洪武戊午(1378)刊本鈔校.原書今藏日本帝國學士院,三上義夫首發現之,錄副見示.近年又發見日本東京高等師範學校藏有宣德八年(1432)高麗刻本一種,北京,北海,北平圖書館藏有楊守敬舊藏宣德八年高麗刻本一種.

續古摘奇算法卷一,有「縱橫圖」,今錄於下:

「續古摘奇算法目錄

錢塘楊輝編集

○卷上

縱橫圖

河圖數	洛書數	四四圖二
五五圖二	六六圖二	七七圖二

六十四圖二　九九圖　百子圖

聚五圖　聚六圖　聚八圖

攢九圖　八陣圖　連環圖」

「續古摘奇算法卷上

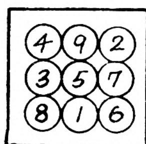
錢塘楊輝集

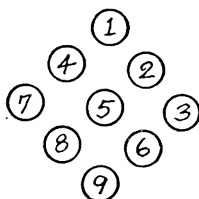
縱橫圖

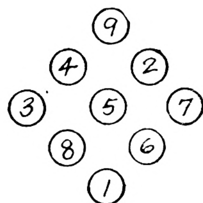
……………………………………………………

洛書

九子斜排　上下對易　左右相更　四維挺出







戴九履一　左三右七　二四爲肩　六八爲足.

花十六圖　縱橫三十四,

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

(2)

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

(3)

陰　圖 積一百三十六,

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

易　換 術曰:以十六子依次第作四行排列.先以外四角對換;一換十六,四換十三.後以內四角對換;六換十一,七換十.橫直上下斜角,皆三十四數.對換止可施之於小.又總術

求　積 術曰:併上下數,上一,下十六,共十七,以高數,十六,乘之,折半,得積,一百三十六,以行數,四,除之,得每行縱橫之數三十四.

12	5	16	1
11	6	15	2
10	7	14	3
9	8	13	4

求　等 術曰:以子數分兩行,一,二,三,四,五,六,七,八,九,十,十一,十二,十三,十四,十五,十六,而二子皆等十七,又分爲四行,而橫行先等,

三十四,乃不易之數,卻以此數,編排直行之數,使皆如元求一行之積三十四而止,繩墨既定,則不患數之不及也.

五五圖 縱橫六十五,

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(4)

陰圖 積五百二十五,

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

(5)

草曰:併上下數,上一,下二十五,共二十六,以高數二十五,乘之,折半得積,三百二十五,以五行除之,即一面之數,皆六十五.

六六圖

縱橫一百一十一，

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(6)

陰　圖

共積六百六十六，

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(7)

衍數圖

縱橫七百十五，

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

(8)

陰圖

共積一千二百二十五，

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

(9)

易數圖

縱橫二百六十，

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(10)

陰圖

共積二千八十，

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

(11)

九九圖

縱橫三百六十九，

共積二千三百二十一，

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	42	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

(12)

百子圖

縱橫五百五，共積五千五十，

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

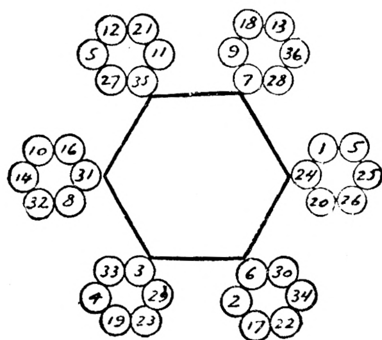
(13)

聚五圖

二十一子，作二十五子用，

19
12 6 8
4 20 7
21 23 1 5 15 14 16
16 24 11
9 17 13
2

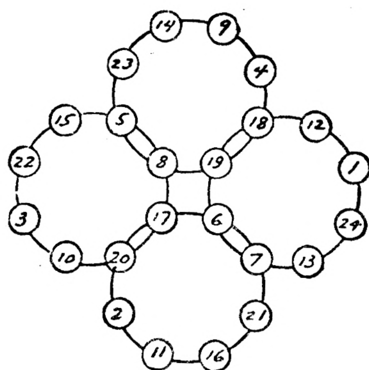
(14)



聚六圖

六子迴環各一百一十一,

(15)



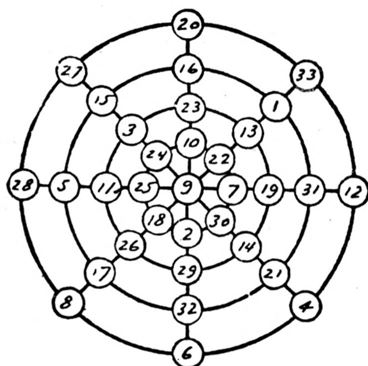
聚八圖

二十四子,作三十二子用,

(16)

攢九圖

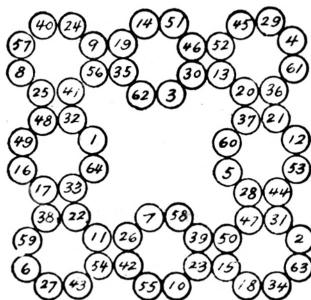
斜直周圍各一百四十七,



(17)

八陣圖

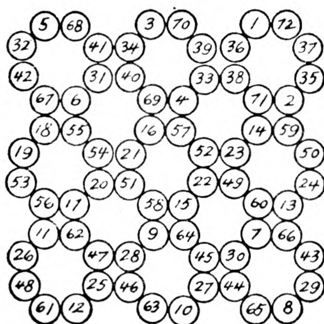
八八六十四子,總積二千八十,以八子爲一隊,縱橫二百六十,以大輔小,而無強弱不齊之數,示均而無偏也,



(18)

連環圖

七十二子總積二千六百二十八,以八子爲一隊,縱橫各二百九十二,多寡相資,隣壁相兼,以九隊化一十三隊,此見運用之道.



(19)

4. 宋楊輝之縱橫圖下

宋楊輝之縱橫圖,其(4),(5)二圖,如

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

(4)

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	19	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

(5)

按洛書數;九子斜排,上下對易,左右相更,四維挺出之例,應成左圖.而(5)圖每位減 8,應成右圖.惟(4)圖有一特別性質,即內四角12,14;8,18;外四角 1,25;5,21;內對行 9,17;7,19;外對行11,15;2,24;6,20;反 3,23;10,16;4,22

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

之和,并爲 $2\times\frac{65}{5}=26$ 也.而(5)圖,則除 7, 19;11,15;12,14; 6, 20 須斜加得 26 外,其餘并與(4)圖具相同性質也.

	19		15	
20				12
14				6
	11		7	

(6),(7)二圖,似係先製下之二副圖,再以洛書數代入而得,是亦複形(*Compound magic square*)之例也.

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

(6)

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

(7)

23	23	23
41	41	41
23	23	23
41	14	41
23	23	23
14	41	14

12	43	41
34	21	23
13	34	31
42	12	24
23	34	12
41	21	34

(8) 圖除8, 42; 7, 43; 2, 48; 3, 47;須斜加得50外,其餘幷與(4)圖具相同性質.

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

	8				7	
3						2
48						47
	43				42	

(8)

(9) 圖除 7, 43;21,29;10,40;16,34; 6,44;20,30;12,38;18,32;……須斜加得50外,其餘幷與(4)圖具相同性質.

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

	43	40		16	21	
44		33		36		30
38	19				22	32
18	28				31	12
20		14		17		6
	29	34		10	7	

(9)

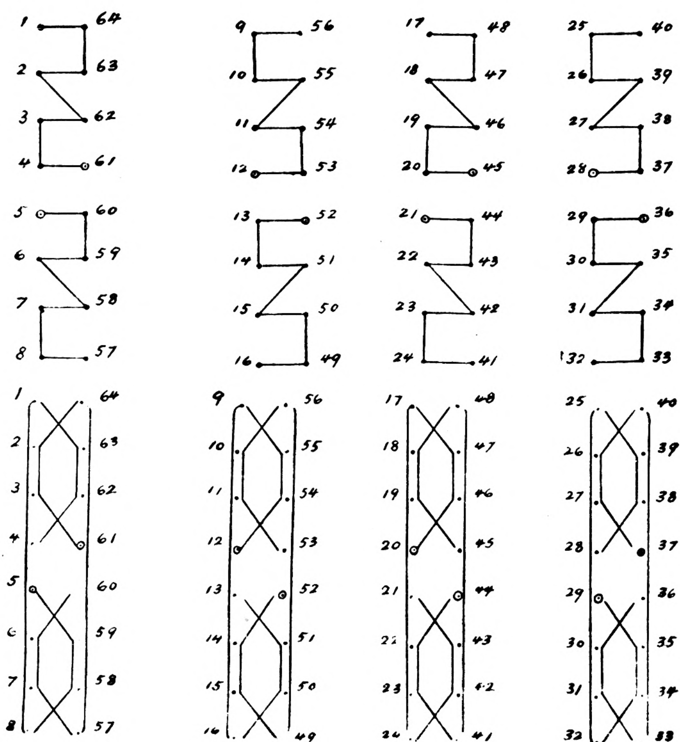
(10),(11) 二圖之作法,可由下之副圖說明之.

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

(10)

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

(11)



(12)圖與(9)圖具相同之性質,且爲洛書數之複形(*Compound magic square*)蓋(12)圖由(1)圖單形(*Sub-squares*)逐次加8而得.

	76	13	36		18	29	74	
22		58	27		63	20		56
67	4		72		54		2	47
30	75	12				34	79	16
66	3	48				70	7	52
35	80		28		10		78	15
26		62	19		55	24		60
	8	53	64		46	69	6	

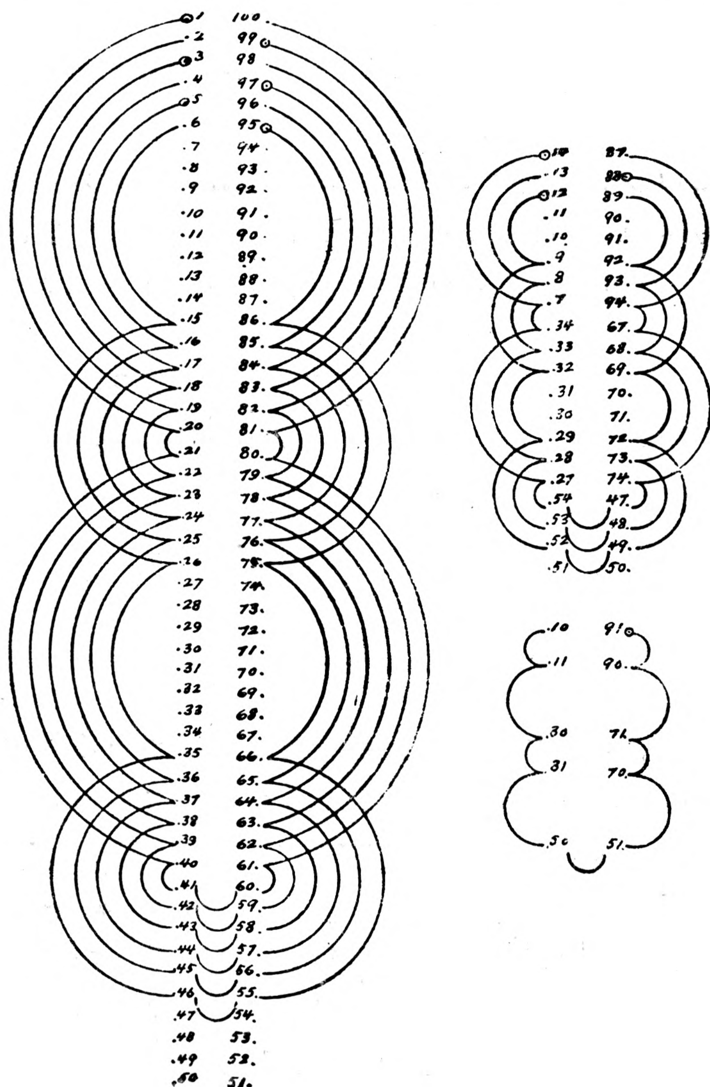
31	76	13	36	81	18	9	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	42	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

(12)

(13) 圖僅縱橫可合五百五,於隅徑不能合.其作法可由次之三副圖說明之.

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(13)



5. 明程大位之縱橫圖

明程大位著算法統宗十七卷,萬曆癸巳(1593)漸江吳繼綬爲之序,卷十七所載縱橫圖十四種,多與楊輝相同,其稍異者有五五圖,六六圖,聚六圖,八陣圖,四種.(20)圖與(5)圖相似,僅外四角1,5,21,25,易位而已;(21)圖與(7)圖亦相似,蓋(21)圖以(7)圖之左半爲右半也.

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

(20)

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

(21)

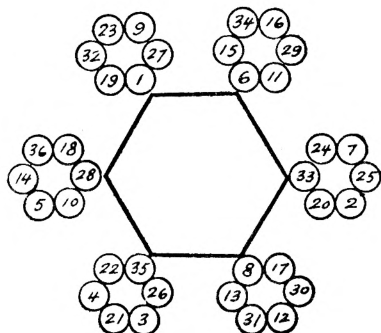
其五五圖(20),「易換術曰:先以十三居中位,周圍連中位各皆三層也,列圖於左,各相對換畢,即得數.上

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
斜對	正對	正對	正對	斜對	正對	正對	斜對	正對	正對	正對	斜對
25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
外	外	外	外	外	外	內	內	內	外	外	內

橫有餘,下橫不足,各數八.」蓋言如此易換,上橫73,較65有餘 8;下橫53較65不足 8;故必再上下橫左右二數: 5, 25; 1, 21對換,方成正則之縱橫圖如(5),或將上下二橫列中央三數:23,16, 4; 3, 10,22對換如(24)也.

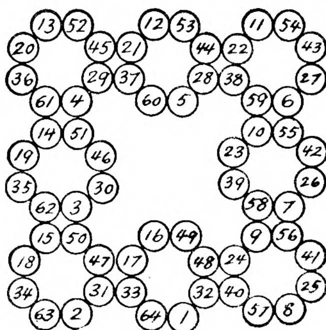
聚六圖

六子迴環各積一百一十一數,



(22)

八陣圖



(23)

6. 清方中通之九九圖說

清方中通著數度衍二十四卷,前有順治辛丑(1661)自識.中通康熙丁卯(1687)與梅文鼎書,謂:「謬爲數度衍二十六卷,旣成無過問者,置笥中忽忽三十年,」則數度衍之成,又當在辛丑(1661)前矣.是書卷首之一,「九九圖說」後附縱橫圖十四種,蓋出於算法統宗,其五五圖(24)已有改正,如;

五五圖

5	3	10	22	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	23	16	4	21

(24)

方中通又稱加減乘除出於洛書,馮經,屈曾發之徒,頗因襲其說.至楊輝程大位,方中通所引縱橫圖,其異同之處,可於下表見之.

宋楊輝 (1275)	明程大位(1593)	淸方中通(1661)
洛書數(1)	洛書	三三圖
花十六圖(2)	——	——
花十六陰圖(3)	花十六圖	四四圖
五五圖(4)	——	——
五五陰圖(5)	——	——
——	五五圖(20)	——
——	——	五五圖(24)
六六圖(6)	——	——
——	六六圖(21)	六六圖
六六陰圖(7)	——	——
衍數圖(8)	七七圖	七七圖
衍數陰圖(9)	——	——
易數圖(10)	八八圖	八八圖
易數陰圖(11)	——	——
九九圖(12)	九九圖	九九圖
百子圖(13)	百子圖	十十圖
聚五圖(14)	聚五圖	聚五圖
聚六圖(15)	——	——
——	聚六圖(22)	聚六圖
聚八圖(16)	聚八圖	聚八圖
攢九圖(17)	攢九圖	攢九圖
八陣圖(18)	——	——
——	八陣圖(23)	(八陣圖)
連環圖(19)	連環圖	(連環圖)

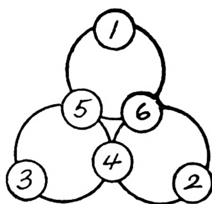
7. 清張潮之算法圖補

清初新安張潮心齋雜俎卷下,「算法圖補」謂:

「算法統宗所載十有四圖。縱橫斜正,無不妙合自然,有非人力所能爲者,大抵皆從洛書悟而得之.內惟百子圖,於隅徑不能合,因重加改定,復以意增布雜圖,亦皆有自然之妙.乃知人心與理數相爲表裏,引而伸之,當猶有不盡於此者,姑即其已然者列於後.」

參三圖

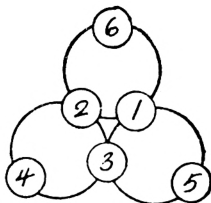
六子作九子用,
三角各十二數,
每面各九數.



(25)

參三圖

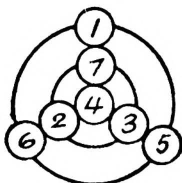
六子作九子用,
三角各九數,
每面十二數.



(26)

參三圖

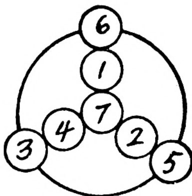
七子作十五子用，
圖徑俱十二數.



(27)

參三圖

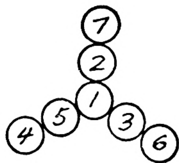
七子作十二子用，
外圖三徑俱十四數.



(28)

參三圖

七子作九子用，
三徑各十數.

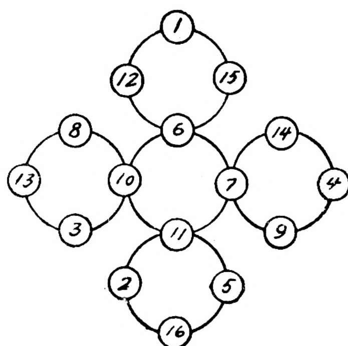


(29)

揲四圖

十六子作六十四子用，

角徑平徑四方四尖中心俱三十四數。

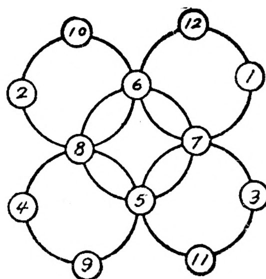


(30)

伍伍圖

十二子作二十子用，

各二十六數.

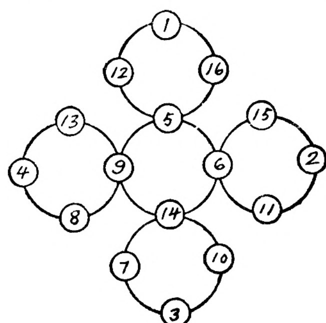


(31)

伍五圖

十六子作二十子用，

各得三十四數.

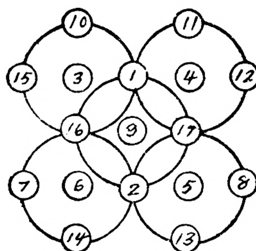


(32)

伍五圖

十七子作二十五子用，

各四十五數.

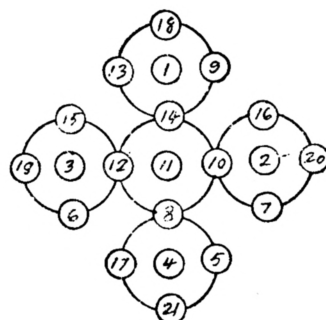


(33)

伍五圖

二十一子作二十五子用；

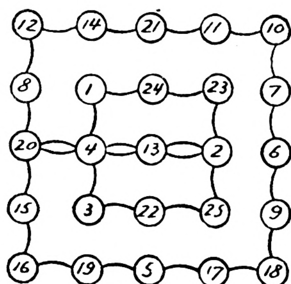
各五十五數.



(34)

伍五圖

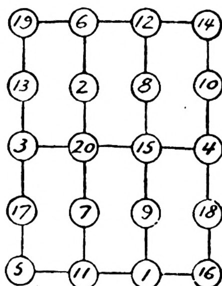
二十五子作四十五子用，各百十七數



(35)

方六圖

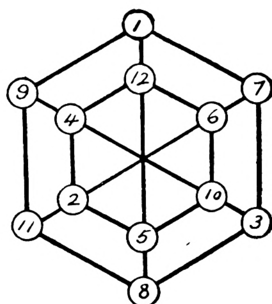
二十子作三十六子用，各六十三數．



(36)

六合圖

三徑二合陣，每四子各二十六數．十二子作八十四子用，兩圍三合陣，每六子各三十九數．

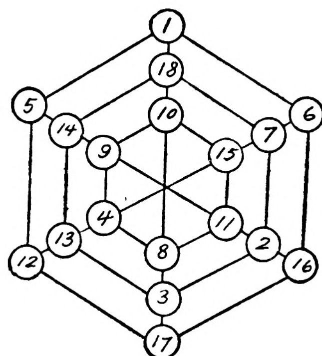


(37)

六合圖

十八子作七十二子用,

圖徑幷每方各五十七數。

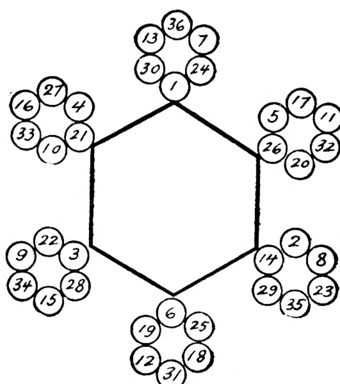


(38)

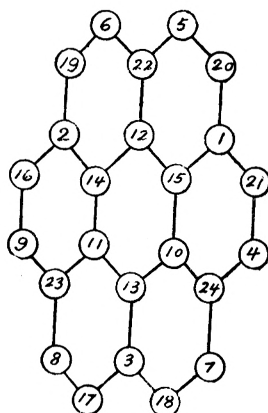
更定聚六圖

每對三十七數,

每陣百十一數.



(39)



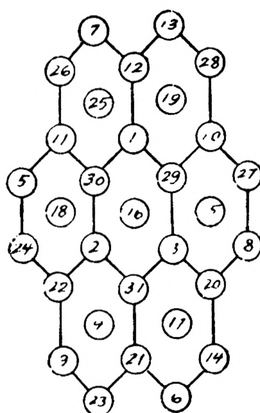
龜文聚六圖

二十四子作四十

二子用,

各七十五數.

(40)



七襄圖

三十一子作四十

九子用,

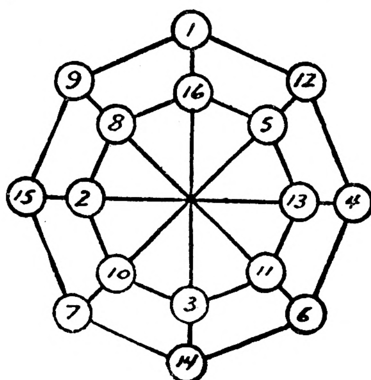
各百十二數.

(41)

八陣圖

每方及徑每四子各三十四數，十六子作百四十四子用，

圍及半圍每八子各六十八數.

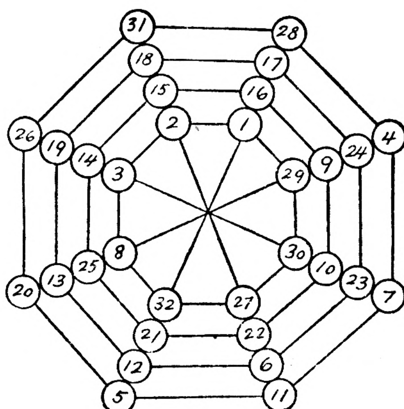


(42)

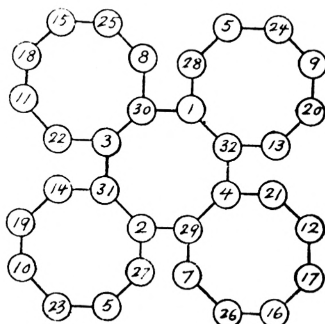
八陣圖

三十二子作六十四子用，

圍徑各一百三十二數.



(43)

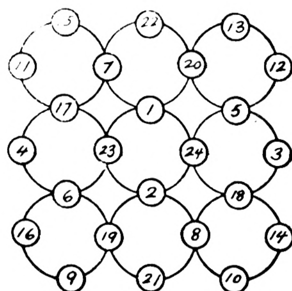


(44)

八陣圖

三十二子作四十子用，

各一百三十二數.

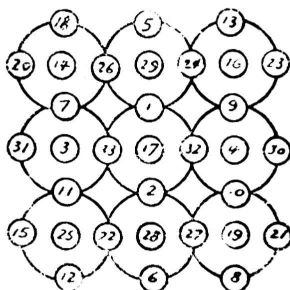


(45)

九宮圖

二十四子作三十六子用，

各五十數.



(46)

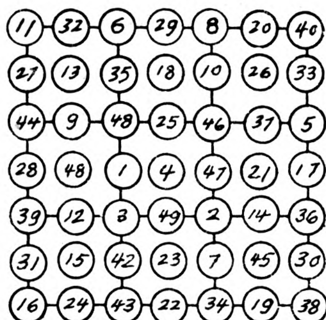
九宮圖

三十三子作四十五子用，

各八十五數.

九宮圖

四十九子作八十一子用，各二百二十五數.



(47)

更定百子圖

縱橫斜正各五百零五數，一百子作二百二十子用.

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

(48)

8. 中國縱橫圖說之頹廢,及和算之方陣研究

清梅瑴成 (1681—1793) 增删算法統宗十一卷,

(1760) 以河圖縱橫數為小術,無關大用,乃并原書首揭河圖洛書以見數之本原者,亦汰去之.從此縱橫圖之存而不論者,約百有餘年

在此時期,國中縱橫圖說雖見頹廢,而在日本則受楊輝,程大位之影響者,有下列諸家之論著:——

礒村吉德(?—1709)算法闕疑鈔(1684)之方陣;

關孝和(?—1708)方陣之法(1683?);

安藤有益(1625—1708)奇偶方數(1694);

鈴木重次算法重寶記(1694)之方陣;

寺內良弼方陣新術;

中根彥循(1701—1761)勘者御伽雙紙(1743刋)之方陣;

松岡能一方陣圓陣解

中田高寬方陣諺解

小松鈍齋(1800—1868)方陣布列法.(2)

9. 清保其壽之增補算法渾圓圖

清南通州保其壽碧奈山房集內,「增補算法渾圓圖,」稱:

(2) 參觀三上義夫:和算之方陣問題,大正六年(1917)日本帝國學士院藏版.

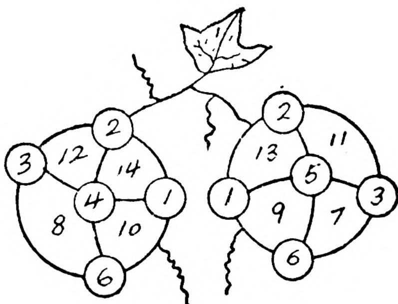
「心齋雜俎有算法二十五圖,張山來(潮)自云係算法統宗十四圖之外者,推而演之,當不盡於此云云.統宗余未經見,惟山來所演皆平圖,不知立方與渾圓尤爲可喜,其源雖權輿洛書,其巧實不可思議,當是天地間合有此一種理數,特假手山來與余耳.

南通州保其壽似仙」

其壽字似仙一字穉存,洪楊之役曾投軍,久之棄去,卒年六十四,南通縣志「耆舊傳」有傳.

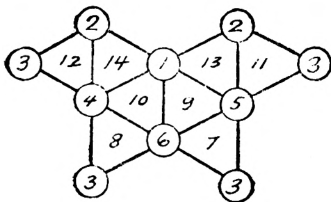
瓜瓞圖

每面二十一數,十四子作三十二子用.



(49)

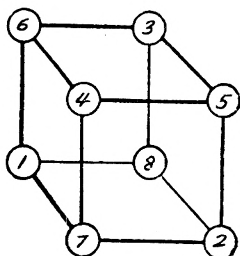
三圖本一圖



(50)

六合立方

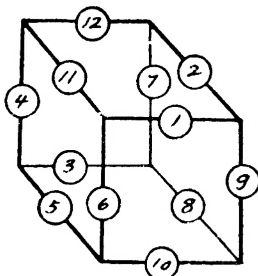
凡六面,每面十八數,
八子作二十四子用.



(51)

立方

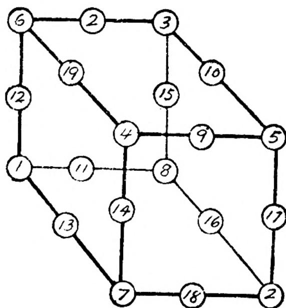
每面二十六數,
十二子作二十四子用.



(52)

立方

每面七十六數,
二十子作四十八子用.



(53)

立　方

每面一百八十二數，
三十二子作七十七子用。

(54)

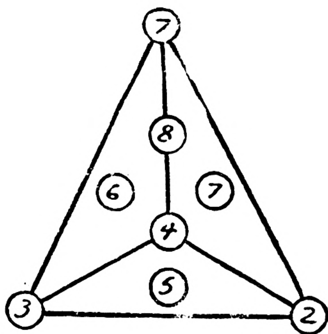
渾三角

每線十三數，
每面三十九數，
十二子作二十四子用.

(55)

渾三角

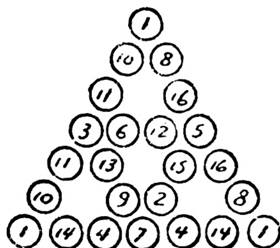
每面十四數，八子作十六子用.



(56)

渾三角

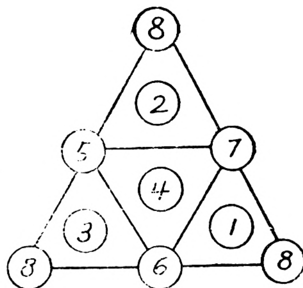
面各七十二數，十六子作三十六子用.



(57)

渾三角

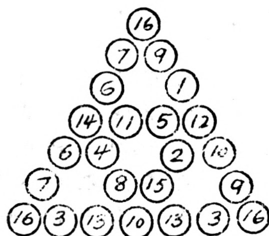
面各二十二數.



(58)

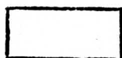
渾三角

面各八十一數.

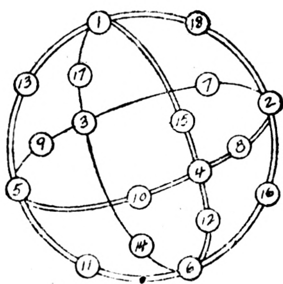


(59)

(3)

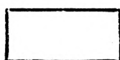


面各四十八數,
十八子作四十八子用,
如以一換十八,二換十七,逐子相易,
卽成每面六十六數.

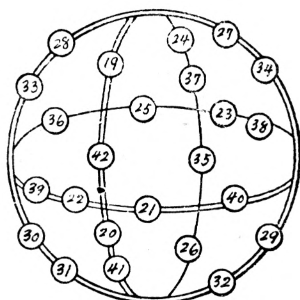


(60)

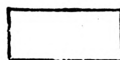
(3) 此圖無名目,下三圖同.



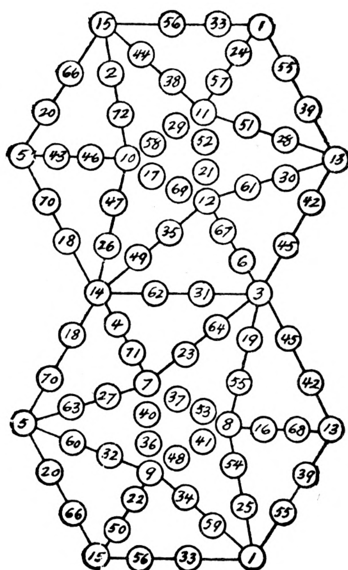
前用十八子,此自十九起至四十二止,每梁加二子,加入前圖.面各一百零九數,加入變局一百二十七數.(卽48+61=109, 66+61=127 也.)



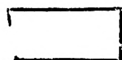
(61)



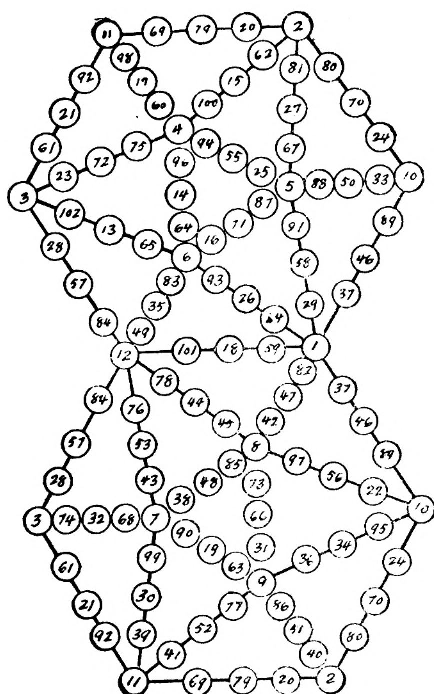
面各二百七十九,七十二子作百八十子用.



(62)



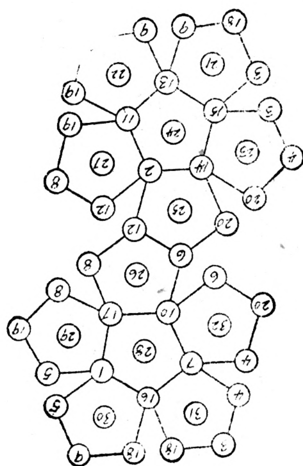
面各五百三十七數,百零二子作二百四十子用.



(63)

六合渾圓

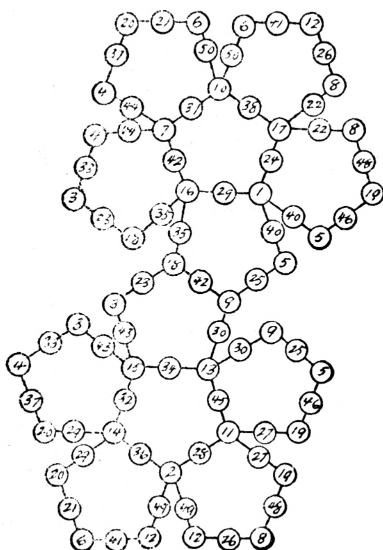
每面七十九數，三十二子作七十二子用。



(64)

六合渾圓

每面二百三十數，五十子作一百二十子用。



(65)

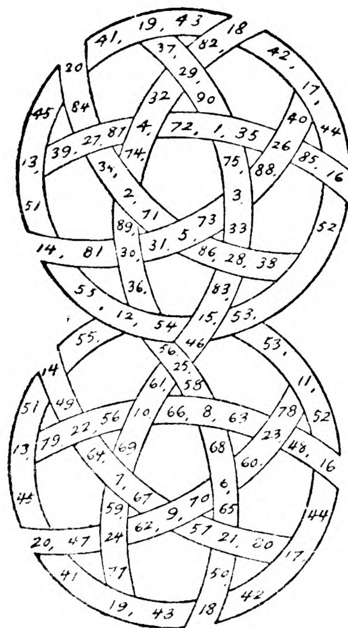
六道渾天圖

以紙六條作圈相間爲之,

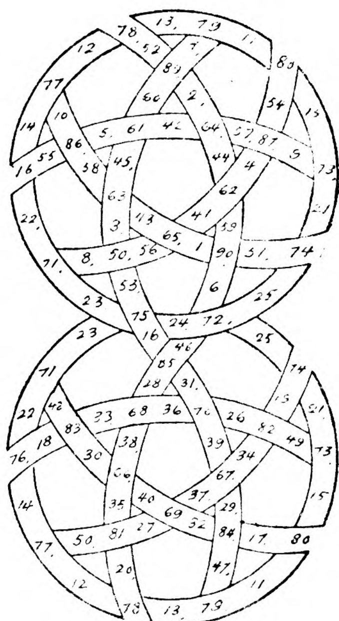
每五角十子,積三百八十數;三角六子積二百二十八數,九十子作二百四十子用.

六道渾天圖

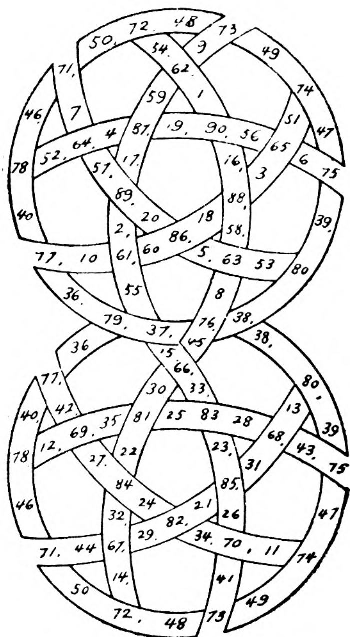
自一至六十歸梁,餘歸角.角與梁易.角一子加六十,梁一子減三十;五子加三百,五子減一百五十,餘一百五十;則每面得數五百三十,每三角得數三百十八.



(66)



(67)



六道渾天圖

自一至九十顛倒互易.

(68)

10. 縱橫圖新說之輸入,及其研究

最近北平故宮博物院圖書館,發現鈔本三三等數圖一册未著撰人姓氏,其書原藏敎本殿,後移入故宮博物院圖書館,著書時代,亦已無考.疑於清初由西洋天主教士連同歷法輸入中國.所刻縱橫圖,自三三至十十凡八圖如下:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(69)三 三 圖

8	23	25	7	2
22	12	17	10	4
5	11	13	15	21
6	16	9	14	20
24	3	1	19	18

(70)五 五 圖

12	45	11	49	9	47	2
10	20	35	37	17	14	40
46	34	24	29	22	16	4
7	17	23	25	27	33	43
44	18	28	21	26	32	6
8	36	15	13	31	30	42
48	5	39	1	41	3	38

(71)七 七 圖

16	15	75	13	81	77	11	79	2
14	28	61	27	65	25	63	18	68
78	26	36	51	53	35	30	56	4
12	62	50	40	45	38	32	20	70
9	23	33	39	41	43	49	59	73
76	60	34	44	37	42	48	22	6
10	24	52	31	29	47	46	58	72
74	64	21	55	17	57	19	54	8
80	67	7	69	1	5	71	3	66

(72)九 九 圖

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(73)四 四 圖

1	34	9	32	29	6
4	11	25	24	14	33
35	22	16	17	19	2
10	18	20	21	15	27
30	23	13	12	26	7
31	3	28	5	8	36

(74)六 六 圖

1	62	7	60	13	55	54	8
63	15	48	23	46	43	20	2
6	18	25	39	38	28	47	59
61	49	36	30	31	33	16	4
9	24	32	34	35	29	41	56
51	44	37	27	26	40	21	14
12	45	17	42	19	22	50	53
57	3	58	5	52	10	11	64

(75)八 八 圖

1	98	7	96	13	92	15	89	84	10
4	19	80	25	78	31	73	72	26	67
99	81	33	66	41	64	61	38	20	2
8	24	36	43	57	56	46	65	77	93
95	79	67	54	48	49	51	34	22	6
14	27	42	50	52	53	47	59	74	87
90	69	62	55	45	44	58	39	32	11
18	30	63	35	60	37	40	68	71	83
85	75	21	76	23	70	28	29	82	16
91	3	94	5	88	9	86	12	17	100

(76) 十十圖

至其作圖之法,該書亦復詳記.今舉七七圖爲例

「七七圖、

總格四十九,而至大數亦爲49,總積1225.乃自1

	20	35	37	19	14	
	34	24	29	22	16	
	17	23	25	27	33	
	18	28	21	26	32	
	36	15	13	31	30	

12	45	11	49	9	47	2
10						40
46						4
7						43
44						6
8						42
48	5	39	1	41	3	38

至49遞加所成之數也.法置總積以7歸之,得175.爲每行七格共數.再以7歸之,得25爲七格之平分數.〔亦是四十九格之平分數.〕

故以之立於中心爲中心數.與五五圖之中心數13,較之,多12.爰以五五圖爲本.〔五五圖以三三圖爲本.此圖以五五圖爲本.實遞以三三圖爲本也.〕每格加12,即爲此圖之內25格數.〔其數自13至37,共爲25,其總數則爲625.〕次以所得之內二十五格總數,於總積內減之,餘600,爲外層二十四格之總數.其二十四格之內,至小之數有十二.〔爲自1至12之十二數.〕至大之數亦有十二.〔爲自38至49之十二數.〕以12歸二十四格之總數,得50,爲外層一至小數,一至大數相對待之數,於是依三三圖法,以1爲奇之至小數,置於下中,而以奇之至大數49對待之.其次7爲本圖之根數.又爲1與49之中率,故依三三圖之例.置於左中.而右中則以43對待之.其次偶之至小數爲2,則置於上右隅,而以偶之至大數48對待之,其次小偶數之最大者爲12,則置於上左隅.而以大偶數之最小數38對待之.是四正四隅,皆如三三圖之理而得焉.其次奇之次小數爲3,爲5.則置於下,以從1,而上以47,與45對待之.

偶之次小數爲 4,爲 6.則置於右,以從 2,而左以46與44對待之.小偶數之次大者爲 8,爲10.則置於左,以從12,而右以42,與40對待之.小奇數之大者,爲 9,爲11.則置於上,以從49,而下以41,與39對待之.亦如五五圖之大從大,小從小也.如是則兩兩相對皆成50.〔中心數25,倍之得50.而一小數,一大數相對,亦得50,亦與三三圖之理同.〕上下左右四行.皆成175,合內二十五格.則縱橫斜正,皆成175矣.」

光緒初年英人傅蘭雅(*Dr. John Fryer* 1839—?)主編格致彙編,其第三年第二册載十六字方圖(77),蓋即1514年 *The Nuremberg Painter, Albrecht Dürer* 所刻者

格致彙編原圖

十六	三	二	十三
五	十	十一	八
九	六	七	十二
四	十五	十四	一

(77)

十二宮新圖

申 未 午 巳

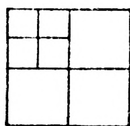
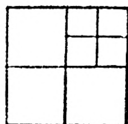
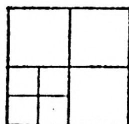
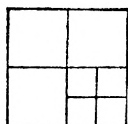
六	十五	四	九
三	十	五	十六
十三	八	十一	二
十二	一	十四	七

辰 卯 酉 戌

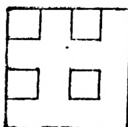
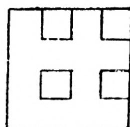
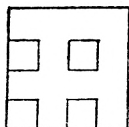
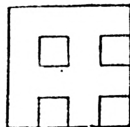
寅 丑 子 亥

(78)

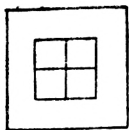
未幾寶坻王君投書彙編大意稱其友王畏如復排成一新圖,稱爲「十二宮新圖,」(78圖)。有書名中西新圖理數論專論此事,幷謂兩圖(77,78)幷於縱四行,橫四行,對角二行外,有:正方四,對方四,中方一,長方二,角方一,各和數.

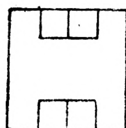
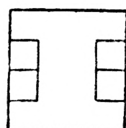
正 方 四

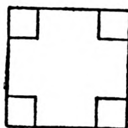
對 方 四



中 方 一

長 方 二



角　方　一

光緒癸卯 (1903) 英人李提摩太於廣學類編 (*Handy Encyclopedia, Edited* by Rev. *Timothy Richard*, *D. D. Litt.* D, 1903)卷五,算學類,「方面奇圖,」稱:

「1698 年間,有算學家名佛尼爾者,刋有方面奇圖,自一至十六諸數,排成正方,變化不窮,共有 20,922, 789, 888, 000 法,其中尤爲異想天開者,計有八百七十八法,下圖卽其一也.」

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

是卽格致彙編之花十六圖

至光緒庚子(1900)山陰杜亞泉編亞泉雜誌時,杜亞泉及餘姚葉譜人(振鐸)曾論及縱橫圖之造法;光緒庚戌(1910)紹興壽孝天在師範講習社編數學講義壽孝天及蘭谿唐梅生(鼎新)亦討論及此.壽孝天幷彙載

各造法於東方雜誌第八卷,第二號,題爲「縱橫對角等和排列法之研究,」惜其中所述造法,有爲西人所已著,而未及深辯者,如亞泉法卽白謙氏 (*Bachet de Méziriac*) 法是也.民國以來,南通崔朝慶主編之數學雜誌,商務印書館出版之教育雜誌,學生雜誌,時有此類記載,而鄺恂立,汪以鱗所編幻方(1922)一書,則專記此事,而多引西說,讀者可參考焉.

十六年九月於靈寶

二十三年二月校於西安

中算家之Pascal三角形研究

目　次

1. Pascal三角形之意義
2. Pascal三角形本事
3. 中算家之首論Pascal三角形者
4. 明清之際Pascal三角形輸入中國
5. 十八,九世紀間Pascal三角形在中日之流傳
6. Pascal三角形年表

1. Pascal三角形之意義

粗習代數學者,當知:

$(a+b)^0=1,$

$(a+b)^1=a+b,$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ba^3+b^4,$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$

....

之關係.如將以上各係數排列之,可得:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\ .\ 1\\
1\ .\ 2\ .\ 1\\
1\ .\ 3\ .\ 3\ .\ 1\\
1\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 4\ .\ 1\\
1\ .\ 5\ .\ 10\ .\ 10\ .\ 5\ .\ 1
\end{array}
$$

是爲 *Pascal* 三角形.

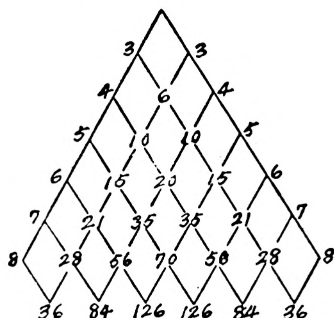
東方古國如中國,印度,亞拉伯,在上古幷知$(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$所得之結果.但其算法,或係由累乘而得.直至 1261 年宋楊輝之記載,始具 *Pascal* 三角形之雛形.但在昔 *Pascal* 三角形苦無專名.劉衡曰:「通率者廉率也,宋儒治易者,謂之加倍變法;古算家謂之開方求廉率;泰西乃謂之通率;梅(文鼎)氏又易其名曰定率.」[1]玆因西算史家成例,稱爲 *Pascal* 三角形.

2. Pascal 三角形本事

Pascal 三角形因 Pascal (1654)所發明,而得名.其在歐洲,則先 Pascal 論及者,亦大有人.最先者爲 *Petrus Apianus* (1527).氏之德名爲 *Peter Bienewitz* 或 *Bennewitz*、以 1495 年生於 *Leisniz*, 1552 年四月二十一號卒於 *Ingolstadt*. 氏於 1527 年所著算術書 *Fyn Newe vund*

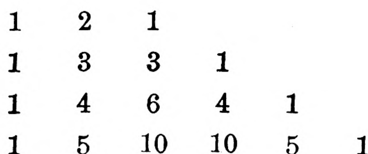
(1) 見劉衡:籌表開諸乘方捷法,六九軒算書本.

wolgegründte vnderweysung aller kauffmanss Rechunug, Ingolstadt 之封面,刻有一圖如:——



是爲歐洲最古之 *Pascal* 三角形.

復次則 Michael Stifel (1487—1567) 於 1544 年所著算術書 *Arithmetica Integra, Nüruberg* 中亦有一圖,如:——



1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

其後一年(1545), *Johann Scheubel* (1494—1570)於所著算術書 *De Nvmeris et Diversis Rationibus......, Leipzig* 中亦論及之.幷應用之以求24乘方之方根.

至德人 *Jacques Peletier* (1517—1582) 於所著算術書 (1549) 及其重版本上,幷論及之.

然上述諸家之說,流傳尚不甚廣,故意人 (*Nicolo Tartaglia*(約1500—約1557)於其卒去之前年(1556),偶得此義,尚欣然以爲彼實首先發明此事者.但至此其說得稍稍流布,故 *Rafael Bombelli*(約生於1530)於1572年演爲七乘方, *William Oughtred* (1574—1660)於 1631年演爲十乘方.以上數家,幷先 *Pascal* 而發明.

Blaise Pascal 以1623年六月十九號,生於 *Anvergne* 之 *Clermont-Fervand* 以 1662 年九月十九號,卒於 *Paris*. 氏於 1654 年著書詳論其事.其遺著 *Traité du triangle arithmetique*(1665)又詳述之,其說與二項式相似.而1654年所記者,有圖如:——

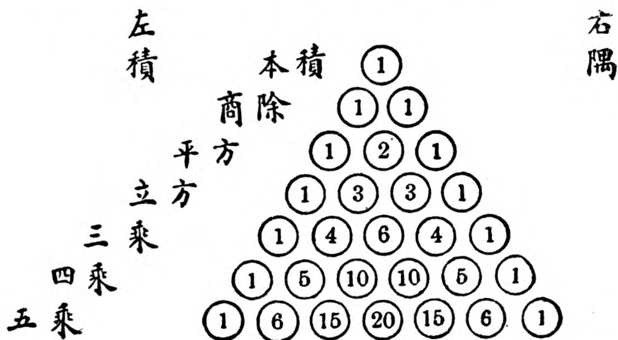
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	橫列
3	1	3	6	10	15	21	28	36	縱列	
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
	1									

自此之後，*Pascal* 三角形,始成通俗化.[2]

3. 中算家之首論Pascal三角形者

中算家之首論 *Pascal* 三角形者,有楊輝 (1261),朱世傑(1303),吳信民(1450),事并在 *Petrus Apianus* 前.

永樂大典本楊輝詳解九章算法有「開方作法本源,」言增乘方求廉草.[3] 自註稱:出釋鎖算書,賈憲用此術」,蓋卽 *Pascal* 三角形也,其圖如下:——



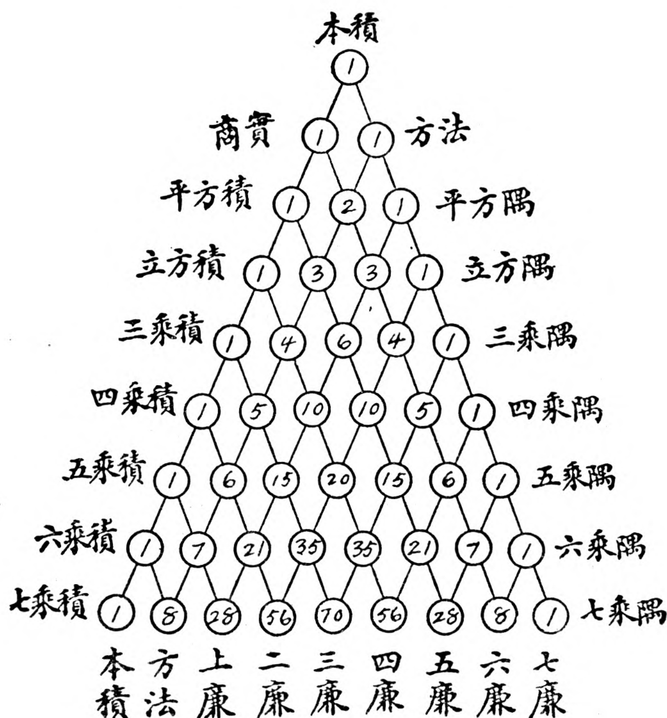
命實而除之.以廉乘商方.中藏者皆廉.右袤乃隅算.左袤乃積數,

(2) 參考書:*D. E. Smith, Rara Arithmetica*, 1908, pp. 155, 236, Boston. *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. I. 1923, pp. 382, 329, 333, 537, Boston.

D. E. Smith, History of Mathematics, Vol. II. 1925, p.508, Boston.

(3) 見永樂大典卷一六三四四,第5–7頁,李儼藏影攝本.又李儼「永樂大典算書考」,圖書館學季刊,第二卷,第二期,第 189—195 頁,民國十七年(1928)三月,北平.

按此圖與程大位算法統宗 (1593) 卷六所載字句相同.程氏謂出於吳敬九章比類 (1450), 實亦本之楊輝也.舊多以朱世傑四元玉鑑(1303)卷首所列爲此圖之最先記載,而四元玉鑑亦明著「古法七乘方圖,」則非朱氏所發明也明甚.楊書多稗販成說,則此圖至遲亦在楊輝前,輝書成於景定辛酉 (1261). 在歐洲則



Petrus Apianus 亦列其圖於 1527 年著作之封面,亦尚後於楊輝二百餘年也.

次於楊輝者有朱世傑.朱世傑四元玉鑑 (1303) 卷首有「古法七乘方圖」,如上圖.

次於朱世傑者有吳敬.梅文鼎少廣拾遺稱:明錢塘吳信民(敬)九章比類算法(1450)有「開方作法本原之圖」明程大位算法統宗於卷六,「開方求廉率作法本源圖」稱:「吳氏九章內有自平方至五乘方,都不云如何作.」其圖應如:——

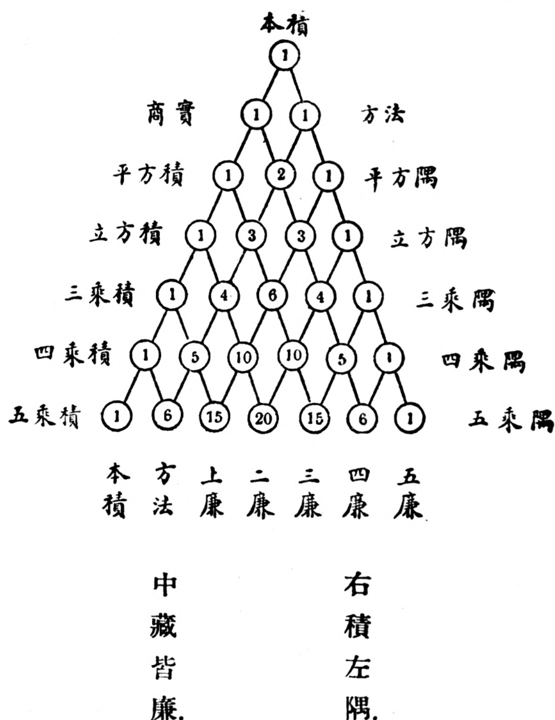
1
1 . 1
1 . 2 . 1
1 . 3 . 3 . 1
1 . 4 . 6 . 4 . 1
1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1
1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1

4. 明清之際Pascal三角形輸入中國

楊輝 (1261),朱世傑 (1303),吳敬 (1450) 之後,周述學 (1558),程大位 (1593) 諸氏僅祖述吳敬之說,了無新解.時適中算彫敝之餘,同文算指通編(約 1615),西鏡錄 (約 1620),乃以西方之論此者輸入中國.然

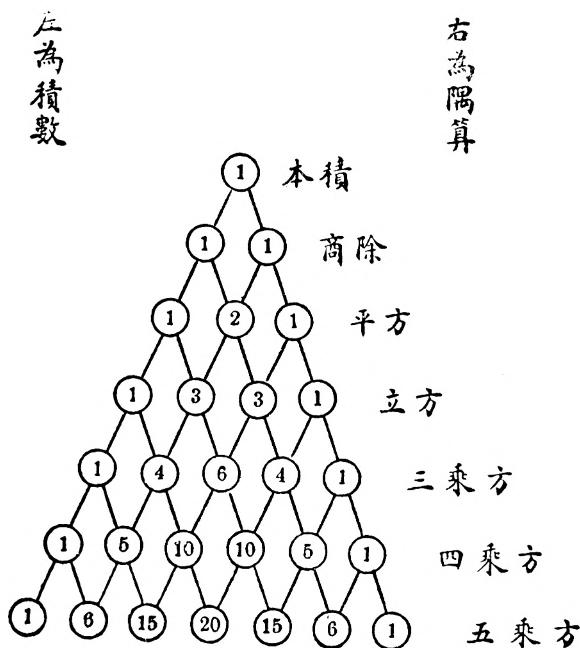
Pascal 三角形 (1645) 時尚未問世,且其詳說,亦始終未輸入中國也.

明周述學神道大編曆宗算會 (1558) 卷四,有「開方求廉法圖,」如:——



明程大位算法統宗 (1593) 卷六,有「開方求廉率

作法本源圖,」如:——



清梅瑴成增删算法統宗卷五(1757—1760)之「開方求廉率作法本源圖」,則廣爲七乘方.

其由西方輸入者,有同文算指通編,西鏡錄二書.

同文算指通編(約 1615)題西海,利瑪竇(*Ricci Matteo*, 1552—1610)授,浙西李之藻(?—1630)演.其卷八有圖如:——

	1								
平方	2								
立方	3	3							
三乘	4	6							
四乘	5	10	10						
五乘	6	15	20						
六乘	7	21	35	35					
七乘	8	28	56	70					
八乘	9	36	84	126	126				
九乘	10	45	120	210	252				
十乘	11	55	165	330	462	462			
十一乘	12	66	220	495	792	924			
十二乘	13	78	286	715	1287	1716	1716		
十三乘	14	91	364	1001	2002	3003	3432		
十四乘	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	
十五乘	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	
十六乘	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310

是爲通率.梅文鼎少廣拾遺稱其「具七乘方算法,而不適於用,銓釋不無譌誤」.陳世信開方捷法引此圖,稱爲「通率表」.

梅文鼎勿菴厯算書目稱:「西鏡錄不知誰作,然其書當在天學初函之後知者.同文算指未有定位之

法,而是書則有之.……」,又稱:「西鏡錄增有〔廉積立成〕,然譌亂不可讀.」梅文鼎少廣拾遺又稱:「西鏡錄演其圖爲十乘方,而舉數僅詳平,立,三乘……式而已,餘皆未及.」竹汀先生日記鈔卷一稱:「李尙之(銳)得歐羅巴西鏡錄鈔本,中有鼎按數條,蓋勿菴手跡也」.(4)

明清之際,中算家之引用西說者,有李篤培,梅文鼎.

李篤培中西數學圖說(約1631)卷八「諸乘方」,謂:「先約大率,布爲成局,按圖求之,爲諸乘方」,如:——

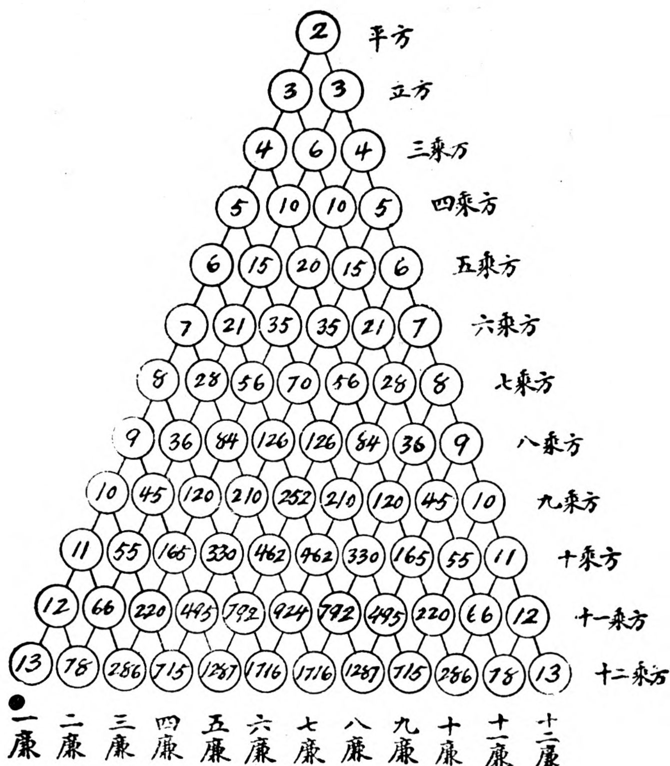
平方	1	2	1				
立方	1	3	3	1			
三乘方	1	4	6	4	1		
四乘方	1	5	10	10	5	1	
五乘方	1	6	15	20	15	6	1
	一率	二率	三率	四率	五率	六率	七率

此與程大位之說相同,所以異者,不稱廉而稱率耳.

梅文鼎於康熙壬申(1692)在都門,有三韓友人林口口寄訊楊時了及丁令調屬詢四乘方,十乘方法,

(4) 見湧喜齋刻本,嘉慶十年(1805)錢竹汀先生弟子何元錫編次,竹汀先生日記鈔卷一.

因成少廣拾遺一卷,其「廉率立成」,〔自開平方至開十二乘方〕,如:——



5. 十八,九世紀間Pascal三角形在中日之流傳

十八,九世紀間 *Pascal* 三角形,在中日之流傳,至爲廣遠.最先則有孔廣森(1752—1786).

孔廣森少廣正負術內篇上稱:「廣森備官翰林,與窺中祕,得見王(孝通),秦(九韶),李(冶)三家之書,覃思研究通其義」,其「諸乘方乘率表」,如:——

平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方	九乘方	十乘方	十一乘方	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	長廉
	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	平廉
		4	10	20	35	56	84	120	165	220	立廉
			5	15	35	70	126	210	330	495	三乘法廉
				6	21	56	126	252	462	792	四乘法廉
					7	28	84	210	462	928	五乘法廉
						8	36	120	330	792	六乘法廉
							9	45	165	495	七乘法廉
								10	55	220	八乘法廉
									11	66	九乘法廉
										12	十乘法廉

此外則焦循加減乘除釋八卷(1797)卷二,引有「古開方本原圖.」劉衡籌表開諸乘方捷法(1807)有「開方求廉率圖」,「通率譜」,幷記至十六乘方.其通率譜即孔廣森之「諸乘方乘率表」,而「開方求廉率圖」,即*Pascal*三角形也.復次則駱騰鳳有開方釋例四卷(1815)

專釋「開方作法本源圖」.

李善蘭製:「垜積爲少廣一支,……董氏方立(祐誠1791—1823)以推割圜」.按董祐誠割圜連比例(1819)卷中之「弦矢連比例諸率成遞加數圖」,及「弦矢連比例諸率成三角堆圖」,即本諸 *Pascal* 三角形也.其後項名達(1789—1850)亦因之以推割圜.項名達象數一原卷一之「遞加圖」即 *Pascal* 三角形也.而夏鸞翔(1823—1864)洞方術圖解(1857)之「遞加圖」,亦本前說也.

海通以後,西算再度輸入.英人偉烈亞力(*Alexander Wylie* 1815—1887)於1853年著有數學啓蒙,其卷二「倍廉法表」如:——

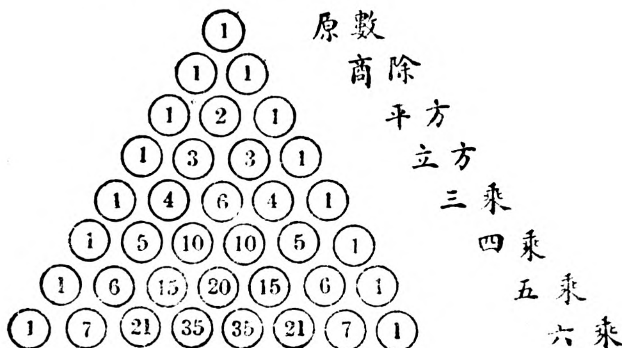
	一廉	二廉	三廉	四廉	五廉	六廉	七廉	八廉	九廉
平方	2								
立方	3	3							
三乘方	4	6	4						
四乘方	5	10	10	5					
五乘方	6	15	20	15	6				
六乘方	7	21	35	35	21	7			
七乘方	8	28	56	70	56	28	8		
八乘方	9	36	84	126	126	84	36	9	
九乘方	10	45	120	210	252	210	120	45	10

亦 *Pascal* 三角形也.

同時則李善蘭有垛積比類四卷,其「三角垛表」,卽 *Pascal* 三角形,此外又有「一乘支垛表」,「二乘支垛表」,「三乘支垛表」;「乘方垛表」,「乘方垛各廉表」,「二乘方支垛表」,「三乘方支垛表」;「三角自乘垛表」,「寅支垛表」,「卯支垛表」;「三角變垛表」,「三角再變垛表」,「三角三變垛表」,幷依 *Pascal* 三角形方式排列.

華蘅芳著開方古義二卷 (1880),對於四元玉鑑中「梯法七乘方圖」,及「古法七乘方圖」之功用,頗有道前人之所未道者,在中國算學史上極有價值.[5]

其在日本,則村井中漸之算法童子問 (1781) 亦記 *Pascal* 三角形,其式如下:——



(5) 見鄭之蕃四元開方釋要,清華學報第一卷第二期,第270頁.民國十三年(1924)十二月,北京.

此則傳自中國爲無疑也.[6]

6. Pascal 三角形年表

吾國之論 *Pascal* 三角形者,較之 *Pascal* 或先四百年,或先三百五十年,或先二百年.卽視 *Petrus Apianus* 亦有先二百六十六年者.吾國數學之具世界性質者,此亦其一.爰編爲年表,以備比較.其論述後於 *Pascal* 者,最列一二人,不具詳焉.

年表

歐洲	中日	
	楊輝	1261
	朱世傑	1303
	吳敬	1450
Petrus Apianus (1495–1552). 1527		
Michael Stifel (1489–1567). 1544		
Johann Scheubel (1494–1570). 1545		
Jacques Peletier (1517–1582). 1549		
Nicolo Tartaglia (c. 1500–1557). 1565		
	周述學	1558
Rafael Bombelli (1530–?–?). 1572		
	程大位	1593
	同文算指通編	c. 1615
	西鏡錄	c. 1620
William Oughtred (1574–1660). 1631		
Blaise Pascal (1623–1662). 1654		
	梅文鼎	1692
	村井中漸 (日)	1781

(6) 遠藤利貞遺著大日本數學史第 390—391 頁.又 *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. II. p. 511, 1925, Boston.

中算家之方程論

目次

(一) 中國古代之開方說

1. 總說
2. 九章算術等書之開方說

(二) 宋元明之方程論

3. 宋劉益,賈憲
4. 宋秦九韶正負開方術
5. 元李冶正負開方術
6. 元朱世傑正負開方術
7. 明代算家之開方法
8. 利瑪竇開方奇零法

(三) 清算家之方程論

9. 清梅文鼎
10. 數理精蘊
11. 清孔廣森,焦循
12. 清汪萊
13. 清李銳,顧觀光
14. 清羅士琳,易之瀚,汪香祖
15. 清戴煦,項名達
16. 偉烈亞力
17. 清鄒伯奇,夏鸞翔
18. 清華蘅芳
19. 傅蘭雅
20. 清龔傑

(一) 中國古代之開方說

1. 總說

方程論範圍至廣,吾國九章中之方程,各古算書之開平立方,與近代之羣論,幷在其列.此篇專述中國古代之開方說,及宋元以來之正負開方術,就中宋元以前史實,拙著中國數學大綱上册,論述頗詳.今茲僅舉大義.其時算家僅認方程式有一正根,方程式學說尙未完全成立.淸之中葉,此學復興,算家輩出.雖其時西洋於方程式論已具基礎定理,中算家於此閉關時代,能獨自發揮光大,彌足珍貴.海通以後,譯著流傳,頗多裨益,今分述如次.

2. 九章算術等書之開方說

開方說之見於九章算術卷四者,謂:「置積爲實,借一算步之,超一等,議所得,以一乘所借一算爲法,而以除,除已,倍法爲定法,其復除,折法而下,復置借算,步之如初,……」,而孫子算經卷中,張丘建算經卷中,夏侯陽算經卷上,五經算術卷上所記幷同.開方不盡,在周髀則僅題「有奇,」在九章則有「以面命之」之說,此外又有下之二式:

(一)不加借算,如孫子算經:

$$\sqrt{234567}=484\frac{311}{968}$$

即 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a},$$

(二)加借算,如五經算術:

$$\sqrt{9000000000}=94868\frac{62576}{189737},$$

即 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

及張丘建算經:

$$\sqrt{175692}=419\frac{131}{839}$$

即 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

$$\sqrt{13068}=114\frac{72}{229}$$

即 $$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1},$$

甄鸞註周髀算經:

$$\sqrt{14208000000}=119197\frac{75191}{238395}.$$

(三)以奇命之,如夏侯陽算經:

$$\sqrt{522900}=723\text{ 奇 }171.$$

就中以奇命之,祇可視爲一種記法.劉徽註九章少廣章「開之不盡者,爲不可開,當以面命之,」稱:「……故惟以面命之,爲不失耳,譬猶以三除十,以其餘爲三分之一,而復,其數可舉」,蓋以奇命之,以面命之,爲一法也.至小數開方之法,劉徽注九章實著其說,謂:「加定法如前,求其微數,微數無名者,以爲分子.其一退以十爲母,其再退以百爲母,……退之彌下,其分彌細」,故:

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times 1518\frac{3}{4}}=138.1$$

$$=138\frac{1}{10}$$

$$\sqrt{\frac{314}{25}\times\ 300}\ =61.38=61\frac{38}{100}$$

$$=61\frac{19}{50}$$

唐劉孝孫細草,夏侯陽算經復應用加借算之法於開立方,

如 $\sqrt[3]{1572864}=116\frac{11968}{40369}$,

即 $\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+1}$

$$\sqrt[3]{1293732}=108\frac{34020}{34993}$$

其在國外,亞拉伯人 *Al-Karkhi* 於十一世紀始謂:

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a},$$

$$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a+1};$$

意大利人 *Leonardo Fibonacci* 於十三世紀始謂:

$$\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a(a+1)+1},^{(1)}$$

唐王孝通緝古算經(約627—644)應用之方程式,有:

$X^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+px^2=A$ 各式,并以 A 爲實,p 爲方法,q 爲廉法;方廉法且并爲正數.九章算術少廣章開平方,開立方,既得初商後,即爲帶從開方,帶從立方.故緝古算經於 $x^3+px^2+qx=A$ 式,術曰:以從開立方除之,并不言其草也.

(1) 見 *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. I, p. 284, 1923, Vol. II, p. 255. 1925, Boston 及 *H. G. Zeuthen's Histoire des Mathematiques dans l'Antiguità et le Moyen Age*, translated by *J. Mascart*, *Paris*, 1902, p. 273.

(二) 宋元明之方程論

3. 宋劉益賈憲

宋劉益中山人,以句股之術,治演段鎖方,作議古根源(約 1080),撰成直田演段百問,其書所舉帶從開方,雖僅及二次式,已與和涅(*Horner*)法(1819)相似.後此賈憲黃帝九章細草(約 1200),秦九韶數書九章(1247)李治測圓海鏡(1248),益古演段(1259),郭守敬授時曆(1280),朱世傑四元玉鑑(1303)所引正負開方術,幷本於此.故楊輝謂劉益帶益隅開方實冠前古.(2)

賈憲爲楚衍弟子,有算法斅古集二卷,(3)宋楊輝稱黃帝九章……聖宋右班(殿)值賈憲撰草.(4)宋史稱賈憲黃帝九章細草九卷(5)是也.楊輝詳解九章算法引有賈憲立成釋鎖平方及立方法.又引賈憲遞增三

---

(2) 宋楊輝田畝比類乘除捷法序第一頁稱:「中山劉先生……撰成直田演段百問」,卷下第三,第14頁,稱:「中山劉先生……議古根源故立演段百問」,算法通變本末稱:「劉益以句股之術治演段鎖方,撰議古根源二百問,帶縱益隅開方,實冠前古」.

(3) 黃鍾駿疇人傳四編卷五,第5頁引鄭樵通志及宋王洙王氏談錄.

(4) 宋楊輝九章算法纂類第1頁,宜稼堂叢書本.

(5) 宋史卷二百零七,藝文志一百六十,藝文六.

乘開方法,可以和渥相類之法記之,如:

$$x^4-1336336=0,\quad x=34$$

$$1(10)^4+\quad 0\times(10)^3+\quad 0\times(10)^2+\quad 0\times(10)-1336336\ \lfloor\underline{30}$$
$$+\ 30\times(10)^3+\ 900\times(10)^2+\ 27000\times(10)+\ 810000$$

$$1(10)^4+\ 30\times(10)^3+\ 900\times(10)^2+\ 27000\times(10)-\ 526336$$
$$30\times(10)^3+1800\times(10)^2+\ 81000\times(10)$$

$$1(10)^4+\ 60\times(10)^3+2700\times(10)^2+108000\times(10)-\ 526336$$
$$30\times(10)^3+2700\times(10)^2$$

$$1(10)^4+\ 90\times(10)^3+5400\times(10)^2+108000\times(10)-\ 526336$$
$$30\times(10)^3$$

$$1(10)^4+120\times(10)^3+5400\times(10)^2+108000\times(10)-\ 526336$$

又

$$1(10)^4+120\times(10)^3+5400\times(10)^2+108000\times(10)-\ 526336\ \lfloor\underline{4}$$
$$4\times(10)^3+\ 496\times(10)^2+\ 23584\times(10)+\ 526336$$

$$1(10)^4+124\times(10)^3+5896\times(10)^2+131584\times(10)+0$$

4. 宋秦九韶正負開方術

宋秦九韶著數書九章十八卷 (1247) 而古正負開方術顯.其術與和渥法 (1819) 完全相似.其開方不盡者,或:

(1)進一位,如 $\sqrt{8000}=89+=90$;

(2)加借算,如 $\sqrt{640}=25\frac{15}{2\times25+1}=25\frac{5}{17}$,

此加借算之法,自古已有,祇及於開平立方,秦氏則擴充而應用於多乘方,

如方程式 $-x^4+15245x^2-6262506.25=0$,

初商 $x=20$ 後,變原式為

$$-x^4-80x^3+14045x^2+577800x-324506.25=0.$$

假定此變式根數為 1, 故「以方,廉,隅,各數,正負相併為分母,餘實為分子」,

即 $$x=20\frac{324506.25}{590564}$$

或 $$x=20\frac{1289025}{2362256}.$$

或所得分數為負數時,則當棄此分數不用,如數書九章卷十二,「囤積量容」題:

$$16x^2+192x-1863.2=0,$$

$$x=6.35-\frac{1.06}{3.9456}=6.35$$

又 $$36x^2+360x-13068.8=0,$$

$$x=14.7-\frac{2.44}{139.68}=14.7,$$

所謂「實不及收,就續商」也.

(3)退商進求小數,有「進退開除」之法,如卷十二,「囤積量容」題:

$$16x^2+192x-1863.2=0,\quad x=6.35.$$

又 $$36x^2+360x-13068.8=0,\quad x=14.7$$

是也.

秦九韶又於數書九章卷六「漂田推積」題 $121x^2-43264=0$ 稱「開方不盡,以連枝術入之,用隅乘實得定實,以1爲隅,」蓋上式依正負開方術,開得 $x=18$,尚有不盡,得變式之根

$$x=\frac{y}{n},$$

而 $$n=121,$$

代入原式得

$$y^2-121\times43264=0,$$

$$y=2288,$$

即 $$x=\frac{y}{n}=\frac{2288}{121}=18\frac{10}{11}.$$

又卷七「臨臺測深」題,「開同體連枝平方」其術中夾註稱:「同體格先以隅開平方,得數名同隅,以同隅乘定實開之,得數爲實,以同隅爲法除之,得(商)」.例如

$$121x^2-43264=0,$$

$$\sqrt{121}=11,$$

以 $$x=\frac{y}{n}=\frac{y}{11}$$

代入原式得:

$$y^2-43264=0,$$

$$y=208,\quad x=18\frac{10}{11}.$$

其義蓋與方程論求有理數根之法相同.

5. 元李治正負開方術

元李治著測圓海鏡十二卷(1248),益古演段三卷(1259).其論方程式變式,有益積,倒積,翻法或翻之別.就中益積并益在積,與秦九韶之投胎相同,與楊輝之益積或益隅,略有差異.而倒積,翻法意義相同.其言翻法或翻在實,卽秦九韶之換骨,亦有翻在從者.又有倒積倒從開平方,則因初商後所得變式之從,實符號,全與原式相反也.蓋普通初商後所得變式,實多漸小,如加多而生益積,倒積,則當特別注意,慮布算或有差誤也.其開方不盡者,有連枝同體術,見益古演段第四十問,如 $-22.5x^2-648x+23002=0$,平方開之,「今不可開,先以隅法22.5乘實23002得517545爲實,元從 -648 依舊爲從,-1 爲益隅」,

卽令 $y=nx=22.5x$

代入得

$$-y^2-648y+517545=0,$$

$$y=465,\ x=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}.$$

此與秦九韶朱世傑之連枝同體術,并因知原式開方不盡,故先變原式之根,令 $x=\frac{y}{n}$ 代求原根也.

6. 元朱世傑正負開方術

元朱世傑著算學啓蒙三卷 (1299), 四元玉鑑三卷 (1303). 其論變式,於算學啓蒙卷下開方釋鎖門言:「平方翻法開之,」「三乘方翻法開之」,并翻在從,不翻在實,與秦九韶之翻法,換骨,楊輝之翻積,并異其義.至四元玉鑑則不論及翻法,其開方不盡者,或:

(1)退商進求小數,如算學啓蒙「開方釋鎖」第十九問:

$$x^2-4.25x+1=0,\quad x=0.25$$

四元玉鑑「鎖套吞容」第十四問:

$$6x^2+49x-1176=0,\quad x=10\tfrac{1}{2};$$

四元玉鑑「鎖套吞容」第十七問:

$$135x^2+4608x-138240=0,\quad x=19.2;$$

四元玉鑑「雜範類會」第十三問:

$$x^2-10x-1.96=0,\quad x=0.2$$

是也.

(2)開方不盡命分,即加借算,如四元玉鑑「三率究圓」第十一問:

$$x^2-265=0,\ x=16\frac{9}{2\times16+1}=16\frac{9}{33}=16\frac{3}{11},$$

同書「三率究圓」第十三問:

$$x^3-574=0,\ x_1=8$$

後,變式爲

$$x_2^3+24x_2^2+192x_2-62=0,$$

「方,廉,隅同名相併爲分母,餘實異名爲分子,」

得 $$x_2=\frac{62}{1+24+192}=\frac{62}{217}=\frac{2}{7},$$

故 $$x=x_1+x_2=8\frac{2}{7}.$$

同書「鎖套吞容」第十九問:

$$x^2+252x-5290=0,\quad x_1=19$$

後變式爲

$$x_2^2+290x_2-143=0,$$

如前題得

$$x_2=\frac{143}{1+290}=\frac{143}{291},$$

故 $$x=x_1+x_2=19\frac{143}{291}.$$

(3)「以連枝同體術求之」其例秦九韶李冶曾有

說述,僅用於開平方,今朱氏亦然,如四元玉鑑「端匹互隱」第一問:

$$-8y^2+578x-3419=0,$$

令 $x=\frac{y}{8}$,

則 $$-y^2+578y-3419\times 8=0,$$

$$y=526, \quad x=\frac{526}{8}=65\frac{3}{4},$$

同書「和分索隱」第一問:

$$2500x^2-105625=0,$$

令 $x=\frac{y}{50}$,

則 $$y^2-105625=0,$$

$$y=325,$$

$$x=\frac{325}{50}=6\frac{1}{2}.$$

同書「三率究圓」第二問:

$$24649x^2-1562500=0,$$

令 $x=\frac{y}{157}$,

則 $$y^2-1562500=0,$$

$$y=1250,$$

$$x=\frac{1250}{157}=7\frac{151}{157}.$$

(4)「以之分法或之分術」求之,如四元玉鑑「和分索隱」第十三問術,則因方程式

$$576x^4-2640x^3+1729x^2+3960x-1695252=0,$$

得$x_1=8$後,變式爲

$$576x_2^4+15792x_2^3+159553x_2^2+704392x_2-545300=0,$$

令　$x_2=\frac{y}{576}$,

則上式化爲

$$y^4+15792y^3+91902528y^2$$
$$+233700360192y-104208452812800=0,$$

$$y=384,$$
$$x_2=\frac{384}{576}=\frac{2}{3},$$

故　$$x=x_1+x_2=8\frac{2}{3},$$

此外「和分索隱」第二至第十二問,「三率究圓」第四問:

$$121x^2-7856=0,\ x=7\frac{7}{11},$$

「撥換截田」第三問:

$$-9x^2+2500=0,$$
$$x=16\frac{2}{3},$$

「鎖套呑容」第十八問:

$$15x^2-128x-960=0,$$

$$x=13\frac{1}{3},$$

「雜範類會」第三問:

$$63x^2-740x-432000=0,$$

$$x=88\frac{8}{9}$$

幷如前術求之.蓋之分法於原方程式先求得大數,次於變式按連枝同體術,令 $x_2=\frac{y}{n}$ 求其小數,此連枝同體術及之分法之所以異.清羅士琳(?—1853)幷二者爲一,失其原義矣.

7. 明代算家之開方法

宋初劉益有帶從開平方法,爲宋元算家增乘方法之祖.其法視增乘方法爲繁.例如平方式

$$ax^2+bx+c=0,$$

而 $$x=x_1+x_2,$$

則商 x_1 後得變式

$$ax_2^2+(2a+b)x_2+c_1=0,$$

則 $$x_2=\frac{-c_1}{(2a+b)+ax_2},$$

惟自賈憲發明增乘方法之後,此法久廢.至郭守敬(1231—1316)授時曆(1280)復應用其術於正負開方.明

史曆志所引割圓求矢術是也.明顧應祥(1483−1565)句股算術三卷(1533)亦用以求開立方及三乘方,例如立方式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

而

$$x=x_1+x_2,$$

則商x_1後得變式

$$ax_2^3+(3ax_1+b)x_2^2+(3ax_1^2+2bx_1+c)x_2+d_2=0,$$

則 $$x_2=\frac{-d_2}{(3ax_1^2+2bx_1+c)+(3ax_1+b)x_2+ax_2^2},$$

同理, $$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

則 $$x_2=\frac{-e_2}{(4ax_1^3+3bx_1^2+2cx_1+d)+(6ax_1^2+3bx_1+c)x_2+(4ax_1+b)x_2^2+ax_2^3}$$

就中x_2稱爲上法,右邊之分母,稱爲下法;右邊之分子,稱爲餘實.約商時分母下法之各項,不必全然記出

8. 利瑪竇開方奇零法

利瑪竇(*Ricci Matteo*, 意大利人,1552−1610)遺著同文算指通編,其卷八,開平奇零法第十三謂:

$$(1)\qquad f(x)=x^2-N=0.$$

令 $a<x<a+1,$

則原式商a後,得變式

$$f'(x)=x^2+2ax^2-N+a^2=0,$$

假令此變式根數爲 1,

則 $$x=a\frac{a^2-N}{2a+1},\text{或 } x=a+\frac{r}{2a+1},$$

因 $$a\frac{r}{2a+1}<x,\text{卽 } a+\frac{r}{2a+1}+h=x,$$

則用「中比例續商法」,(6) 續商可以比例求得,其比例式如下:

$$\frac{N-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)^2}{\left[\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)+h\right]-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)}$$

$$=\frac{(a+1)^2-\left(a+\frac{r}{2a+1}\right)^2}{(a+1)-a}$$

$$\frac{\frac{S}{(2a+1)^2}}{h}=\frac{(2a+1)+\frac{r}{2a+1}}{1}$$

$$h=\frac{S}{(2a+1)^2}\div\frac{(2a+1)^2+r}{(2a+1)},$$

(6) 此名詞見鄒伯奇(1819—1869)乘方演草附開方草,以其用意相似,故借用之。

$$\sqrt{N}=x=a+\frac{r}{2a+1}+\left[\frac{S}{(2a+1)^2}\div\frac{(2a+1)^2+r}{(2a+1)}\right].$$

例如　$\sqrt{20}=4+\frac{4}{9}+\left(\frac{20}{81}\div\frac{85}{9}\right)=4\frac{8}{17},$

而　$\left(4\frac{8}{17}\right)^2=19\frac{285}{289}.$

前商未盡,欲盡之,再依前法開除,此一法也.

(2)　$f(x)=x^2-N=0,\ a+\frac{r}{2a+1}<x$ 時,

則　$a+\frac{r}{2a}>x$,或 $a+h>x$,

則　$\frac{(a+h)^2-N}{(a+h)\ -x}=\frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)\ -a},$

而　$x=(a+h)-\frac{(a+h)^2-N}{2a+h}$

或　$x\doteqdot(a+h)-\frac{(a+h)^2-N}{2(a+h)}$

例如:　$\sqrt{20}=4\frac{4}{8}=4\frac{1}{2}$時,

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^2=20\frac{1}{4}$$

$\sqrt{20}=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$時,

$$\left(4\frac{17}{36}\right)^2=20\frac{1}{1296}$$

$$\sqrt{20}=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{5473}{11592}\text{時},$$

$$\left(4\frac{5473}{11592}\right)^2=20\frac{1}{134374464}.$$

開平方則列實自末位下點記之,每隔位一點,如$\sqrt{\dot{4}5\dot{6}7\dot{8}9\dot{0}1\dot{2}}$,與 *Gemma Frisius* (1540) *L. Schoner* (1586), *Peletier* (1549), *Santa-Cruz* (1549), 及 *Metius* (1625) 諸人,所記相同.(7) 利瑪竇於幾何原本內所稱丁先生卽*Christopher Clavius*, 1537—1612. 故同文算指似卽本於 *Clavius, Epitome Arithmeticae Praticæ, Rome*, 1583.(8)

(三) 清算家之方程論

9. 清梅文鼎

清梅文鼎(1633—1721)少廣補遺(約 1692)論開一乘方至十二乘方之法,蓋應用 *Pascal* 三角形,如

$$f(x)=x^n-A=0.$$

初商x_1後,餘實A',續求次商因:

(7) 參觀 *D. E. Smith, History of Mathemetics* Vol. II, pp. 146-147, 1925, Boston

(8) 參觀 *Samuel Couling, The Encyclopaedia Sinica,* pp. 482-483, 1917, 上海.

定率	乘初商	得汎積	又乘次商	得定積
n	$\times x_1^{n-1}$	$=nx_1^{n-1}$	$\times x_2$	$=nx_1^{n-1}x_2$
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\times x_1^{n-2}$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-2}$	$\times x_2^2$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-3}x_2^2$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$	$\times x_1^{n-3}$	$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}$	$\times x_2^3$	$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}x_2^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\times x_1^2$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^2$	$\times x_2^{n-2}$	$=\frac{n(n-1)}{2!}x_1^2x_2^{n-2}$
n	$\times x_1$	$=nx_1$	$\times x_2^{n-1}$	$=nx_1x_2^{n-1}$
1	$\times x_1^0$	$=1$	$\times x_2^n$	$=x_2^n$

故 $x=x_1+x_2$, 則:

$$f(x)-x_1^n=nx_1^{n-1}x_2+\frac{n(n-1)}{2!}x_1^{n-2}x_2^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x_1^{n-3}x_2^3+\cdots\cdots+x_2^n=A'.$$

如有續商,可同樣代入求得.

10. 數理精蘊

數理精蘊五十三卷以雍正元年(1723)成書,此書號稱清聖祖御製,實多譯述西洋作品.下篇卷二十四論帶縱立方,共分九種如下:

$$x^3 \pm bx = k \qquad (1),(2)$$

$$x^3 \pm ax^2 = k \qquad (3),(4)$$

$$x^3 \pm ax^2 \pm bx = k \qquad (5),(6),(7),(8)$$

$$-x^3 + ax^2 = k \qquad (9)$$

就中(1)至(8)式,解法相同,如(5)式

$$x^3 + ax^2 + bx = k$$

先以$x = x_1$代入原式,得

$$f(x_1) = x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 - k = k_1$$

不盡k_1者,爲次商積,由此知原式得變式:

$$f'(x_2) = x_2^3 + (3x_1 + a)x_2^2 + (3x_1^2 + 2ax_1 + b)x_2 - k_1 = 0,$$

略去首二項,

則 $$(3x_1^2 + 2ax_1 + b)x_2 - k_1 = 0,$$

即 $$x_2 = \frac{k_1}{3x_1^2 + 2ax_1 + b},$$

由此可約次商x_2.

以 $x = x_1 + x_2$ 代入原式,如前減積,如無餘,即爲所求

正根,有餘再續商之.案數理精蘊此法,即華譯代數術(1873)卷十六,第155款中所謂奈端之法(Newton,(1669)[9]

在(9)式 $$-x^3+ax^2=k.$$

先化得

$$x^2-\frac{x^3}{a}=\frac{k}{a}=k_1.$$

如前 $$f(x_1)=k_2,$$

$$f'(x_2)=-\frac{x_2^3}{a}+\left(1-\frac{3x_1}{a}\right)x_2^2$$

$$+\left(2x_1-\frac{3x_1^2}{a}\right)x_2-k_3=0,$$

略去 x_2^2, x_2^3 諸項,

則 $$x_2=\frac{k_3}{\left(2x_1-\frac{3x_1^2}{a}\right)}.$$

其三乘四乘五乘(即四次,五次,六次方程式)并依前例,得初商 x_1 後,將變式 x_2 之係數除餘實,約得次商 x_2,如前得 $x=x_1+x_2$. 數理精蘊卷十六「新增按分作相連比例四率法」又有一例

$$x^3-ax+b=0,$$

(9) 參觀倪德基譯方程式論 § 57, p. 79, 民國十五年(1926)上海,及 D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol. II, p. 473. 1925, Boston.

則以代入法約得之.

11. 清孔廣森焦循

清初首研宋元算書者,爲孔廣森(1752—1786)焦循(1763—1820).孔廣森少曾師事戴震(1724—1777),及官翰林,與窺中祕,見王氏緝古,秦氏數書,李氏演段,海鏡諸書.著有少廣正負術內外篇凡六篇.其少廣正負術內篇中論立方,舉例如:—

帶從立方一	$x^3+156x=3600$,	$x=12$,
帶從立方二	$x^3+13x^2=3600$,	$x=12$,
帶從立方三	$x^3+5x^2+96x=3600$,	$x=12$,
帶從立方四	$x^3+20x^2-84x=3600$,	$x=12$,
減從立方一	$x^3-84x=720$,	$x=12$,
減從立方二	$x^3-7x^2=720$,	$x=12$,
減從立方三	$x^3-3x^2-48x=720$,	$x=12$,
減從立方四	$x^3-82x^2+900x=720$,	$x=12$,
負隅立方一	$-x^3+384\,x=2880$,	$x=12$,
負隅立方二	$-x^3+32\,x^2=2880$,	$x=12$,
負隅立方三	$-x^3+15\,x^2+204\,x=2880$,	$x=12$,
負隅立方四	$-x^3+40\,x^2-96\,x=2880$,	$x=12$,
負隅立方五	$-x^3-7\,x^2+468\,x=2880$,	$x=12$,

連枝正隅立方一 $2x^3+x^2-225x=900,$ $x=12.$

連枝負隅立方二 $-2x^3+9x^2+255x=900,$ $x=12,$

正負方廉十三種,皆可帶連枝隅法,特設二例如前.

其開方之法,

則 $$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

商 x_1 後餘實 e_2, 孔廣森設次商 x_2,

以 $b(x_1+x_2)^2+d$ 爲右定,

$a[x_1{}^2+(x_1+x_2)^2]+c$ 爲左泛,

$(2x_1+x_2).\{a[x_1{}^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}$ 爲左定.

$$x_2=\frac{\text{餘實}}{\text{右定}+\text{左定}}$$

$$=\frac{-e_2}{\{b(x_1+x_2)^2+d\}+(2x_1+x_2)\{a[x_1{}^2+(x_1+x_2)^2]+c+bx_1\}}$$

焦循(1763—1820)於歲乙卯(1795)始見益古演段,測圓海鏡二書,後又得秦九韶數書大略,撰爲天元一釋,開方通釋二書,爲淸代算家硏究宋元算學之處女作.庚申(1800)冬,焦循與李銳(1768—1817)同客杭州,又明年(1801)汪萊(1768—1813)到揚州,幷相討論及之.

12. 淸汪萊

淸汪萊(1768—1813)首言方程式不僅有一正根

其所著衡齊算學第五册(約1801)言每根之數,知不知條目.共設九十六條,例如

第一條	$x^2-bx-c=0$,	可知
第五條	$x^2-bx+c=0$,	不可知
第五十條	$ax^3+bx^2-cx-d=0$,	可知
第五十五條	$ax^3-bx^2-cx+d=0$,	不可知
第五十一條	$ax^3-bx^2+cx-d=0$,	可知,不可知.

蓋二次方程式「可知」卽有一正根,「不可知」卽有二正根,

三次方程式「可知」卽有一正根,「不可知」卽有一正根以上,

三次方程式「可知,不可知,」卽有一正根或三正根.

汪萊雖未言其故,然已與狄卡德(*Descartes*, 1637)符號之法則,具同等觀念.汪萊又於衡齊算學第七册,言方程式可由因數配成,如:

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

$$x^3+3x^2-70x-144=(x-8)(x+2)(x+9)$$

$$6x^4-5x^3-x^2-10x+24=(2x^2-5x+4)(3x^2+5x+6)$$

此題無數.汪萊又於衡齊算學第七册言「審有無,」卽求方程式之判別式,惟僅二次式

$$ax^2+bx+c=0, \frac{c}{a} \leqq \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

者有根數,

$$\frac{c}{a} > \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

者無根數一題,合於理論.

13. 清李銳願觀光

清李銳(1768—1817)遺著開方說三卷,卷上首論實數符號(正負)與其正根(可開數)之關係.謂:「四次方程式上負,次正,次負,下正(− + − +)可開三數或一數;上負;次正,次負,下負(− + − −)可開四數或二數.」又謂:「其二數不可開,是為無數,凡無數必兩無無一數者,」此卽方程式論之基本性質,所謂狄卡德符號之法則(*Descartes' rule of signs*)所謂方程式 $f(x)=0$ 之係數為實數,則其正根與符號之變遷之數相同,或較少一偶數.[10] 又定理所謂若 $f(x)=0$ 之諸係數,皆為實數,則此方程式之複虛根(*Complex roots*)成對[11].卷下又論方程式之簡單變形,卽根之符號之變換,乘以一已知數之根,或除以一已知數之根諸問題.

(10) 參觀倪譯方程式論. § 11, 第 8 頁.

(11) 參觀倪譯方程式論 § 8,第 6 頁.

李銳於開方說卷上又言:「凡實不盡則有之分,借一算爲商,如前求得方,以方減實,實不足減,方爲母,實爲子」.

例如

$$-x^2+13x-31=0$$

得 $x_1=3$ 後,變式

$$-x_2^2+7x_2+1=0,$$

$$x_2=\frac{1}{6},$$

$$x=3\frac{1}{6};$$

又 $$-x^2+13x-31=0$$

得 $x_1=9$ 後,變式

$$-x_2^2-5x_2+5=0,$$

$$x_2=\frac{5}{6},$$

$$\therefore \quad x=9\frac{5}{6}.$$

此則宋元算家,屢有其例.卷中言二次方程式之略近值計算,如

$$-x^2+10x+23=0,$$

求得 $x_1=3$ 後,變式得

$$-x_2^2+4x_2-2=0$$

先用加借算法，

得
$$x_2=\frac{2}{3},$$

又因方程式

$$-x_2^2+4x_2-2=0,$$

x_2 之係數爲4，

故 x_2 之又一根爲

$$4-\frac{2}{3}=3\frac{1}{3},$$

則
$$x=x_1+x_2=3\frac{2}{3}\text{ 及 }6\frac{1}{3},$$

爲原方程式之略近值.然亦有誤解之處,如卷中

$$5x^3-154x^2+1281x-1836=0,$$

應有三根 $x=17,12,1\frac{4}{5}$, 不作 $1\frac{704}{854},12,17.$

$$3x^3-49x^2+230x-288=0,$$

應有三根 $x=9,2,5\frac{1}{3}$,不作 $2,5\frac{10}{36},9.$

$$7x^3-204x^2+1367x-1974=0,$$

應有三根 $x=2,7,20\frac{1}{7}$,不作 $2,7,20\frac{234}{1830}$

也.顧觀光(1799—1862)算賸餘稿上開方餘議(1855)曾駁李銳開方說數條,但李銳大致原無可議,顧氏似不明方程式論,故反多誤解也.

14. 清羅士琳,易之瀚,汪香祖.

清羅士琳(?—1853)四元玉鑑亞草二十四卷,有羅氏道光甲午(1834)自記,李棠道光乙未(1835)跋,易之瀚記(1837),張岳崧敍(1838).(12) 易之瀚有釋例一卷(1837),羅士琳又補增例一卷(1838).

今先言易氏之釋例,易氏釋例,乃點竄李銳之開方說,謂開方有續開,代開二法.

續開法者

$$f(x)=-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得 $x_1=-5$ 後,以和涅法得變式

$$-x_2{}^2+21x_2-104=0,$$

續開得 $x_2=8$ 及 13,

則 $x=x_1+x_2$,

$$\begin{array}{lll} x_1=-5 & x_1=-5 & x_1=-5 \\ \underline{x_2=\quad 0} & \underline{x_2=\quad 8} & \underline{x_2=\ 13} \\ x=-5, & x=\quad 3, & x=\quad 8. \end{array}$$

代開法者

$$f(x)=-3x^3+59x^2-357x+621=0,$$

得$x_1=7$後,以和涅法得變式

$$-3x_2^3-4x_2^2+28x_2-16=0,$$

借商 $x_2=1,$

則 $x=7\frac{16}{17}.$

關於續開,代開所得分數,李銳已有誤解.易氏亦因其誤.例如:

$$-3x^3+59x^2-357x+621=0,$$

$$x=3,9,7\frac{1}{3},$$

不作 $x=3,9,7\frac{16}{21}$

也.

易之瀚又言方程式$f(x)=0$,初商,次商大率皆以5約商之,蓋5爲中數,便於進退故也.例如:

$$25x^2-28x-56256=0,$$

先令 $x_1=50,$

得一變式 $25x_2^2+2472x_2+4844=0,$

(12) 關於四元玉鑑流傳大概,可參觀李儼中算家之級數論,科學第十三卷,第十期,p. 1369.民國十八年(1929),上海.

次令 $x_2=-5$,

得二變式 $25x_3^2+2222x_3-6891=0$,

終令 $x_3=3$,

得末變式 $25x_4^2+2297x+0=0$,

則 $x=x_1+x_2+x_3=50-5+3=48$

是也.

羅士琳補增例謂方程式

$$8x^3-20x^2+6x+9=0,$$

得 $x_1=\frac{3}{2}$ 後,以和湼法得變式

$$8x^3+16x^2=0,$$

其中 x 及 x° 二項之係數爲零,則原式有二重根.

又 $-x^3+65x^2-1392x+9792=0$,

得 $x_1=24$ 後,變式

$$-x^3-7x^2=0,$$

其中 x 及 x° 二項之係數爲零,則原式亦有二重根.

汪香祖衍元筆算今式 (1862) 謂方程式代開法有寄位代開,及較數代開二法.

(1)寄位代開.

$$-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得 $x=8$ 後,以 $x-8=0$ 除原式,得

$$-x^2-2x+15=0,$$

續商,得 $x=3$ 及 5.

(2)較數代開,即易之瀚之續開法.

$$-x^3+6x^2+31x-120=0,$$

得 $x_1=-5$ 後,以和湼法得變式

$$-x_2{}^2+21x_2-104=0,$$

續得 $x_2=8$ 及 13.

$$\begin{array}{lll} x_1=-5 & x_1=-5 & x_1=-5 \\ \underline{x_2=\quad 0} & \underline{x_2=\quad 8} & \underline{x_2=\quad 13} \\ x=-5, & x=\quad 3, & x=\quad 8. \end{array}$$

15. 清戴煦項名達

戴煦(1805—1860)首於對數簡法(1845)中,論級數代開方之法,其術有:

(1) $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{G}{2A}+\frac{1}{4}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}+\frac{7}{10}\cdot E\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=P'.$$

(2). 上式得 P' 後,可更代入,求其密數.

(3) $N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$先用三數入算.

$$= P^{\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{Q}{2A} + \frac{1}{4} \cdot B \cdot \frac{Q}{P} \right\} = a + \frac{b}{100}$$

$$= \left(a + \frac{b}{100}\right) - \left\{ \frac{Q'}{2A} + \frac{1}{4} \cdot B \cdot \frac{Q'}{P'} \right\}$$

....

(4) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10} + \frac{b}{10^2} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$ 時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{10}\right)\right\}$

爲第一數入算.

(5) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10^2} + \frac{b}{10^3} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$ 時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{10^2} + \frac{b}{10^3}\right)\right\}$

爲第一數入算.

(6) $N^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{a}{10^3} + \frac{b}{10^4} + \cdots\cdots\right)^{\frac{1}{2}}$ 時,

可令 $P^{\frac{1}{2}} = \left\{1 + \left[\frac{N-1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{N^2-1}{2} - N\right)\right]\right\}$

爲第一數入算

(7) 以積較術(*Method of finite difference*)求 $N^{\frac{1}{2n}}$ 之根.

例如 $N=1+Q,\ N^{\frac{1}{2}}=1+Q_1,\ N^{\frac{1}{4}}=1+Q_2,\ N^{\frac{1}{8}}=1+Q_3,\ N^{\frac{1}{16}}=1+Q_4,$

求 $N^{\frac{1}{32}}=1+Q_5.$

$$Q,\qquad Q_1,\qquad Q_2,\qquad Q_3,\qquad Q_4,\ \left(\frac{Q_4}{2}-{}_1R_5\right)=Q_5$$

第一較 $\frac{Q}{2}-Q_1={}_1R_1,\ \frac{Q_1}{2}-Q_2={}_1R_2,\ \frac{Q_2}{2}-Q_3={}_1R_3,\ \frac{Q_3}{2}-Q_4={}_1R_4,\ \left(\frac{{}_1R_4}{2}-{}_2S_5\right)={}_1R_5,$

第二較 $\frac{{}_1R_1}{4}-{}_1R_2={}_2S_2,\ \frac{{}_1R_2}{4}-{}_1R_3={}_2S_3,\ \frac{{}_1R_3}{4}-{}_1R_4={}_2S_4,\ \left(\frac{{}_2S_4}{8}-{}_3T_5\right)={}_2S_5,$

第三較 $\frac{{}_2S_2}{8}-{}_2S_3={}_3T_3,\ \frac{{}_2S_3}{8}-{}_2S_4={}_3T_4,\ \left(\frac{{}_3T_4}{16}\right)={}_3T_5,$

第四較 $\frac{{}_3T_3}{16}-{}_3T_4=0,\ 0.$

逆求之,可得 Q_5,故 $N^{\frac{1}{32}}=1+Q_5.$

項名達(1789−1850)下學葊輯內,有開諸乘方捷術,自序稱乙巳(1845)秋杪因讀戴煦(1805−1860)對數簡法先得二術:

$$(1)\quad N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\left\{\frac{1}{n}A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{2n-1}{3n}.C.\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\}\qquad P>N.$$

$$(2)\quad N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\left\{\frac{1}{n}\cdot A.\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B.\frac{Q}{N}+\frac{2n+1}{3n}\cdot C.\frac{Q}{N}+\cdots\cdots\right\}\quad P<N.$$

又有二術,用「四率比例」求之.

$$(3)\qquad \frac{nP}{(n-1)P+N}=\frac{P^{\frac{1}{n}}}{N^{\frac{1}{n}}}\qquad P>N.$$

$$(4)\qquad \frac{(n+1)N}{(n+2)N-P}=\frac{P^{\frac{1}{n}}}{N^{\frac{1}{n}}}\qquad P<N.$$

項氏稱(3),(4)術數,頗驟降而驟升,先因之比例一,二次,使借積(P),密與本積(N)近,再代入(1),(2),則降位甚捷.

同時戴煦又爲補二術,亦見開諸乘方捷術中.

(1) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\frac{3n-1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots,$$

(2) $N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{3n+1}{4n}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}-\cdots\cdots,$$

戴煦又於續對數簡法(1846)歸納爲「以本數爲積求折小各率」四術:

(1) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$+\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots,$$ 項名達(2)

(2) $N^{\frac{1}{n}}=(P+Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{P}-\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}-\cdots,$$ 戴煦(1)

(3) $N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\left\{\frac{1}{n}\cdot A.\frac{Q}{P}+\frac{n-1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}\right.$$

$$\left.+\frac{2n-1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\},$$ 項名達(1) 戴煦七術

(4) $$N^{\frac{1}{n}}=(P-Q)^{\frac{1}{n}}$$

$$=P^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{n+1}{2n}\cdot B\cdot\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{2n+1}{3n}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots,$$ 戴煦(2)

又有「以本數爲根,求倍大各率」四術:

(1) $$N^m=(P+Q)^m$$

$$=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B.\frac{Q}{N}$$

$$+\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{N}+\frac{m+3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{N}+\cdots\cdots,$$

(2) $$N^m=(P+Q)^m$$

$$=P^m+m\cdot A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q}{P}$$

$$+\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{m-3}{4}\cdot D\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots,$$

(3) $$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\frac{m-1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{P+1}$$

$$-\frac{m-2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{P+1}+\cdots\cdots,$$

(4) $$N^m=(P+Q)^m$$

$$=(P+1)^m-m\cdot A\cdot\frac{Q-1}{N}+\frac{m+1}{2}\cdot B\cdot\frac{Q-1}{N}-\frac{m+2}{3}\cdot C\cdot\frac{Q-1}{N}+\cdots\cdots.$$

16. 偉烈亞力

偉烈亞力(*Alexander Wylie*, 1815−1887)於咸豐癸丑(1853)作數學啓蒙,其卷二「開諸乘方又捷法」謂:「無論若干乘方,且無論帶縱不帶縱,俱以一法通之,故曰捷法.此法在中士爲古法,在西士爲新法,上下數千年,東西數萬里,所造之法,若合符節,信乎此心同,此理同也,」所謂「又捷法」卽和湼法,故 $x^5-847288609443=0$, 依法求得 $x=243$, 咸豐九年(1859)偉烈亞力,李善蘭共譯英棣麼甘(*Augustus de Morgan*,1806−1871)代數學十三卷,其卷五「論一次二次式之義,及二次方程式之數學解」,於二次式根數(*root of equation*)討論甚詳.同年(1859)偉烈亞力,李善蘭又共譯米利堅羅密士(*Elias Loomis*, 1811−1899)代微積拾級十八卷,其中頗言函數變化次序.

17. 清鄒伯奇夏鸞翔

清鄒伯奇(1819－1869)曾於同治壬戌(1862)影寫項名達遺著全部,而夏鸞翔(1823－1864)父執則爲戴煦,故鄒,夏二氏實傳項戴之學.鄒伯奇著乘方捷術三卷,其書隱括董方立(祐誠1791－1823)割圜連比例,戴鄂士(煦)開方捷法之說,立開方四術:

$$(1)\quad (P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A.\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}B.\frac{Q}{P}+\frac{m-2n}{3n}C.\frac{Q}{P}+\frac{m-3n}{4n}D.\frac{Q}{P}+\cdots,\qquad \text{(Newton, 1676)}.$$

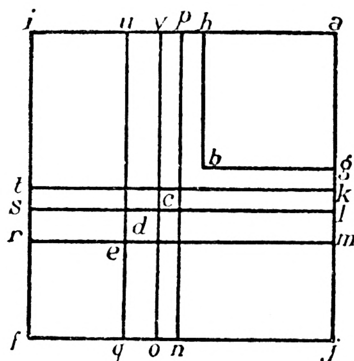
$$(2)\quad (P-Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}A.\frac{Q}{P}+\frac{m-n}{2n}B.\frac{Q}{P}-\frac{m-2n}{3n}C.\frac{Q}{P}+\cdots,$$

$$(3)\quad (P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A.\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}B.\frac{Q}{N}+\frac{m+2n}{3n}C.\frac{Q}{N}+\cdots,$$

$$(4)\quad (P-Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}A.\frac{Q}{N}+\frac{m+n}{2n}B.\frac{Q}{N}$$

$$-\frac{m+2n}{3n}C.\frac{Q}{N}+\cdots\cdots.$$

又演圖詳解,以明第二式應用於開平方之理.如下圖



□$ab=N$, □$af=P$. ⩓gjtihbg$=Q$.

$(uq\times iu)+(rm\times mj)=Q$, $2AB=Q$, $B=\dfrac{Q}{2A}$;

□$ef=B^2$, 同理 $(vo\times uv)+(sl\times lm)=B^2$,

$2AC=B^2$, $C=\dfrac{B^2}{2A}$;

……………………………

$$N^{\frac{1}{2}}=(P-Q)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(因\ \frac{Q}{2A}=B,\frac{B^2}{2A}=C,\frac{2BC}{2A}=D,\frac{C^2+2BD}{2A}=E.\right)$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{Q}{2A}+\frac{B^2}{2A}+\frac{(2B+C)C}{2A}+\frac{(2B+2C+D)D}{2A}\right.$$

$$\left.+\frac{(2B+2C+2D+E)E}{2A}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{Q}{2A}+\frac{B^2}{2A}+\frac{2BC}{2A}+\frac{C^2+2BD}{2A}+\frac{2CD+2BE}{2A}\right.$$

$$\left.+\frac{D^2+(2C+2D+E)E+}{2A}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=P^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{1}{2}A\cdot\frac{Q}{P}+\frac{1}{4}B\cdot\frac{Q}{P}+\frac{3}{6}C\cdot\frac{Q}{P}+\frac{5}{8}D\cdot\frac{Q}{P}\right.$$

$$\left.+\frac{7}{10}E\cdot\frac{Q}{P}+\cdots\cdots\right\}$$

鄒伯奇又立截算續商二法,在粟布演草附開方草之後,玆先論截算法.

設方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x-a_n(=A)=0,$

$$=(x-r)f'(x)+R=0$$

$$f'(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

而 $b_0=a_0,$

$b_1=a_1+b_0r,$

$b_2=a_2+b_1r,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}r,$$

$$R=b_n=-a_n+b_{n-1}r.$$

假令 $x=r$, 則 $R=0$, 又 $b_{n-1}r=a_n$.

$$r=\frac{a_n(=A)}{b_{n-1}} \quad\cdots\cdots(1)$$

故在方程式 $f(x)=0$ 中, a_n 及 a_{n-1} 之符號相異時,(或第一次 $x=r$ 代入後; b_{n-1} 及 a_n 之符號相異時), 則 x 之略近值

$$r_1=\frac{a_n}{b_{n-1}},$$

以之代入原式,可續得更近之略近值

$$r_2=\frac{a_n}{b_{n-1}},$$

逐次如是.

例如 $10x^6+58x^5+138x^4+170x^3+110x^2+30x-2=0.$

首令 $r_1=0.06$,

則

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 10+58 & +138 & +170 & +110 & +30 & -2 & \underline{0.06} \\ 0.6+ & 3.5+ & 8.5+ & 10.7+ & 7.2 & & \\ \hline 10+58.6 & +141.5 & +178.5 & +120.7 & +37.2 & & \end{array}$$

而

$$r_2=\frac{2}{37.2}=0.054$$

$$S_1=0.06\times 37.2=2.232,$$

次令 $r_2=0.054$

則 $\begin{array}{l} 10+58 \quad +138 \quad +170 \quad +110 \quad +30 \quad -2 \quad \underline{|\ 0.054} \\ \qquad\ \ 0.54+ \quad 3.16+ \quad 7.62+ \quad 9.59+ \quad 6.46 \\ \hline 10+58.54+141.16+177.62+119.59+36.46 \end{array}$

而 $r_3=\dfrac{2}{36.46}=0.0548.\quad S_2=0.054\times 36.46=1.96884.$

次令 $r_3=0.0548,$

則 $\begin{array}{l} 10+58 \quad +138 \quad +170 \quad +110 \quad +30 \quad -2 \quad \underline{|0.0548} \\ \qquad\ \ 0.548+ \quad 3.208+ \quad 7.738+ \quad 9.740+ \quad 6.562 \\ \hline 10+58.548+141.208+177.738+119.740+36.562 \end{array}$

而 $r_4=\dfrac{2}{36.562}=0.05470.\quad S_3=2.0035976$

次令 $r_4=0.05470,$

則 $\begin{array}{l} 10+58 \quad +138 \quad +170 \quad +110 \quad +30 \quad -2 \quad \underline{|\ 0.05470} \\ \qquad\ \ 0.5470+ \quad 3.2025+ \quad 7.7238+ \quad 9.7215+ \quad 6.5487 \\ \hline 10+58.5470+141.2025+177.7238+119.7215+36.5487 \end{array}$

而 $r_5=\dfrac{2}{36.5487}=0.054721.\quad S_4=1.99921389$

次令 $r_5=0.054721$,

則

$$\begin{array}{lllllll} 10+58 & +138 & +170 & +110 & +30 & -2 & \underline{|0.054721} \\ & 0.54721+ & 3.20376+ & 7.72681+ & 9.72539+ & 6.55149 & \\ \hline 10+58.54721 & +141.20376 & +177.72681 & +119.72539 & +36.55149 & & \end{array}$$

而 $r_6=\dfrac{2}{36.55149}=0.0547173.\quad S_5=2.00013408429.$

截算法在方法(卽 x 之係數)小者,則難於降位.故又著「中比例積商法」,則不論方,廉,隅,正負大小,皆降位甚易,實通術也.如前例

$$b_{n-1}r_5>a_n(=A)\text{爲大根積 }S_5,$$

$$b_{n-1}r_4<a_n(=A)\text{爲小根積 }S_4.$$

則必有一根 r_6 在 r_5 及 r_4 之間,

故 $$\frac{S_5-S_4}{r_5-r_4}=\frac{S_5-A}{r_5-x},$$

如前例,

$$\frac{2.00013408429-1.99921389}{0.054721-0.05470}=\frac{2.00013408429-2.000}{0.054721-x}$$

$$x=0.05471794.$$

鄒伯奇復刻夏鸞翔(1823—1864)遺著少廣縋鑿,書中有術:

(1)開平方捷術一.

$f(x)=x^2-A=0$, 設 $a<\sqrt{A}$ 爲一借根,即 $r_1=a$, 其二,三,四,五等借根,可如下法求之:令

$$r_2=\frac{A}{a},\qquad r_3=\frac{r_1+r_2}{2},$$

$$r_4=\frac{A}{r_3},\qquad r_5=\frac{r_3+r_4}{2},$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

下皆如是,求至借根小者漸大,大者漸小,與方根密合而止.

例. $f(x)=x^2-121=0$.

設 $a=10$, $r^2=12.1$, $r_3=11.05$

$$r_4=\frac{121}{11.05}=10.95,\qquad r_5=11.$$

(2)開平方捷術二.

$f(x)=x^2-A=0$, 設 $a>\sqrt{A}$ 爲一借根,即 $r_1=a$, 如前

$$r_2=\frac{A}{a},\qquad r_3=\frac{r_1+r_2}{2},$$

$$r_4=\frac{A}{r_3},\qquad r_5=\frac{r_3+r_4}{2},$$

$$\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots,$$

下皆如是,求至借根大者漸小,小者漸大,與方根密合而止.

(3)開諸乘方捷術一.

$f(x)=0$

令 $f(r_1)<f(x)$,

$f(r_1+b)>f(x)$,

又以 $k=f(r_1+b+1)$

$-f(r_1+b)-1$

$$r_2=\frac{f(x)-f(r_1)}{k}+r_1$$

$$r_3=\frac{f(x)-f(r_2)}{k}+r_2$$

$$r_4=\frac{f(x)-f(r_2)}{k}+r_3$$

例如 $f(x)=x^3=21035.8=0$

令 $f(27)<f(x)$

$f(27.7)>f(x)$

$k=f(28.7)-f(27.7)-1$

$=2384.97$

$$r_2=\frac{21035.8-19683}{2384.97}+r_1$$

$=27.5672$

$$r_3=\frac{21035.8-20949.5}{2384.97}+r_2$$

$=27.6033$

$$r_4=\frac{21035.8-21032.1}{2384.97}+r_3$$

$=27.6049$

(4)開諸乘方捷術二

$f(x)=0,$

令 $f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(\overline{r_1+b}+1)$

$-f(r_1+b)-1$

$$r_2=\overline{r_1+b}-\frac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$$

$$r_3=r_2-\frac{f(r_2)-f(x)}{k}$$

$$r_4=r_3-\frac{f(r_3)-f(x)}{}$$

例如 $f(x)=x^3-21035\ 8=0$

令 $f(27.7)>f(x)$

$k=f(28.7)-f(27.7)-1$

$=2384.97$

$r_2=27.7$

$-\dfrac{21253.933-21035.8}{2384.97}$

$=27.6087$

$r_3=27.6087$

$-\dfrac{21044.4-21035.8}{2384.97}$

$=27.6051$

$r_4=27.6051$

$-\dfrac{21036.3-21035.8}{2384.97}$

$=27.6049$

(5)開諸乘方捷術三.

$f(x)=0,$

令 $f(r_1)<f(x)$

又以 $k=f(r_1+1)$

$-f(r_1)-1$

例如 $f(x)=x^3-21035.8=0$

令 $f(27.6)<f(x)$

$k=f(28.6)-f(27.6)-1$

$=2366.28$

$$r_2=r_1+\frac{f(x)-f(r_1)}{k}$$

$$r_3=r_2-\frac{f(x)-f(r_2)}{k}$$

$$r_4=r_3+\frac{f(x)-f(r_3)}{k}$$

$$r_2=27.6+\frac{21035.8-21024.576}{2366.28}=27.6049$$

(6) 開諸乘方捷術四.

$f(x)=0$

令 $f(r_1+b)>f(x)$

$f(r_1)<f(x)$

又以 $k=f(r_1+1)-f(r_1)-1$

$$r_2=(r_1+b)-\frac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$$

$$r_3=r_2+\frac{f(r_2)-f(x)}{k}$$

例如 $f(x)=x^3=21035.8=0$

$f(27.7)>f(x)$

$f(27.6)<f(x)$

$k=f(28.6)-f(27.6)-1$

$=2366.28$

$$r_2=27.7-\frac{21253.9-21035.8}{2366.28}=27.6078$$

$$r_3=27.6078+\frac{21042.4-21035.8}{2366.28}=27.6106$$

$$r_4=r_3-\frac{f(r_3)-f(x)}{k}$$

$$r_4=27.6106-\frac{21048.8-21035.8}{2366.28}$$

$$=27.6051$$

……………………………

$$r_5=27.6051+\frac{21036.3-21035.8}{2366.28}$$

$$=27.6053$$

……………………………

$$r_6=27.6053-\frac{21036.7-21035.8}{2366.28}$$

$$=27.6049$$

(7)天元開諸乘方捷術一[較數餘積用此術].

$f(x)=0$

如前(3)開諸乘方捷術一.

令 $f(r_1)<f(x)$

$f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b+1)-f(r_1+b)-1$

$$r_2=\frac{f(x)-f(r_1)}{k}+r_1$$

$$r_3=\frac{f(x)-f(r_2)}{k}+r_2$$

$$r_4=\frac{f(x)-f(r_3)}{k}+r_3$$

....

(8)天元開諸乘方捷術二[和數餘積用此術]

$f(x)=0$

令 $f(r_1)<f(x)$

$f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b)-f(r_1+b-1)+1$

$$r_2=r_1+\frac{f(x)-f(r_1)}{k}$$

$$r_3=r_2-\frac{f(x)-f(r_2)}{k}$$

$$r_4=r_3+\frac{f(x)-f(r_3)}{k}$$

....

(9)天元開諸乘方捷術三[益積用此術].

$f(x)=0$

如前(4)開諸乘方捷術二.

令 $f(r_1+b)>f(x)$

又以 $k=f(r_1+b+1)-f(r_1+b)-1$

$$r_2=(r_1+b)-\frac{f(r_1+b)-f(x)}{k}$$

$$r_3 = r_2 - \frac{f(r_2) - f(x)}{k}$$

$$r_4 = r_3 - \frac{f(r_3) - f(x)}{k}$$

…………………………………………

(10)天元開諸乘方捷術四〔翻積用此術〕.

此題與(8)同術.

(11)天元開諸乘方捷術五.

以上(7),(8),(9),(10)如求至r_4尙小於x,可再以r_4代r_1得k再求之.

(12)天元開諸乘方捷術六.

$$f(x) = xf'(x) \pm A = 0$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x \pm A = 0.$$

$$r_1 = \frac{A}{f'(1)},$$

$$r_2 = \frac{A}{f'(r_1)},$$

$$r_3 = \frac{A}{f'(r_2)},$$

………………

(13)天元開諸乘方捷術七.

$$f(x)=f'(x)+a_{n-1}x\pm A=0$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x\pm A=0$$

$$r_1=\frac{A}{a_{n-1}},$$

$$r_2=\frac{f'(r_1)\pm A}{a_{n-1}},$$

$$r_3=\frac{f'(r_2)\pm A}{a_{n-1}},$$

....

(14)天元開諸乘方捷術八.

$f(x)=x^2+ax-b=0.$

令 $k=f(r_0)-f(r_0-1)+1$

得初變式 $f(x+r_0)=x^2+(2r_0+a)x-f(r_0)=0$

而初變積 $=f(r_0).$

$$r_1=r_0+\frac{f(r_0)}{k}.$$

同理,次變積 $=f(r_1)$

$$k_1=f(r_1)-f(r_1-1)+1$$

$$r_2=r_1+\frac{f(r_1)}{k}.$$

此與奈端之法(*Newton*, 1669)相同.

至何故各開方捷術幷以 k 爲除法,蓋 k 卽方程

式

$$f(x)=0, \text{或 } f(r_1+b)=0 \text{ 之 } f'(r_1).$$

因設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$

令 $x=r+b,$

則 $f(x)=f(r_1+b)=0$

$$=f(r_1)+f'(r_1)\,b+\frac{f''(r_1)}{2!}b^2+\cdots a_0b^n=0.$$

而 $f'(r_1)=n\,a_0r_1^{\,n-1}+(n-1)a_1r_1^{\,n-2}$

$$+(n-2)a_2r_1^{\,n-3}+\cdots+2a_nr_1+a_{n-1}.$$

$$f''(r_1)=n(n-1)a_0r_1^{\,n-2}+(n-1)(n-2)a_1r_1^{\,n-3}+\cdots\cdots$$

因 b^2 以上之值爲極小,可以截去不用,故如(14),

$$b=-\frac{f(r_1)}{f'(r_1)},\quad x=r+b=r-\frac{f(r)}{f'(r)}.$$

又在二次式時

$$\frac{f''(r_1)}{2!}b^2=1,$$

卽在三次式以上

$$\frac{f''(r_1)}{2!}b^2$$

以後各式,亦略等於 1,故在(3),(4),(5),(6),(7),(9)時,

$$k=f(r_1+1)-f(r_1)-1,$$

卽 $k=f(r_1).$

同理,在(8),(10)時,

$$k=f(r_1)-f(r_1-1)+1,$$

即 $$k=f'(r)$$

也.

18. 清華蘅芳

清華蘅芳(1830—1902)曾於算草叢存四,諸乘方變式内補李銳開方說數例.

(1)諸乘方式

$f(x)=0$ 之根爲 a_1, a_2, a_3;

$f(x_1)=0$ 之根爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,

則 $$f(x)+f(x_1)=0$$

有一根爲 a_1.

(2)諸乘方式

$F(x)=f(x)+f'(x)=0$ 之根爲 a_1, a_2,

則 $$f(x)^2+f'(x)^2=0$$

之根亦爲 a_1, a_2.

(3)乘方式

$f(y)=y^n+a_1y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}y+a_n=0$ 之根爲 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$

則 $$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}x^2+a_n=0$$

之根爲 $a_1^2, a_2^2, a_3^2,\cdots\cdots$

其反例亦合.

(4)乘方式

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$

若間層剔分爲兩式,各自乘相消,去其間層之空位,則其式仍爲本乘方,而其元變爲本元之平方.

例如　$x^3-19x^2+111x-189=0,$

而　$x=3, 7, 9.$

則　$(x^3+111x)^2+(-19x^2-189)^2=-x^6+139x^4-5139x^2$

$+35721=0,$

或　$y^3-139y^2+5139y-35721=0,$

而　$y=3^2, 7^2, 9^2.$

(5)「倒數根」變

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

爲

$$f(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_0$$

則

$$y=\frac{1}{x}.$$

(6)「根與係數之關係」:

若　$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$

則　$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n),$

$a_2=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n),$

$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n.$$

(7)　$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$

則　$$a_1^2 - 2a_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2,$$

觀上例自明.

(8)　$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$

而　$$x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$$

則　$$f\left(x + \frac{a_1}{n}\right) = f(y) = y^n + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n = 0,$$

而　$$y = \alpha_1 + \frac{a_1}{n}, \alpha_2 + \frac{a_1}{n} \text{及} \alpha_3 + \frac{a_1}{n}.$$

華蘅芳於開方別術 (1872) 論求方程式整數正負根之法,因 1 至 9 之九數,其諸乘方之尾數,每四數成循環數,如:

		x^8,	x^7,	x^6,	x^5;	x^4,	x^3,	x^2,	x.
$x=1$	…………	1,	1,	1,	1;	1,	1,	1,	1.
$x=2$	…………	6,	8,	4,	2;	6,	8,	4,	2.
$x=3$	…………	1,	7,	9,	3;	1,	7,	9,	3.
$x=4$	…………	6,	4,	6,	4;	6,	4,	6,	4.
$x=5$	…………	5,	5,	5,	5;	5,	5,	5,	5.

$x=6$	…………	6,	6,	6,	6;	6,	6,	6,	6.
$x=7$	…………	1,	3,	9,	7;	1,	3,	9,	7.
$x=8$	…………	6,	2,	4,	8;	6,	2,	4,	8.
$x=9$	…………	1,	9,	1,	9;	1,	9,	1,	9.

例如 $16x^{10}-64x^9+160x^8-384x^7+412x^6-544x^5$

$$+565x^4+126x^3+3x^2-4x=177162.$$

如前列位

$x=1$	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
$x=2$	4,	2,	6,	8,	4,	2,	6,	8,	4,	2,
$x=3$	9,	3,	1,	7,	9,	3,	1,	7,	9,	3,
………	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
$x=8$	4,	8,	6,	2,	4,	8,	6,	2,	4,	8,

以各係數尾位乘之:

$x=1$ $6-4+0-4+2-4+5+6+3-4$

$x=2$ $4-8+0-2+8-8+0+8+2-8$

$x=3$ $4-2+0-8+8-2+5+2+7-2=2$

……… ……………………………………………………

$x=8$ $4-2+0-8+8-2+0+2+2-2=2$

故知此方程式正根尾數爲3或8.同理亦可求負根.

又以 1, 10, 100, …代入原式,知原式得數有一位,二位,

或三位等等.今知此式位數爲一,

而 177162=1.2.3.29527.

則 x 之根不爲 8 而爲 3,卽 $x=3$ 矣.

又例如

$$-x^4+20x^3-66x^2-2925=0.$$

如前得尾數 =3.5.7.

位數 =1 或 2.

因 2925=1.3.3.5.5.13

商數在 3,5;13,15;25;45;65 之中.最後試得

$$x=15.$$

華蘅芳開方古義 (1880) 論數字方程式之計算,曾改 *Pascal* 三角形爲下形:

1, 1, 1, 1, 1, 1.

5, 4, 3, 2, 1.

10, 6, 3, 1.

10, 4, 1.

5, 1.

1.

以上表乘各乘方式中實,方,廉,隅之數,卽得餘式,例如:

四元玉鑑直段求源第12問:

$$5x^4-3x^3-12x^2-9x-503334=0,\ x=18.$$

先令 $x=10$,將前式令 $x=10y$,得

$$50000y^4-3000y^3-1200y^2-90y-503334=0.$$

而 $y=1$. 以上表乘之,即以

(1)	5000,	−3000,	1200,	−90,	−503334.
乘(2)	1,	1,	1,	1,	1.
	4,	3,	2,	1.	
	6,	3,	1.		
	4,	1.			
	1.				

得:

−457624	5000,	−3000,	1200,	−90,	−503334.
188510	20000,	−9000,	2400,	−90,	
289800	30000,	−9000,	1200,		
197000	20000,	−3000,			
50000	50000,				

由上所得,退位如前,得

$$5x^4+197x^3+2898x^2+18851x-457624=0$$

可續商 8. 華氏以爲古義如斯.但其求商之法,乃以 1, 2, 10; 或 −1, −2, −10 遞求,且助之以表,甚爲煩瑣.古

義不復如是,和湼(*Horner*)法,更比此便利.然爲初學應用,亦一助也.其後程之驥又踵其成說著開方用表簡術一卷,爲南菁書院叢書之一.華蘅芳又有以積較術算方程式之法,見李儼中算家之級數論中.[13]

華蘅芳又於同治十二年(1873)與傅蘭雅(*Dr. John Fryer*,1839—?)共譯華里司(原名不詳)代數術二十五卷.

19. 傅蘭雅

傅蘭雅與華蘅芳共譯華里司代數術二十五卷.其卷十至卷十六,幷論方程式.其卷十六「求略近之根」於奈端法之外,幷介紹拉果蘭諸(*Lagrange*, 1736–1813)以連分數解數字方程式之法.[14]

例如 $x^3-7x+7=0$.

因	$x=1.2$	$f(x)=+0.328$
	1.4	-0.056
	1.6	-0.104
	1.8	$+0.232$

(13) 參觀李儼中算家之級數論,科學第十三卷第十期第1387—1399頁,民國十八年(1929)五月,上海.

(14) 見代數術第156款.原法見 *Traité de la résolution des équations numériques de tous degrés*, Paris, 1798.

則原式有二根;一在1.2,1.4之間,一在1.6,1.8之間.

先令 $x=1+\frac{1}{y}$

代入得 $y^3-4y^2+3y+1=0.$

$$\begin{array}{ll} y=1, & f(y)=1, \\ 2, & -1, \\ 3, & 1. \end{array}$$

故得 $x_1=1+\frac{1}{1}$

及 $x_2=1+\frac{1}{2}.$

再令 $x_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y_1}},$

或 $y=1+\frac{1}{y_1},$

則 $y^3-4y^2+3y+1=0$

化爲 $y_1{}^3-2y_1{}^2-y_1+1=0.$

$$\begin{array}{ll} y_1=1, & f(y_1)=-1, \\ 2, & -1, \\ 3, & 7. \end{array}$$

故得 $y=1+\frac{1}{2},$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}.$$

再令

$$x_1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y_2}}}$$

或

$$y_1 = 2 + \frac{1}{y_2}.$$

則

$$y_1^3 - 2y_1^2 - y_1 + 1 = 0$$

化爲

$$y_2^3 - 3y_2^2 - 4y_2 - 1 = 0.$$

$$\begin{array}{ll} y_2 = 3, & f(y_2) = -13, \\ \quad 4, & \quad -1, \\ \quad 5, & \quad 29. \end{array}$$

故得

$$y_1 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}.$$

$$x_1 = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13} = 1.6923.$$

同理,

$$x_1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y_3}}}}$$

或 $$y_2=4+\frac{1}{y_3}$$

等等代入,即可推至極近於原式真根之數.

再求 x_2 之值,於原式 $y^3-4y^2+3y+1=0$ 中:

令 $$x_2=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y_1}},$$

或 $$y=2+\frac{1}{y_1}$$

則 $$y^3-4y^2+3y+1=0$$

化為 $$y_1{}^3+y_1{}^2-2y-1=0.$$

$$y_1=1, \qquad f(y_1)=-1,$$

$$2. \qquad 7$$

故得 $$y=2+\frac{1}{1}=3$$

$$x_2=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

再令 $$x_2=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y_2}}},$$

或 $$y_1=1+\frac{1}{y_2}$$

則 $$y_1{}^3+y_1{}^2-2y-1=0$$

化為 $$y_2^3-3y_2^2-4y_2-1=0.$$

$$y_2=3,\qquad f(y_2)=-13,$$
$$4,\qquad -1,$$
$$5.\qquad 29.$$

故得 $$y_1=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$y=2+\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{14}{5}$$

$$x_2=1+\frac{5}{14}=\frac{19}{14}=1.35714.$$

此式又有一負根,在 -3, -4 之間,亦可按同法求得.

傅蘭雅又與趙元益共譯棣麼甘 (Augustus de Morgan, 1806-1871) 數學理,其卷七有「開立方略法」,謂由他書移附於此.爲西士喝登所設.

例如 $\sqrt[3]{A}=x.$

設 $x_1 \doteq \sqrt[3]{A}$

則 $$\frac{2x^3+A}{2A+x^3}=\frac{x_1}{x},$$

$$x=x_1\frac{2A+x^3}{2x_1^3+A}.$$

如 $\sqrt[3]{21035.8}=x.$

$$x_1=27.$$

$$x=27\times\frac{2\times21035.8+19683}{2\times19683+21035.8}=27.6047.$$

又令 $x_1=27.6$

同理, $x=27.6049.$

20. 清龔傑

龔傑立方奇法 (1897) 求某整立方數一位或四位之根.

(1)一位根可於下初商表得之.

初商表

N	$\sqrt[3]{N}$
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
216	6
343	7
512	8
729	9

(2)二位根可於下奇偶立方末位表得之,

奇數立方末位表

積之末二位數	根之末二位數	積之末二位數	根之末二位數
01	01	07	43
11	71	17	73
21	41	27	03
31	11	37	33
41	81	47	63
51	51	57	93
61	21	67	23
71	91	77	53
81	61	87	83
91	31	97	13
03	87	09	69
13	17	19	39
23	47	29	09
33	77	39	79
43	07	49	49
53	37	59	19
63	67	69	89
73	97	79	59
83	27	89	29
93	57	99	99

偶數立方末位表

A°. $\frac{N}{8}$ 時積之末二位爲偶		B°. $\frac{N}{8}$ 時積之末二位爲奇	
積之末二位數	根之末二位數	積之末二位數	根之末二位數
12	08	12	58
32	68	32	18
52	28	52	78
72	88	72	38
92	48	92	98
04	84	04	34
24	24	24	74
44	64	44	14
64	04	64	54
84	44	84	94
16	56	16	06
36	96	36	46
56	36	56	86
76	76	76	26
96	16	96	66
08	52	08	02
28	12	28	62
48	72	48	22
68	32	68	82
88	92	88	92

例如 $\sqrt[3]{12'167}=23$.

(3)三位根可由上三表併求之.

例如 $\sqrt[3]{796'597'983}=927$.

(4)四位根可由上三表,并下餘數表併求之.

因　$N=11m+a$(=積餘數)

$\sqrt[3]{N}=11n+b$(=根餘數)

餘數表

x	b
1	1
2	7
3	9
4	5
5	3
6	8
7	6
8	2
9	4
10	10
11	11

例如(1)　$\sqrt[3]{559'068'937'272}=\sqrt[3]{N}$

由前三表知　$\sqrt[3]{559'068'937'272}=8x38$.

由餘數表知　$8x38=11n+b(=10)$,

而　$N=11m+a(=10)$.

故如表可配得

77	77	
$x\ x$	44	
88	88	……末餘較
10	10	……根餘數
$8x38$ =	8238	……末商數

(2)　$\sqrt[3]{1'879'080'904}=1x34=11n+b(=2)$,

而　$N=11m+a(=8)$.

故如表可配得

11	11	
$x\ x$	11	
22	22	……末餘較
2	2	……根餘數
$1x34$ =	1234	……末商數

(3)　$\sqrt[3]{927'715'200'777}=9x53=11n+b(=7)$,

而　$N=11m+a(=2)$.

故如表可配得

88	88	
$x\ x$	88	
66	66	……末餘較
7	7	……根餘數
$9x53$ =	9753	……末商數

龔傑雖於書中述及初商,與末餘數之關係,用爲求次商之助,但其事紆折,不如列式配算,較爲容易也.

中算家之級數論

目次

(一) 級數論略史

1. 總說
2. 等差級數
3. 等比級數及調和級數
4. 高等級數
5. *Bernoulli* 數
6. 二項式及 *Pascal* 三角形
7. 招差術
8. 三角函數級數,圓率級數,及對數級數.

(二) 中國古代之級數論

9. 周髀算經及九章算術
10. 孫子算經
11. 張丘建算經
12. 前漢書

(三) 宋元明之級數論

13. 宋沈括
14. 宋秦九韶,楊輝
15. 元朱世傑
16. 元丁巨,賈亨及透簾細草
17. 元郭守敬
18. 明周述學,柯尚遷,程大位.
19. 同文算指通編

(四) 清算家之級數論

20. 清梅文鼎

21. 數理精蘊
22. 清陳世仁
23. 清屈曾發,汪萊,董祐誠,張作楠,張德昭.
24. 清羅士琳
25. 清李善蘭
26. 清華蘅芳
27. 清勞乃宣
28. 強汝詢及其他

(一) 級數論略史

1. 總說

級數論在世界數學史上,有久遠之歷史,中算家所論述者,在此中亦佔有一定之位置.故論述中算家級數論之先,應及級數論之普通略史.先民大致先識等差及等比級數.希臘算家乃論調和級數.印度作家如 *Brahmagupta*(約 628), *Mahavira*(約 850), *Bhaskara*(約 1150)於等差等比兩級數外續及平方數,立方數之總和問題.歐洲中世於此學無甚進步,直至十七世紀代數符號普及之後,以計算上比較便利,此學乃大進步.其在中國,則中世紀如朱世傑之流,頗多說述.至十七世紀以降,反爲落後,今臚舉其事實如次.(1)

(1) 以次所述,多參考:
D. E. Smith, History of Mathematics, Vol. II. pp. 494-513, 1925. Boston.
L. B. W. Jolley, Summation of Series, 1925, London.
B.O. Peirce, A Short Table of Integrals. 1910. Boston.
Moritz Cantor, Vorlesungen Über Geschichte der Mathematik. Vol I. 1906. *Leipzig*.

2. 等差級數

約在西元前一千五百五十年前,埃及 *Ahmes Papyrus* 書中首論等差級數.書中有一題云:

「將一百個饅頭分與五人,首二人所得,應爲後三人所得七分之一,問各幾何?」

此題實爲等差級數之問題,如

$$n=5,\ s_5=100,$$

而 $$\frac{(a+4d)+(a+3d)+(a+2d)}{7}=(a+d)+a$$

化爲 $$2d=11a$$

又因 $$100=S=\frac{2a+4d}{2}\cdot 5=60a$$

$$a=1\frac{2}{3},\ 又\ d=9\frac{1}{6}.$$

答數爲: $$1\frac{2}{3},\ 10\frac{5}{6},\ 20,\quad 29\frac{1}{6},\quad 38\frac{1}{3}.$$

Ahmes Papyrus 書中又有一題,略謂:

「今有十人分十數,每次遞降$\frac{1}{8}$,問各幾何?」

即 $$n=10,\quad S_{10}=10,\quad d=\frac{1}{8},$$

而 $$S_n=10=\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n=(2a-\frac{9}{8})\cdot 5$$

則 $$a=1\frac{9}{16}.$$

答數爲: $$1\frac{9}{16},\ 1\frac{7}{16},\ 1\frac{5}{16},\cdots\cdots,\ \frac{9}{16},\ \frac{7}{16}.$$

中國古書中如周髀算經,九章算術,孫子算經,張丘建算經,幷論及等差級數,說詳次章.

3. 等比級數

古代埃及 *Ahmes Papyrus* 書中首論等比級數.希臘歐幾里幾何原本(約 300 B. C.)第九卷,第三十五題:

「有若干連比例率,二率末率,各以首率減之,則二率之餘,與首率比,若末率之餘,與諸前率和比.」

即 $$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

或 $$\frac{ar^n-a}{S_n}=\frac{ar-a}{a},$$

可化爲

$$S_n=\frac{ar^n-a}{r-1}$$

之等比級數和公式.在東方則印度 *Bhaskara*(約 1150)書中有一題略稱:

「一人初日施與乞兒一雙貝殼,逐日倍增,迄一月,應得幾何?答 2,147,483,646」.

亞拉伯算家如*Alberûni*(約1000)之流,似得力於希臘算家之說,歐洲中世如 *Fibonacci*(1202),又得力於亞拉伯.至近代之方式,首先於 *Prosdocimo de Beldamandi* 之 *Algorithmus de Integris*(1410)其式爲:

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=ar^{n-1}+\frac{ar^{n-1}-a}{r-1},$$

同時 *Peurbach*(約1460)亦沿用之.至*Chuget*(1484),*Simon Jacob*(1560),丁先生(*Clavius*, 1583)等并作:

$$S=\frac{rar^{n-1}-a}{r-1},$$

其後 Stifel(1544), *Tartaglia*(1556)則作:

$$S=\frac{(rar^{n-1}-a)a}{ar-a},$$

現在有多數人以爲利瑪竇(*Ricci Matthew*,1553—1610)於幾何原本內所稱丁先生卽*Christopher Clavius*. 1537–1612.故同文算指(1614)似卽本於 *Clavius, Epitome Aritheticæ Practicæ*(1583).[2] 惟查同文算指通編卷五,倍加法(卽等比級數)第十之公式:

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=ar^{n-1}+\frac{ar^{n-1}-a}{r-1},$$

(2) 參看 *Samuel Couling, The Encyclopaedia Sinica*, pp. 482-3, 1917, 上海.

尙沿用歐洲十五世紀初葉之法也.

至調和級數因 *Pythagoras* 一派研究音樂,討論調和比例,如 $1:\frac{1}{2}=1-\frac{2}{3}:\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$, 後人因以爲調和級數.

4. 高等級數

在昔亞奇默德(*Archimedes*, 287 B. C.–212 B. C.)以幾何法證:

$$3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots\cdots+(na)^2]$$
$$=(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots\cdots+na).$$

其以 $a=1$,代入得:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

則先於六世紀*Codex Arcerianus*一書.至印度則*Mahavira*(約 850)著書中亦記及上式.六世紀 *Codex Arcerianus* 書中又載:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+10^3=\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11\right)^2$$

至印度則 *Brahinagupta* (約 628), *Mahāvira* (約 850), *Bhāskara* (約 1150) 幷記及之.其在亞拉伯則 *Al-karkhî* (約 1200)

書中有:
$$\sum_1^{10} n^2=(1+10)10\left(\frac{10}{3}+\frac{1}{6}\right)=385$$

及 $$\sum_{1}^{10} n^3 = \left(\sum_{1}^{10} n\right)^2$$

兩公式.希臘古時 *Pythagoras*(約 572 B. C.－約 501 B. C.) 曾計論奇偶數.至西元後百年之頃,經 *Nicomachus* 之解釋,以爲立方數之性質,應如下法成就之

$$1^3 = 1,$$

$$2^3 = 3+5,$$

$$3^3 = 7+9+11,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而其普通公式,則爲

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

至三乘方數 n^4 之總和,則首見於阿羅彌 (*Al-Kashî*,?－約 1436)之著書.渠曾爲兀魯伯(*Ulugh Beg*)之副,其法以:

$$\sum_{1}^{n} n^4 = \left(\frac{\Sigma n - 1}{5} + \sum n\right)\sum n^2$$

在中國則元朱世傑四元玉鑑(1303)所論高等級數,在當時可稱盡變化之能事.而說明總和之法則,梅文鼎(1633-1721)以爲平方數,立方數應如下法解釋之

$$
\begin{aligned}
&1^2=1, && 1^3=1,\\
&2^2=1+3, && 2^3=1+(1+6),\\
&3^2=1+3+5, && 3^3=1+(1+6)+(1+6+2\times 6),\\
&4^2=1+3+5+7, && 4^3=1+(1+6)+(1+6+2\times 6)\\
& && \qquad +(1+6+2\times 6+3\times 6),\\
&\cdots\cdots, && \cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

此外高等級數之較重要者,爲:

Taylor 公式卽:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots.$$

以1715年由 *Brook Taylor* 發明.又有

Maclaurin 公式卽:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\cdots\cdots.$$

以1742年由 *Colin Maclaurin* 發明.

此項公式吾國前無述及者,至咸豐九年 (1859) 海甯李善蘭(1810–1882)與偉烈亞力(*Alexander, Wylie*, 1815–1887)共譯羅密士代微積拾級始記及之.卷十一所稱「馬格老臨 (*Colin Maclaurin*) 氏捷術」及「戴勞(*Taylor*)氏新術」是也.

5. *Bernoulli* 數

歐洲算家在十七世紀時代深留意於$\sum n^P$問題首解此問題者爲 *Jacques Bernoulli* 所著 *Ars Conjectandi* (1713)稱:

$$\sum n^P=\frac{1}{P+1}n^{P+1}+\frac{1}{2}n^P+\frac{P}{2}B_1n^{P-1}$$

$$-\frac{P\cdot P-1\cdot P-2}{2\cdot 3\cdot 4}B_3n^{P-3}$$

$$+\frac{P\cdot P-1\cdot P-2\cdot P-3\cdot P-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.B_5.n^{P-5}$$

$$-\frac{P\cdot P-1\cdot P-2\cdot P-3\cdot P-4\cdot P-5\cdot P-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}B_7n^{P-7}$$

而
$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_3=\frac{1}{30},$$

$$B_5=\frac{1}{42},\quad B_7=\frac{1}{30},\cdots\cdots$$

稱爲 *Bernoulli* 數.上式或可書爲:[3]

$$1^P+2^P+3^P+\cdots\cdots n^P=\frac{n^{P+1}}{P+1}+\frac{n^P}{2}+\frac{Pn^{P-1}}{12}$$

$$-\frac{P(P-1)(P-2)}{720}n^{P-3}$$

---

(3) 據 *Jolley, Summation of Series* 引 *Whittaker and Robinson. Calculus of Observation.*

$$+\frac{P(P-1)(P-2)(P-3)(P-4)}{30240}n^{P-5}\cdots\cdots$$

而末項爲 n 或 n^2

又　$$B_{2n-1}=\frac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left[1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\cdots\cdots\right],$$

稱爲 *Bernoulli* 數,

$$B_{2n}=\frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\cdots\cdots\right],$$

稱爲 *Euler* 數.

而

	Bernoulli 數,	*Euler* 數,
$n=1$	$B_1=\frac{1}{6}$,	$B_2=1$,
$n=2$	$B_3=\frac{1}{30}$,	$B_4=5$,
$n=3$	$B_5=\frac{1}{24}$,	$B_6=61$,
$n=4$	$B_7=\frac{1}{30}$,	$B_8=1385$,
$n=5$	$B_9=\frac{5}{66}$,	$B_{10}=50521$,
$n=6$	$B_{11}=\frac{691}{2730}$,	$B_{12}=2702765$,
$n=7$	$B_{13}=\frac{7}{6}$,	$B_{14}=199360981$,

$$n=8 \quad B_{15}=\frac{3617}{510}, \qquad B_{16}=19391512145,$$

$$n=9 \quad B_{17}=\frac{43867}{798}, \qquad B_{18}=2404879675441,$$

$$n=10 \quad B_{19}=\frac{174611}{330}, \qquad B_{20}=370371188237525.$$

....

Bernoulli 數在三角函數級數,對數級數上應用至大,如

(1) $$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots\cdots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n-1}}{(2n)!}+\cdots\cdots.$$

$$\left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right]$$

(2) $$\operatorname{ctn} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}-\cdots\cdots-\frac{B_{2n-1}(2x)^{2n}}{x(2n)!}-\cdots\cdots. \qquad [x^2<\pi^2]$$

(3) $$\sec x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots. \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$$

(4) $$\csc x=\frac{1}{x}+\frac{x}{3!}+\frac{7x^3}{3\cdot5!}+\frac{31x^5}{3\cdot7!}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{2(2^{2n+1}-1)}{(2n+2)!}B_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\cdots.$$

$[x^2<\pi^2]$

(5) $$\log\sin x=\log x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6$$

$$-\cdots\cdots-\frac{2^{2n-1}B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots.\qquad[x^2<\pi^2]$$

(6) $$\log\cos x=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\frac{17}{2520}x^8$$

$$-\cdots\cdots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots$$

$\left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right].$

(7) $$\log\tan x=\log x+\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(2^{2n-1}-1)2^{2n}B_{2n-1}x^{2n}}{n(2n)!}-\cdots\cdots.$$

$\left[x^2<\frac{1}{4}\pi^2\right]$

幷應用 *Bernoulli* 數者也.

其在中國則戴煦(1805–1860)外切密率(1852)中亦言:

(1)本弧求切線:

$$\tan x = x + \frac{2x^3}{3!\,r^2} + \frac{16x^5}{5!\,r^4} + \frac{272x^7}{7!\,r^6} + \frac{7936x^9}{9!\,r^8} + \cdots\cdots,$$

(2)餘弧求切線:

$$\tan x = \frac{r^2}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3!} - \frac{8\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3\cdot 5!\,r^2}$$

$$-\frac{32\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^5}{3\cdot 7!\,r^4} - \frac{1152\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^7}{3\cdot 5\cdot 9!\,r^6} - \cdots\cdots$$

(3)本弧求割線:

$$\mathrm{see}\ x - r = \frac{x^2}{2!\,r} + \frac{5x^4}{4!\,r^3} + \frac{61x^6}{6!\,r^5} + \frac{1385x^8}{8!\,r^7}$$

$$+\frac{50521x^{10}}{10!\,r^9} + \cdots\cdots.$$

(4)餘弧求割線:

$$\sec x = \frac{r^2}{\frac{\pi}{2}-x} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3!} + \frac{7\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3\cdot 5!\,r^2}$$

$$-\frac{31\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^5}{3\cdot 7!\,r^4} + \frac{1143\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^7}{3\cdot 5\cdot 9!\,r^6} + \cdots\cdots$$

卽前之(1),(2),(3),(4),四式也.其後李善蘭(1810–1882),

徐有壬 (1800–1860) 并證此同樣公式,惟尚未知十七世紀歐洲已有所謂 *Bernoulli* 數,及 *Euler* 數也.

6. 二項式及 Pascal 三角形.

二項式之說,東方知之較早.歐幾里幾何原本(約 300 B. C.)卷二,并論 $(a+b)^2$ 之事實.又 *Omar Khayyam* (約 1100) 謂可不籍幾何算得四次式,五次式,六次式,以至多次式之方根.惜其書已經失傳.直至牛頓(*Newton*, 1676),來本之(*Leibniz*, 1695)方完成其說,而吾國周髀算經內趙君卿之句股方圓圖注亦曾討論幾何原本卷二之同等問題.其後九章算術,張丘建算經,唐王孝通緝古算經,唐劉孝孫細草張丘建算經,并解釋二次式,三次式方程.宋秦九韶數書九章 (1247) 解釋至十次式方程.二項式與方程式有直接關係,中國算家蓋已早具二項式知識矣.

Pascal 三角形其式如:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

此形中國發明最早,始見於宋楊輝詳解九章算法(1261),說詳另篇.[4]

7. 招差術

招差術(*Finite difference*)在歐洲實始於十七世紀.1673年來本之(*Leibniz*)因招差術算立方數,如:——

		0	0	0		
		6	6	6	6	
	6	12	18	24	30	
1	7	19	37	61	91	
0	1	8	27	64	125	216

在中國則郭守敬(1231-1316)已以平立定三差法算太陽盈縮.考郭守敬所算者,謂:

n 日末盈縮積,S

$$a+(a+b)+(a+2b+k)+(a+3b+3k)+(a+4b+6k)\cdots\cdots$$

$$+\left(a+\overline{n-1}b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\cdot k\right)$$

$$=na+\frac{(n-1)n}{2}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot k.$$

(4) 參看:李儼,永樂大典算書,圖書館學季刊第二卷第二期,第189—195頁,十七年(1928)三月。南京.又李儼,中算家之Pascal三角形研究,學藝雜誌,第九卷第九號,第1—15頁,十八年(1929)十月,上海.

即 $$S=nd_1+\frac{(n-1)n}{2}d_2+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}d_3$$

同時宋秦九韶數書九章(1247)卷十三「計造石壩」題,謂「以招法入之」,與朱世傑四元玉鑑(1303),「如象招數」同術,是招差術在國中於十三世紀已盛行矣.

8. 三角函數級數,圓率級數,及對數級數

三角函數級數至十七世紀始由算家論及,如*Jame Gregory*(1671)有下列公式,

即: $$x=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x-\frac{1}{7}\tan^7 x+\cdots\cdots,$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots\cdots,$$

$$\tan x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{4!}+\frac{61x^6}{6!}+\cdots\cdots,$$

又 $$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots,$$

而牛頓(*Newton*,約1669)亦有下列公式,

即: $$\sin^{-1}x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots\cdots.$$

至圓率級數最要者,有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$$ (*Leibniz*, 1673)

$$\frac{\pi}{6}=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{3^2\cdot5}-\frac{1}{3^3\cdot7}+\frac{1}{3^4\cdot9}-\cdots\cdots\right),$$

(*Abraham Sharp*. 1717)

$$\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}-\frac{1}{7\cdot5^7}+\cdots\cdots\right).$$

$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^3}+\frac{1}{5\cdot239^5}-\frac{1}{7\cdot239^7}+\cdots\cdots\right),$$

(*John Machin*, 約1706)

至對數級數則有 *Nicolaus Mercator* (1667)所發明一式

$$\log(1+a)=a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a^4+\cdots\cdots,$$

而 $1\geqq a>-1$.

三角數級數及圜率級數於十八世紀之初輸入中國.蓋法人杜德美(*Pierre Jartoux*, 1670—1720. 11·30)以十七世紀之末年(1700)來華.初傳入者有圜徑求周,弧背求弦,求矢三法,又有六術爲明安圖所補,以後通稱杜氏九術.同時對數亦由穆尼閣輸入,其後中國算家對於割圜術幷對數術均有深切之研究,說詳另

篇.(5)

(二) 中國古代之級數論

9. 周髀算經及九章算術

古代算書以周髀算經及九章算術爲最舊.周髀算經屢言等差級數,如七衡之直徑以2×(19832里200步)遞進,廿四氣以9寸9分$\frac{1}{6}$分而遞爲加減是也.(6)至九章算術則卷三「衰分」有:

「今有大夫,不更,簪裹,上造,公士,凡五人,共獵得五鹿,欲以爵次分之,問各得幾何!

答曰: 大夫得一鹿三分鹿之二,

不更得一鹿三分鹿之一,

簪裹得一鹿

上造得三分鹿之二

公士得三分鹿之一」

---

(5) 參看:李儼,對數之發明及其東來,科學雜誌第十二卷,第二,三,六期第109—158, 285—325, 689—700頁,2. 3. 6—1927. 上海.又李儼,明清算家之割圓術研究,科學雜誌,第十二卷第十一,十二期,第1437—1520, 1721—1766頁,11.12.—1927,及第十三卷第一,二期;第53—102, 200—250頁, 1. 2.—1928.上海.

(6) 飯島忠夫支那古代史論,第244—248頁,大正十四年(1925)十二月,東京,日本.

差數 $d=a$,

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=5.$$

$$\therefore \quad a=\frac{1}{3}.$$

「今有女子善織,日自倍,五日織五尺,問日織幾何?

答曰: 初日織一寸三十一分寸之一十九,

次日織三寸三十一分寸之七,

次日織六寸三十一分寸之一四,

次日織一尺二寸三十一分寸之二十八;

次日織二尺五寸三十一分寸之二十五」

差數 $r=2$

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=5$$

$$\therefore \quad a=0.1\frac{19}{31}.$$

九章算術卷六「均輸」章,「今有五人分五錢……」,「術曰:置錢錐行衰」,註曰:〔按此術錐行者,謂如立錐:初一,次二,次三,次四,次五,各均爲一例者也,」焦循(1763-1820)加減乘除術卷一有「錐行差式」如:

$$\begin{array}{c} A \\ B\quad B \\ C\quad C\quad C \\ D\quad D\quad D\quad D \\ E\quad E\quad E\quad E\quad E \end{array}$$

故秦九韶數書九章謂:「3,2,1爲反錐差;1,4,9爲方錐差,1,3,6爲蒺藜差」,幷本自九章算術也.

10. 孫子算經

孫子算經卷中有二題言等差級數,等比級數,未詳其總和之法.第一題謂:

「今有五等諸侯共分橘子六十顆,人别加三顆,問五人各得幾何?

答曰: 公一十八顆 侯一十五顆

伯一十二顆 子九顆 男六顆」

差數 $d=3$,

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=60$$

$$\therefore\quad a=6.$$

第二題謂:

「今有女子善織,日自倍,五日織通五尺,問日織幾何?

答曰: 初日織一寸三十一分寸之一十九,

次日織三寸三十一分寸之七,

次日織六寸三十一分寸之一十四,

次日織一尺二寸三十一分寸之二十八,

次日織二尺五寸三十一分寸之二十五.」

差數，$r=3$，

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=5$$

$$\therefore \quad =0.1\frac{19}{31}.$$

11.　張丘建算經

張丘建算經卷上稱：

「今有女善織，日益功疾。初日織五尺，今一月日織九匹（一匹爲四十尺）三丈。問日益幾何？

答曰：　五寸二十九分寸之十五。

術曰：置今織尺數以一月日而一，所得倍之；又倍初日尺數減之，餘爲實。以一月日數初一日減之，餘爲法。實如法得一。」

即　$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n$ 項 $=S$

如術意　$$d=\frac{\frac{2S}{n}-2a}{n-1}$$

或　$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

又有一題稱：

「今有女子不善織，日減功，遲。初日織五尺，末日織一尺，今三十日織訖。問織幾何？

答曰: 二四一丈.

術曰: 併初末日織尺數半之, 餘以乘織訖日數, 卽得.」[7]

卽 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n$ 項$=S$

如術意 $S=\frac{n}{2}(a+l)$, 而 l 爲末項.

又有一題稱:

「今有與人錢:初一人與三錢,次一人與四錢,次一人與五錢,以次與之,轉多一錢.與訖,還斂聚與均分之,人得一百錢.問人幾何!

答曰: 一百九十五人.

術曰:置人得數,以減初人錢數,餘倍之,以轉多錢數加之,得人數.」

卽 $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots n=S=mn$

$$n=\frac{2(m-a)+d}{d}$$

如術意僅作:

$$n=2(m-a)+d$$

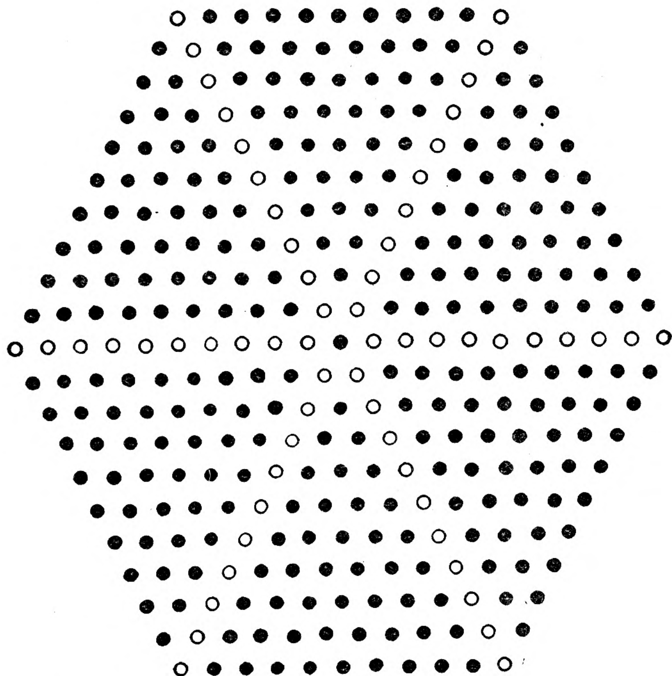
蓋以 d 爲 1,故不復除,實非通法也.等差級數之

(7) *D. E. Smith* 誤稱此題出五曹算經.見 *D. E. Smith, History of Mathematics*, Vol. II, p. 499. 1925. Boston.

有公式實以上三題爲矯矢.

12. 前漢書

前漢書律歷志.「其算法用竹,徑一分,長六寸,二百七一枚,而成六觚爲一握,」其圖式如次:



淸羅士琳(?–1853)比例滙通卷之一謂:

「漢書算用竹,以六觚爲一握,外周六九五十四,問積若干?

答曰：　積二百七十一枚.

法置外周五十四,加內周六,得六十,復以外周五十四乘之,得三千二百四十爲實,以六角束六倍之,得十二爲法以法除實得二百七十,加中心一,合問.

$$1+\frac{(54+6)54}{12}=271.$$

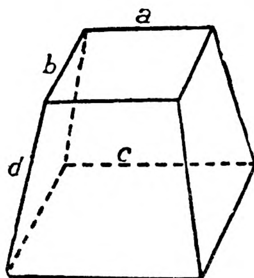
解曰:凡六角物乃是六個周包一,自內而外,每層加六,自外而內,每層減六,故以六歸外周也.」

後此朱世傑之圓箭即本此也.

(三)　宋元明之級數論

13.　宋沈括

宋沈括夢溪筆談卷十八有「括積術」.謂積之有隙者,累棋,層壇,及酒家積罌之類,」設圖如上下廣爲 a 及 c, 上下長爲 b 及 d, 其高爲 h, 則



$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$$

$$+\frac{h}{6}(c-a)$$

顧觀光(1799-1862)曰:「堆垛之術詳於楊(輝)氏,朱(世傑)氏二書,而剏始之功,斷推沈(括)氏.」[(8)] 蓋楊輝詳

(8)　見九數存古卷五,第64頁.

解九章算法(1261),「商功第五」之方垜,芻童果子垜,芻甍果子垜;朱世傑四元玉鑑(1303)卷下「果垜疊藏」,三角臺垜,四角臺垜,芻童垜,芻甍垜,并依隙積術立算.隙積術可如下法補證之:

$$V=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots$$

$$+\{(a+h-1)(b+h-1)-cd\}$$

$$=ab+\{ab+\overline{a+b}+1^2\}+\{ab+2(a+b)+2^2\}+\cdots\cdots$$

$$+\{ab+(h-1)(a+b)+(h-1)^2\}$$

$$=h.ab+(a+b)\frac{1}{2}\cdot h(h-1)+\frac{1}{3}\left(h-1\right)(h-\frac{1}{2}\right)h$$

因 $a+h-1=c,\quad h=c-a+1,$

$b+h-1=d,\quad h=d-b+1,$

代入消得

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a).$$

14. 宋秦九韶,楊輝.

宋秦九韶數書九章(1247)「問步兵五軍,軍一萬二千五百人,作方陣……」題,用束箭法.又「問步卒二千六百人,爲圓陣……」題,亦用束箭法.顧觀光九數存古卷五,曾引入「堆積術」內.

宋楊輝詳解九章算法(1261)商功第五所舉有:

三角垜　$1+3+6+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

四角垜　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$

方垜　$1^2+(a+1)^2+\cdots\cdots+(c-1)^2+c^2$

$$=\frac{1}{3}(c-a)(c^2+a^2+ca+\frac{c-a}{2})$$

果子垜　$V=\frac{h}{6}[(2b+d)(a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$　沈括

及芻童垜,芻甍垜.

15.　元朱世傑

元朱世傑算學啓蒙(1299),四元玉鑑(1303)所舉各級數,原無詳式.玆據清代以後各註釋家之說,擇其比較可靠者,採錄如下:

(A)　普通垜積:

1.　圓箭　$1+(6+12+18+\cdots\cdots+l)=1+\frac{(6+l)l}{12}=S,$

即　$$S=1+\frac{n(a+l)}{2}$$

2.　方箭　$1+(8+16+24+\cdots\cdots+l)=1+\frac{(8+l)l}{16}=S,$

即　$$S=1+\frac{n(a+l)}{2}$$

3. 茭草垜 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. 三角垜 $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

5. 四角垜 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$.

6. 茭草値錢(正) $1(a)+2(a+1\cdot b)+3(a+2\cdot b)+\cdots$

$$+n(a+\overline{n-1}b)$$

$$=\frac{n(n+1)\{2bn+(3a-2b)\}}{3!}.$$

又 茭草値錢(反) $1(a+\overline{n-1}\cdot b)+2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(a+1\cdot b)(n-1)+n(a)$$

$$=\frac{n(n+1)\{bn+(3a-b)\}}{3!}.$$

7. 三角垜値錢(正) $1(a)+3(a+1\cdot b)+6(a+2\cdot b)+\cdots$

$$+\frac{n(n+1)}{2}(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{3bn+(4a-3b)\}}{4!}.$$

又 三角垜値錢(反) $1(a+\overline{n-1}\cdot b)+3(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$

$$+(a+1\cdot b)\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}(a)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{bn+(4a-b)\}}{4!}.$$

8. 四角垛值錢(正) $1^2(a)+2^2(a+1\cdot b)+3^2(a+2\cdot b)+\cdots\cdots$

$$+n^2(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a$$

$$+\frac{1}{12}(n^2-1)n(3n+2)b.$$

又 四角垛值錢(反) $1^2(a+\overline{n-1}\cdot b)+2^2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots\cdots$

$$+(n-1)^2(a+1\cdot b)+n^2(a)$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a$$

$$+\frac{1}{12}(n^2-1)n^2b.$$

(B) 特種垛積:

1. 落一形(三角垛):

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2),$$

即 $$\sum_1^n\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2).$$

2. 撒星形(三角落一形),(四角垜):

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left(1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n\ \overline{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. 四角落一形:

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2)$$

4. 嵐峯形:

$$1\cdot1+2(1+2)+3(1+2+3)+\cdots+n(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

5. 三角嵐峯形(亦名嵐峯更落一形):

$$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots$$

$$+n\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!}$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1),$$

6. 四角嵐峯形:

$$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots+n(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\},$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

7. 撒星更落一形:

$$(1+2+3+\cdots+n)\cdot1+(1+2+3+\cdots$$

$$+\overline{n-1})(1+2)+\cdots+1\cdot(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),$$

8. 三角撒星更落一形:

$$1\cdot(1+2+3+\cdots+n)+[1+(1+2)](1+2+3+\cdots$$

$$+\overline{n-1})+\cdots+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$$

$$+(1+2+3+\cdots n)](1)$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

即 $$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5),$$

最後二形亦可書爲下之二式,如:

撒星更落一形:

$$1+[1+(1+3)]+[1+(1+3)+(1+3+6)]+\cdots$$

$$+[1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots$$

$$+\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}\right)]$$

或 $1+5+15+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

三角撒星更落一形:

$$1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)+(1+4+10)]+\cdots$$

$$+\Big[1+(1+4)+(1+4+10)+\cdots+\Big(1+4+10+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\Big)\Big].$$

或 $1+6+21+\cdots+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

9. 圓錐垜積[9]

如 r_1 爲奇數, r_2 爲偶數,則

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots$$

中奇項 $\mu r_1=\frac{(d_1+3)^2+3}{12},$

而 $d_1=6\left(\frac{n-1}{2}\right),$

(9) 此據羅士琳,臺錐演積術(1837)解釋.

偶項 $$\mu r_2=\frac{(d_2+3)^2}{12}$$

而 $$d_2=6\left(\frac{n}{2}-1\right)+3.$$

如 n 爲奇,則 $S\mu r_1$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots+\mu_n,$$

$$=\frac{d_1\{(d_1+6)^2+(d_1+3)^2\}+3^2\{(d_1+6)(d_1+3)+6\}}{216}$$

如 n 爲偶,則 $S\mu r_2$

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+\cdots+\mu_n$$

$$=\frac{d_2\{(d_2+6)^2+(d_2+3)^2\}+3^2\{(d_2+6)(d_2+3)+3\}}{216}.$$

(C) 招差.

四元玉鑑「如像招數」門最後一問,題曰:

「今有官司依立方招兵,初招方面三尺,次招方面轉多一尺,每人日支錢二百五十文,已招二萬三千四百人,支錢二萬三千四百六十二貫,問招來幾日!

答曰: 一十五日」

原書此問自註曰:

「或問還原依立方招兵:初招方面三尺,次招方面轉多一尺,得數爲兵,今招一十五方,每人日支錢二

百五十文,問兵及支錢各幾何?

答曰: 兵二萬三千四百人,錢二萬三千四百六十二貫.

術曰:求得上差二十七,二差三十七,三差二十四,下差六.」

按求差之術,未詳其義,似本郭守敬「授時平立定三差之法」,因授時歷之「加分」,「平立合差」,「加分立差」,即朱氏之二差,三差,下差也.故此處亦可如授時歷之例,得表如下:

上差

$(27)=a^3$

$(64)=(a+1\cdot b)^3$

$(125)=(a+2\cdot b)^3$

$(216)=(a+3\cdot b)^3$

$(343)=(a+4\cdot b)^3$

二差

$(37)=3a^2b+1\cdot 3ab^2+b^3$

$(61)=3a^2b+3\cdot 3ab^2+7b^3$

$(91)=3a^2b+5\cdot 3ab^2+19b^3$

$(127)=3a^2b+7\cdot 3ab^2+37b^3$

三差

$(24)=2\cdot 3ab^2+6b^3$

$(30)=3\cdot 3ab^2+12b^3$

$(36)=3\cdot 3ab^2+18b^3$

下差

$(6)=6b^3$

$(6)=6b^3$

即　上差　　　　　　　　二差

$$d_1=\mu_1, \qquad d_2=\mu_2-\mu_1$$

$$\mu_2, \qquad \mu_3-\mu_2$$

$$\mu_3, \qquad \mu_4-\mu_3$$

$$\mu_4, \qquad \mu_5-\mu_4$$

$$\mu_5,$$

三差　　　　　　　　下差

$$d_3=\mu_3-(2\mu_2-\mu_1) \qquad d_4=\mu_4-[3(\mu_3-\mu_2)+\mu_1]$$

$$=\mu_3-(2d_2+d_1) \qquad =\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$$

$$\mu_4-(2\mu_3-\mu_2)$$

$$\mu_5-(2\mu_4-\mu_3)$$

故　上差　$d_1=\mu_1$

二差　$d_2=\mu_2-\mu_1$

三差　$d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$

下差　$d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1]$

原書此問自註又曰:

「求兵者今招爲上積;又今招減一爲茭草底子,積爲二積;又今招減二爲三角底子,積爲三積;又今招減三爲三角落一(底子),積爲下積.以各差乘各積,四位併之,即招兵數也.」

即 $a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot d_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\cdot d_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n\cdot d_4$$

原書此問自註又曰:

「求支錢者,以今招爲茭草(底子),積爲上積;又今招減一爲三角底子,積爲二積;又今招減二爲三角落一(底子),積爲三積;又今招減三爲三角撒星(底子),積爲下積.以各差乘各積,四位併之.所得又以每日支錢乘之,卽得支錢之數也.」

即 $na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4.$$

由是可得下:(1)築堤差夫,差夫給米;(2)圓箭束招兵,招兵給米;(3)平方招兵,招兵支銀,招兵給米;(4)立方招兵,招兵支錢,各式.

1. 築堤差夫:

上差, $d_1=a$;　　下差, $d_2=6$

$$a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1\cdot b})$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2$$

差夫給米:

$$na+(n-1)(a+1\cdot b)+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1\cdot b})$$

$$=\frac{1}{2}n\ (n+1)\ d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

2. 圓箭束招兵:

$$d_1=\mu_1,\qquad d_2=\mu_2-\mu_1,\qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$$

$$[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)]+[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})]$$

$$+\cdots\cdots+[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

招兵給米:

$$n[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+b)]$$

$$+(n-1)[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+1})]+\cdots\cdots$$

$$+1\cdot[1+K(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

3. 平方招兵:

$$d_1=\mu_1, \qquad d_2=\mu_2-\mu_1, \qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1)$$

$$a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

招兵給銀:

$$na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

招兵給米:

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots\cdots$$

$$+[a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2]n$$

$$=1(d_1)+2(2d_1+d_2)+3(3d_1+3d_2+d_3)+4(4d_1+6d_2$$

$$+4d_3)+5(5d_1+10d_2+10d_3)+\cdots\cdots+(n-1)\{\overline{n-1}\cdot d_1$$

$$+\frac{1}{2}(n-2)(n-1)d_2+\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)d_3\}$$

$$+n\{nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3\}^{(10)}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3$$

4. 立方招兵:

$$d_1=\mu_1,\qquad d_2=\mu_2-\mu_1,\qquad d_3=\mu_3-(2d_2+d_1),$$

$$d_4=\mu_4-[3(d_3+d_2)+d_1].$$

$$a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4$$

招兵支錢:

$$na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)d_4$$

(10) 由「平方招兵」式內化得。

16. 元丁巨,賈亨,及透簾細草.

元丁巨丁巨算法(1355)及賈亨算法全能集幷記平尖草垜,三角果垜,四角果垜及四角長垜(賈亨作酒罈垜)且設立歌訣,就中四角長垜亦出於沈括公式,即

$$1\cdot a+2(a+1)+\cdots+dc=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3}$$

因由沈括公式,

$b=0$, 代入得

$$V=\frac{h}{6}[da+2dc]+\frac{h}{6}(c-a)$$

因 $a+h-1=c$

$1+h-1=d$ 或 $d=h.$

$$\therefore\quad V=\frac{3c-d+1}{2}\cdot\frac{d(d+1)}{3}.$$

此外透簾細草亦言三角堆垜,四角堆垜,茭草積,方箭束,圓箭束.

17. 元郭守敬.

元郭守敬言「太陽盈縮平立定三差之源」.

命積(日)爲 $n,\quad 2n,\quad 3n,\quad 4n,\quad 5n,\quad 6n,$

積差爲 $S_n,\quad S_{2n},\quad S_{3n},\quad S_{4n},\quad S_{5n},\quad S_{6n},$

(日)平差爲 $(\mu_0=\mu_1+V_1-W_1)$, $\mu_1=\dfrac{S_n}{n}$, $\mu_2=\dfrac{S_{2n}}{2n}$,

$$\mu_3=\frac{S_{3n}}{3n},\ \mu_4=\frac{S_{4n}}{4n},\ \mu_5, \mu_6,$$

以逐差之法,求得一差,二差,列表如下:

一差,或汎平差,爲:

$$(V_0=V_1-W_1),\quad V_1=\mu_2-\mu_1,$$

$$V_2=\mu_3-\mu_2,\quad V_3,\quad V_4,\quad V_5.$$

二差,或汎立差,爲:

$$(W_0),\ W_1=V_2-V_1,\ W_2=V_3-V_2,\ W_3,\ W_4.$$

此時 W_0, W_1, W_2, W_3, W_4,已全相等.

令　汎平差 $=\mu_1$,

汎平積差 $=V_1-W_1=\mu_0-\mu_1$;

汎立積差 $=\dfrac{W_2}{2}$;

又令汎平積差 $=V_1-W_1=\mu_0-\mu_1=nq+n^2c$.

就中　定差,$d=\mu_0$,

平差,$q=\dfrac{V_1-W_1-\dfrac{W_1}{2}}{n}$,

立差,$c=\dfrac{\dfrac{W_1}{2}}{n^2}$

則代入,得

$$\mu_1 = d - nq - n^2 q$$

$$\mu_2 = d - 2nq - \overline{2n}^2 \cdot c,$$

$$\mu_3 = d - 2nq - \overline{3n}^2 \cdot c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或

$$S_n = nd - n^2 q - n^3 c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$S_{2n} = (2n)d - (2n)^2 q - (2n)^3 c,$$

$$S_{3n} = (3n)d - (3n)^2 q - (3n)^3 c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲 n 日末,$2n$ 日末,$3n$ 日末,…盈縮積,或限積.

又可知

$$S_1 = d - q - c,$$

$$S_2 = 2d - 2^2 q - 2^3 c,$$

$$S_3 = 3d - 3^2 q - 3^3 c,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = nd - n^2 q - n^3 c.$$

爲 1 日末,2 日末,3 日末…n 日末盈縮積,或限積.

再以逐差之法,求得「加分,a」,「平立合差,b」,「加分立差,K」,如:

(加分)	(平立合差)	(加分立差)
$S_1-S_0=d-q-c=a$	$-2q-6c=b$	$-6c=K$
$S_2-S_1=d-3q-7c$	$\overline{-2q-6c}-6c$	$-6c$
$S_3-S_2=d-5q-19c$	$\overline{-2q-6c}-2\times 6c$	$-6c$
$S_4-S_3=d-7q-37c$	$\overline{-2q-6c}-3\times 6c$	$-6c$
…………	…………	…………
…………	$\overline{-2q-6c}-(n-3)6c$	$-6c$
$S_{n-1}-S_{n-2}=d-(2n-3)q-(3n^2-9n+7)c$	$\overline{-2q-6c}-(n-2)6c$	
$S_n-S_{n-1}=d-(2n-1)q-(3n^2-3n+1)c$		

而 初日加分 $=d-q-c=a$

次日加分 $=(d-q-c)+(-2q-6c)$

初日平立合差 $=-2q-6c=b$,

次日平立合差 $=\overline{-2q-6c}-6c$,

加分立差 $=-6c=K$;

n 日平立合差 $=\overline{-2q-6c}-(n-2)6c$.

初日末盈縮積 $=d-q-c$,

次日末盈縮積 $=2(d-q-c)+(-2q-6c)$,

三日末盈縮積 $=3(d-q-c)+3(-2q-6c)+(-6c)$

四日末盈縮積 $=4(d-q-c)+6(-2q-6c)+4(-6c)$,

五日末盈縮積 $=5(d-q-c)+10(-2q-6c)+10(-6c)$,

....

n 日末盈縮積 $=n(d-q-c)+\frac{(n-1)n}{2}(-2q-6c)$

$$+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}(-6c).$$

或 $$S_n=na+\frac{n(n-1)}{2!}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}K$$

$$=nd-n^2q-n^3c$$

換言之,即 n 日末盈縮積:

$$S_n=a+(a+b)+(a+2b+K)+(a+3b+3K)$$

$$+(a+4b+6K)+\cdots$$

$$+\left(a+\overline{n-1}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)}{2}K\right)$$

$$=na+\frac{(n-1)n}{2}\cdot b+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}K.\cdots\cdots\cdots(2)$$

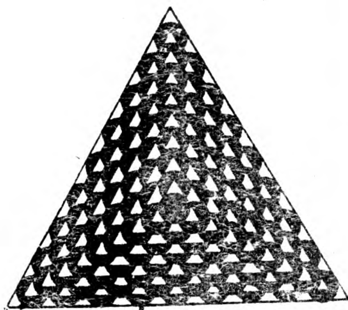
$$=nd-n^2q-n^3c.$$

故既知 a, b, k, 則冬至後按日盈縮,及每日盈行度,可依次加減,而造立成.

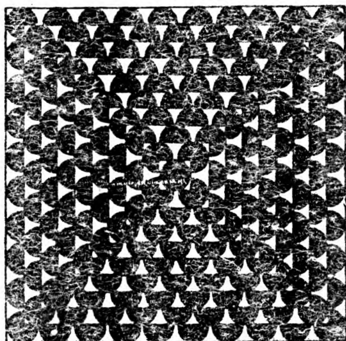
18. 明,周述學,柯尚遷,程大位

明,周述學神道大編歷宗算會(1558)卷十四,「隙積」條,有六觚平垛(即圓箭),四方平垛(即方箭),三角平垛(即菱草垛),三角立尖垛(即三角垛),上尖方垛

(卽四角垛),上平方垛(卽方垛),上尖長垛(卽四角長垛),上平長垛(卽沈括公式).同書卷十五附有歌訣.而三角垛,四角垛則分別舉圖如下:

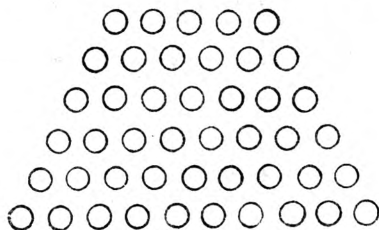


(1)三角垛

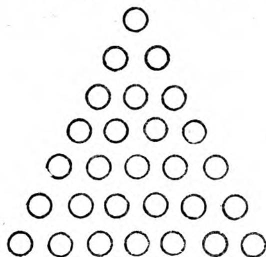


(2)四角垛

至柯尙遷數學通軌(1577)則僅舉尖堆垛法(卽茭草垛)一種.復次則爲程大位.程大位算法統宗(1593)卷七亦臚舉歌訣題問.如下二圖,一爲一面平堆圖,示普通等差級數;一爲一面尖堆圖,示茭草垛之計算.



(1)一面平堆圖



(2)一面尖堆圖

一面尖堆:　$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

一面平堆:　$r+(r+1)+\cdots+n=\frac{(n-r+1)(n+r)}{2}$

19.　同文算指通編

利瑪竇遺稿同文算指通編(1614)卷五有

遞加法第九,即等差級數:

$$a+(a+d)+(a+2\cdot d)+\cdots n\text{ 項 }=\frac{n\{(a+d)+l\}}{2}$$

即　$S=\frac{n(a+l)}{2}$, l 爲末項.

倍加法第十,即等比級數:

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{ar^{n-1}-a}{r-1}+ar^{n-1}$$

即　$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{l-a}{r-1}+l$, l 爲末項.

此外方箭,圓箭,三棱束,似採自算法統宗也.明代算學本自衰退,除因襲舊就及輸入西說外,了無發明.故李篤培號稱融合中外,其所著中西數學圖說(約1613)第十篇「堆法」所舉,亦無新說也.

(四)　清算家之級數論

20.　清梅文鼎

清初算家如李子金算法通義(1676),方中通數

度術(1661)雖幷述級數,類多陳義.惟梅文鼎(1633-1721)授時平立定三差詳說,謂:

1. 平方面積之差.

81	64	49	36	25	16	9	4	1	平方冪積
17	15	13	11	9	7	5	3		廉隅積
2	2	2	2	2	2	2	2		加法

如圖

100	81	64	49	36	25	16	9	4	1	
J	I	H	G	F	E	D	C	B	A	1
J	I	H	G	F	E	D	C	B	B	3
J	I	H	G	F	E	D	C	C	C	5
J	I	H	G	F	E	D	D	D	D	7
J	I	H	G	F	E	E	E	E	E	9
J	I	H	G	F	F	F	F	F	F	11
J	I	H	G	G	G	G	G	G	G	13
J	I	H	H	H	H	H	H	H	H	15
J	I	I	I	I	I	I	I	I	I	17
J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	19

每次所加之3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,…是爲廉隅積.

又如圖

G
A G A
B A G A B
C B A G A B C
D C B A G A B C D
E D C B A G A B C D E
F E D C B A G A B C D E F

廉隅積之1,3,5,7,9,11,13,…;每次遞加之2,2,…是爲加法.

2. 立方體積之差.

729	512	343	216	125	64	27	8	1	立方體積
217	169	127	91	61	37	19	7		廉隅積
48	42	36	30	24	18	12	6		加法

如圖

H H H H H H H H
H G G G G G G G H
H G F F F F F F G H
H G F E E E E E F G H
H G F E D D D D E F G H
H G F E D C C C D E F G H
H G F E D C B B C D E F G H
H G F E D C B A B C D E F G H
H G F E D C B B C D E F G H
H G F E D C C C D E F G H
H G F E D D D D E F G H
H G F E E E E E F G H
H G F F F F F F G H
H G G G G G G G H
H H H H H H H H

每次外圍所加之 6, 12, 18, 24, 30,⋯是爲加法.

每六角形之積,7,19,37,61,91,⋯是爲廉隅積.

中心 1 逐次與廉隅積 7, 19, 37, 61, 91,⋯相加,是爲立方體積.

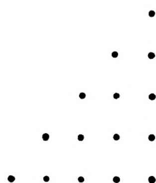
梅氏各圖不獨說明招差術原理,同時并解釋平方數,立方數之成就.

21. 數理精蘊

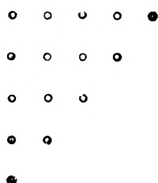
數理精蘊 (1723) 首先說明級數之計算方法.其法於原形之外補成虛形,俾便計算.如:

1. 一面直角尖堆, $1+2+3+\cdots+n$.

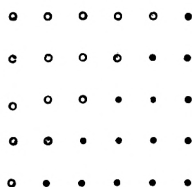
原形爲:



於原形外補虛形爲:



成一長方形如:

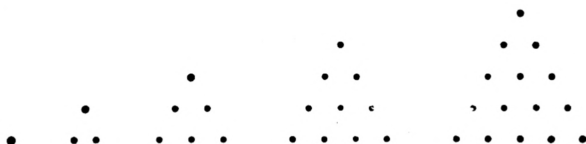


今一面直角尖堆之積爲 S, 底爲 n, 則此長方形之高爲 n, 底爲 $n+1$, 而面積爲 $2S$, 由此得

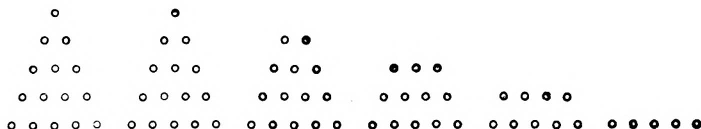
$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. 三角尖堆, $1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$.

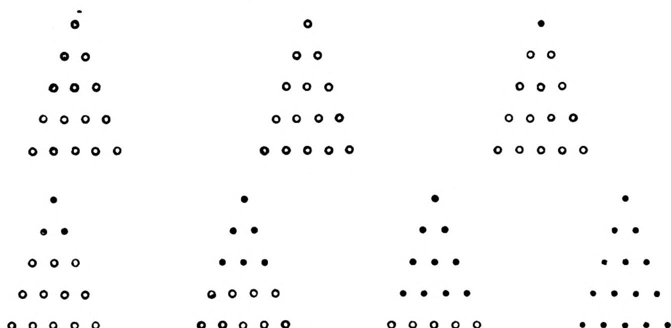
原形爲:



虛形爲:



合成平行面之三棱體:



是爲三角尖堆之三倍.原書此節自註稱:「兩三角面相合,比原位數多一行;今兩三角體相合,故必比原位數多二面也」.

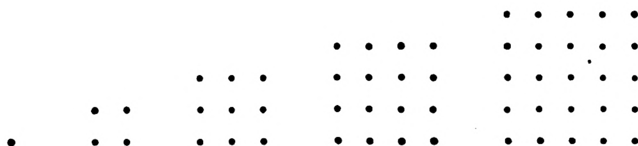
令三角尖堆之積爲 S,

則
$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+2)=3S$$

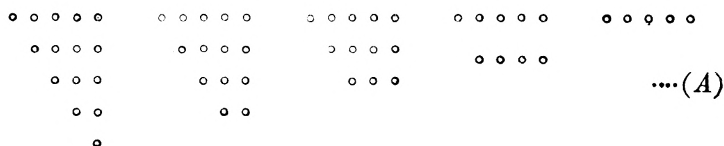
即
$$S=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$$

3. 四角尖堆, $1+4+9+\cdots\cdots+n^2$

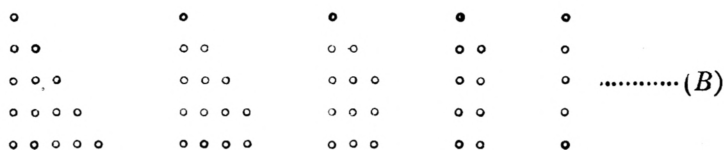
原形爲:



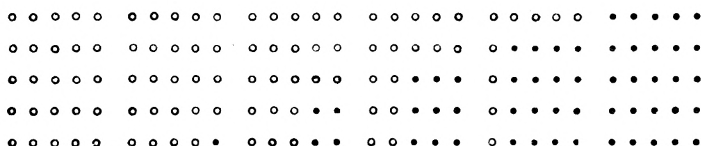
虛形爲:



及



合成一長方體如:



就中(A),(B)二四角尖錐,有一面$\frac{n(n+1)}{2}$爲兩體所同用,而長方體之積,爲$n^2(n+1)$.

令四角尖錐之積爲S,

則 $$n^2(n+1)=3S-\frac{n(n+1)}{2}.$$

即 $$S=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

又法因 $$\sum_1^n n^2=2\sum_1^n\frac{n(n+1)}{2}-\sum_1^n n.$$

故 $$S=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

22. 清陳世仁

陳世仁(1676-1722)字元之,號換吾,海寧人.好學工爲文,精曉算學.康熙乙未(1715)以進士入翰林,辭官養母.著有少廣補遺一卷.共分七節如下:

(I) 三角及諸尖十二法.

1. 平尖 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2. 立尖 $1+3+6+\cdots+(1+2+3+\overline{m-1})=\frac{m^3-m}{6}$,

$m=n+1$.

3. 倍尖 $1+2+4+\cdots 2^{n-1}=2^n-1$

4. 方尖 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

5. 再乘尖 $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

6. 抽奇平尖 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

7. 抽偶平尖 $1+3+5+\cdots+2\overline{n-1}=n^2$

8. 抽奇立尖 $2(1)+2(1+2)+2(1+2+3)+\cdots$

$$+2(1+2+3+\cdots+\overline{m-1})=\frac{m^3-m}{3}$$

9. 抽偶立尖 $(1)+(1+3)+(1+3+5)+\cdots$

$$+(1+3+5+\cdots+\overline{2n-1})$$

$$=\frac{n}{3}\left(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$$

10. 抽夻偶方尖 $1^2+3^2+5^4+\cdots+\overline{2n-1}^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)$

11. 抽偶再乘尖 $1^3+3^3+5^3+\cdots+\overline{2n-1}^3=n^2(2n^2-1)$

12. 抽奇再乘尖 $2^3+4^3+6^3+\cdots+\overline{2n}^3=2n^2(n+1)^2$

(II) 抽奇抽偶立尖.

1. 立尖內層數偶者去之:

$$1+6+15+28+\cdots+(1+2+3+\cdots+\overline{2n-1})=$$

$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+\cdots+n(2n-1)=\frac{n}{6}(4n-1)(n+1).$$

2. 立尖內層,數奇者去之:

$$3+10+21+36+\cdots+(1+2+3+\cdots+2n)=$$

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+4\cdot9+\cdots+n(2n+1)=\frac{n}{6}(4n+5)(n+1).$$

3. 立尖諸層內,數偶者去之:

$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 或 $(1+3+5+\cdots+\overline{2n-1})$

$=\frac{2n^3-3n^2+n}{3}$ 如項數爲奇;

$$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \text{ 或 } (1+3+5+\cdots\cdots+\overline{2n-1})$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n}{3}$$ 如項數為偶.

4. 立尖諸層內,數奇者去之:

$$2\cdot1+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3+2\cdot6+\cdots\cdots+2(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}\right\}$$ 如項數為奇.

$$2\cdot1+2\cdot1+2\cdot3+2\cdot3+2\cdot6+\cdots\cdots+2(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{n^3+3n^2+2n\right\}$$ 如項數為偶.

(III) 三角及諸尖半積.

1. 平尖:

$$(m-n+1)+(m-n+2)+(m-n+3)+\cdots\cdots+(m-n+n)$$

$$=(m-n)n+\frac{n}{2}(n+1).$$

2. 抽奇平尖:

$$(m-2n+2)+(m-2n+4)+(m-2n+6)+\cdots\cdots$$

$$+(m-2n+2n)$$

$$=(m-n)n+n.$$

3. 立尖

$$r(r+1)+(r+1)(r+2)+\cdots\cdots+(r+n-1)(r+n)$$

$$=nr(r+n)+\frac{n}{6}(2n-2)(n+1).$$

4. 方尖

$$r^2+(r+1)^2+(r+2)^2+\cdots+(r+n-1)^2$$

$$=nr(r+n-1)+\frac{n}{6}(2n-1)(n-1).$$

(IV) 三角及諸尖半積.

1. 抽偶立尖. 本尖內層數偶者去之.

$$(1+2+3+\cdots+r)+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2})$$

$$+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2}+\overline{r+3}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=\frac{3nr(2n+r-1)+n(n-1)(4n+1)}{6}\qquad r=\text{奇數}.$$

2. 抽偶立尖. 本尖諸層內,數偶者去之.

$$(1+3+5+\cdots+r)+(1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2})$$

$$+(1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{1+3+5+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4}$$

$$+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=n\left(\frac{r+1}{2}\right)^2+\frac{nr(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

3. 抽奇立尖. 本尖內層數奇者去之

$$(1+2+3+\cdots+r)+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2})$$

$$+(1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\overline{r+2}+\overline{r+3}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{1+2+3+\cdots+r+\overline{r+1}+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=\frac{3nr(2n+r-1)+n(n-1)(4n+1)}{6}\qquad r=\text{偶數.}$$

4. 抽奇立尖. 本尖諸層內,數奇者去之.

$$(2+4+6+\cdots+r)+(2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2})$$

$$+(2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4})$$

$$+\cdots+\{2+4+6+\cdots+r+\overline{r+2}+\overline{r+4}$$

$$+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})\}$$

$$=\frac{nr}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right)+\frac{nr(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

5. 抽奇偶數方尖.

$$r^2+(r+2)^2+(r+4)^2+\cdots+(r+2\cdot\overline{n-1})^2$$

$$=nr^2+2nr(n-1)+\frac{4n}{3}\left(n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}\right)$$

(V)開抽偶立尖半積

此有四式,即:

1. $(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3$

$$+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5$$

$$+(1+3+5+7+9)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+m)_{n-1}$$

$$+(1+3+5+\cdots+m)_n.$$

$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}.\qquad n\text{ 為偶.}$$

2. $(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3$

$+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5$

$+(1+3+5+7+9+11)_6$

$+\cdots+(1+3+5+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(1+3+5+\cdots+m)_n$

$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12}$　　n 爲偶.

3. $(1+3+5)_1+(1+3+5+7)_2+(1+3+5+7)_3$

$+(1+3+5+7+9)_4+(1+3+5+7+9)_5$

$+(1+3+5+7+9+11)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+m)_{n-1}$

$+(1+3+5+\cdots+m)_n$

$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-4n+1)}{4}+\frac{n^3-6n^2+14n-6}{12}$. n 爲奇.

4. $(1+3+5)_1+(1+3+5)_2+(1+3+5+7)_3$

$+(1+3+5+7)_4+(1+3+5+7+9)_5$

$+(1+3+5+7+9)_6+\cdots+(1+3+5+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}$

$+(1+3+5+\cdots+m)_n$

$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-2n-1)}{4}+\frac{n^3-3n^2+2n+3}{12}$.　n 爲奇.

此種抽偶立尖半積,徑數偶者如上記之(1),(2)式,有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法.如:

1.(A) $n=$偶, $\frac{n}{2}=$奇, $S=$原實, $m=$底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+3n^2+2n}{12}\right)=R,\ \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{2}\right)^2+R\right\}}=X,$$

$$2X-2+\frac{n}{2}=m,$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}.\quad 1.(A)$$

1.(B) $n=$偶, $\frac{n}{2}=$偶, $S=$原實, $m=$底.

如前 $$\frac{n}{2}\left(S-\frac{n^3+3n^2+2n}{12}\right)=R,$$

$$Y^2+Y=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{4}\right)^2+\left(\frac{n+4}{4}\right)^2+R-1\right\},$$

$$2Y-1+\frac{n}{2}=m,$$

卽 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}\quad 1.(B)$$

第二排列法,不能如前法計算,因R, X或Y不能成整數也.故凡計算時,R, X,或Y如不能成整數,則不屬於第一排列法,而屬於第二排列法.其計算亦以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

2.(A) $n=$偶, $\frac{n}{2}=$偶, $S=$原實, $m=$底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+6n^2+14n}{12}\right)=R', \sqrt{\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+\frac{R'}{2}}=X',$$

$$2X'-1+\frac{n}{2}=m,$$

即
$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12} \qquad 2.(A)$$

2.(B) $n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底.

$$\frac{2}{n}\left(S-\frac{n^3+6n^2+14n}{12}\right)=R',$$

$$Y'^2+Y'=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n+2}{4}\right)^2+\left(\frac{n+6}{4}\right)^2+R'-1\right\},$$

$$2Y'+\frac{n}{2}=m,$$

即
$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+5n}{12} \qquad 2.(B)$$

又此種抽偶立尖半積,徑數奇者如上記之(3),(4)式有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以$\frac{n-1}{2}$之奇或偶,異其算法,如:

3.(A) $n=$ 奇, $\frac{n-1}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底.

$$\frac{}{n-1}\left\{2S-\frac{(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)}{6}\right\}=R$$

或
$$=N+\frac{2}{n-1}m.$$

得前方 $$\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+R=X^2+r,$$

或 $$\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N=X^2+r;$$

及後方 $$\frac{(n-1)r}{4}+0=Y^2,$$

或 $$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}=Y^2;$$

則 $2Y-1<X$ 時，$m=(2Y-1)+(n-1)$； | $2Y-1>X$ 時，$m=2Y-1$.

如後方 $$\frac{(n-1)r}{4}+0\neq Y^2,$$

或 $$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}\neq Y^2;$$

則令前方 $$\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+R=(X-t)^2+r',$$

$$t=1, 2, 3, \cdots$$

或 $$\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N=(X-t)^2+r';$$

新得末方 $$\frac{(n-1)r'}{4}+0=Y'^2,$$

或 $$\frac{(n-1)r'}{4}+\frac{m}{2}=Y'^2;$$

則 $2Y'-1<X-t$ 時，$m=(2Y'-1)+(n-1)$； | $2Y'-1>X-t$ 時，$m=2Y'-1$.

4.(A)　$n=$ 奇，$\frac{n-1}{2}=$ 偶，$S=$ 原實，$m=$ 底.

如前
$$\frac{2}{n-1}\left\{2S-\frac{(n-3)^3+3(n-3)^2+2(n-3)}{6}\right\}$$
$$=R=N+\frac{2}{n-1}m.$$

得前方
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{R-1}=X^2+r,$$
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{N-1}=X^2+r;$$

及後方
$$\frac{(n-1)r}{4}+0=Y^2,$$
$$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}=Y^2;$$

則 $2Y-1<X$ 時，
$m=(2Y-1)+(n-1)$;

$2Y-1>X$ 時，
$m=2Y-1$.

如後方
$$\frac{(n-1)r}{4}+0\neq Y^2,$$
$$\frac{(n-1)r}{4}+\frac{m}{2}\neq Y^2;$$

則令前方
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+\overline{R-1}=(X-t)^2+r,$$
$$t=1, 2, 3,\cdots$$

或
$$2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+N-1=(X-t)^2+r';$$

新得末方 $$\frac{(n-1)r}{4}+0=Y'^2,$$

或 $$\frac{(n-1)r'}{4}+\frac{m}{2}=Y'^2;$$

則 $2Y'-1<X-t$ 時, $m=(2Y'-1)+(n-1)$; $\Big\}$ $2Y'-1>X-t$ 時, $m=2Y'-1$.

按本節開抽偶立尖半積之第一排列法,可如下式書之,即:

1. $$\left(\frac{m-\overline{n-3}}{2}\right)_1^2+\left(\frac{m-\overline{n-3}}{2}\right)_2^2+\left(\frac{m-\overline{n-5}}{2}\right)_3^2$$
$$+\left(\frac{m-\overline{n-5}}{2}\right)_4^2+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{m-1}{2}\right)_{n-3}^2+\left(\frac{m-1}{2}\right)_{n-2}^2$$
$$+\left(\frac{m+1}{2}\right)_{n-1}^2+\left(\frac{m+1}{2}\right)_n^2$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+11n}{12}$$

餘倣此.

(VI) 開抽奇立尖半積.

此亦有四式,即:

1. $(2+4+6)_1+(2+4+6)_2+(2+4+6+8)_3$

$$+(2+4+6+8)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+m)_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}, \qquad n\text{爲偶.}$$

2. $(2+4+6)_1+(2+4+6+8)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8+10)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10+12)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}, \qquad n\text{爲偶.}$$

3. $(2+4+6)_1+(2+4+6+8)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8+10)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10+12)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$
$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-4n+1)}{4}+\frac{n^3-6n^2+11n-6}{12}, n\text{爲奇.}$$

4. $(2+4+6)_1+(2+4+6)_2+(2+4+6+8)_3$
$$+(2+4+6+8)_4+(2+4+6+8+10)_5$$
$$+(2+4+6+8+10)_6$$
$$+\cdots+(2+4+6+\cdots+\overline{m-2})_{n-1}+(2+4+6+\cdots+m)_n$$

$$=\frac{m^2n}{4}-\frac{m(n^2-2n-1)}{4}+\frac{n^3-3n^2-n+3}{12},\ n \text{ 爲奇.}$$

此種抽奇立尖半積,徑數偶者如上記之(1),(2)式,有兩種排列法:第一排列法陳世仁則以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

1.(A) $n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底,

$$\frac{2}{n}\left\{S-\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right\}=R$$

$$X^2+2X=2\left\{2\left(\frac{n+2}{4}\right)\left(\frac{n+6}{4}\right)+R\right\},\ X-1+\frac{n}{2}=m.$$

即 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}. \qquad 1.(A)$$

1.(B) $n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 偶, $S=$ 原實, $m=$ 底,

如前 $$\frac{2}{n}\left\{S-\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right\}=R,$$

則(a) $$\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+R\right\}}=Y=m;\quad m=4;\quad \text{或 } S=m^2$$

又(b) $$\sqrt{2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+4}{2}\right)^2+R\right\}}=Y,\ Y-2+\frac{n}{2}=m;\quad m>4$$

即 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)+\frac{n^3-6n^2+8n}{12}. \qquad 1.(B)$$

第二排列法,不能如前法計算.因 R, X, 或 Y 不能成整數也.故凡計算時, R, X, 或 Y 如不能成整數,則不屬於第一排列法,而屬於第二排列法.其計算亦以徑(n)之半數爲奇或爲偶,異其算法,如:

2.(A)　　$n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底.

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n}{2}\right)^3+3\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)-2\right]\right\}=R'$$

或
$$\frac{1}{n}\left\{S-\frac{n^3+9n^2+26n}{12}\right\}=R',$$

$$\sqrt{4\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+1\right\}^2+R'}=X',$$

$$X'-1+\frac{n}{2}=m.$$

即
$$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}. \quad 2.(A)$$

2.(B)　　$n=$ 偶, $\frac{n}{2}=$ 偶, $S=$ 原實, $m=$ 底.

如前得 R', $\sqrt{4\left(\frac{n}{4}+1\right)\left(\frac{n}{4}+2\right)+4R'}=Y'^2+2Y',$

$$Y'+\frac{n}{2}=m.$$

即 $$S=\frac{m^2n}{4}-\frac{mn}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)+\frac{n^3-3n^2+2n}{12}. \quad 2.(B)$$

又此種抽奇立尖半積,徑數奇者如上記之(3),(4)式有兩種排列法.第一排列法陳世仁則以 $\frac{n-1}{2}$ 之奇或偶,異其算法,如:

3.(A) $n=$ 奇, $\frac{n-1}{2}=$ 奇, $S=$ 原實, $m=$ 底.

$$\frac{4}{n-1}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]\right]\right\}=R$$

或 $$=N+\frac{4}{n-1}m;$$

得前方 $$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+R=X^2+2X+r,$$

或 $$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+N=X^2+2X+r;$$

及後方 $$(n-1)r+0 \;=Y^2+2Y,$$

或 $$(n-1)r+4m=Y^2+2Y;$$

則 $Y<X$ 時, $Y+(n-1)=m$; $Y>X$ 時, $Y=m$.

如後方 $$(n-1)r+0\doteq Y^2+2Y,$$

或 $$(n-1)r+4m\doteq Y^2+2Y;$$

則令前方　$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+R=(X-t)^2$

$+2(X-t)+r',\qquad t=1, 2, 3,\cdots$

或　$\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+N$

$=(X-t)^2+2(X-t)+r';$

新得末方　$(n-1)r'+0\ =Y'^2+2Y',$

$(n-1)r'+4m=Y'^2+2Y';$

則　$Y'<X-t$ 時，$Y'+(n-1)=m;$　　$Y'>X-t$ 時，$Y'=m.$

4.(A)　$n=$ 奇，$\frac{n-1}{2}=$ 偶，$S=$ 原實，$m=$ 底.

如前　$\frac{4}{n-1}\left\{S-\left[\frac{10}{15}\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+3\left(\frac{n-3}{2}\right)^2\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.+2\left(\frac{n-3}{2}\right)\right]\right]\right\}=R$

或　$=N+\frac{4}{n-1}m;$

得前方　$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}-1\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)+R$

$=X^2+r,$

或　$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}-1\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)+N$

$=X^2+r;$

及後方 $(n-1)r+0 = Y^2+2Y,$

$(n-1)r+4m = Y^2+2Y;$

則 $Y<X$ 時, $m=Y+(n-1);$ $Y>X$ 時, $m=Y.$

如後方 $(n-1)r+0 \neq Y^2+2Y,$

$(n-1)r+4m \neq Y^2+2Y.$

則令前方 $$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}-1\right)+R$$

$$=(X-t)^2+r', \qquad t=1, 2, 3, \cdots$$

或 $$2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}+1\right)+2\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}-1\right)+N$$

$$=(X-t)^2+r';$$

新得末方 $(n-1)r'+0 = Y'^2+2Y',$

或 $(n-1)r'+4m = Y'^2+2Y';$

則 $Y'<X-t$ 時, $m=Y'+(n-1);$ $Y'>X-t,$ $m=Y'.$

(VII) 立尖準諸尖.

1. 方尖準立尖(卽朱世傑之四角落一形).

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

2. 抽偶方尖準立尖

$$1+(1+9)+(1+9+25)+\cdots+(1+9+25+\cdots+\overline{2n-1}^2)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n\ (n+1)\right\}$$

3. 抽奇方尖準立尖（此爲朱世傑四角落一形之四倍）.

$$4+(4+16)+(4+16+36)+\cdots+(4+16+36+\cdots+\overline{2n}^2)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

4. 立尖還準立尖(卽朱世傑之三角落一形).

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\{1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

23. 清屈曾發,汪萊董祐誠,張作楠,張德昭.

次於陳世仁者有屈曾發,汪萊 (1768–1813), 董祐誠 (1791–1823), 張作楠,張德昭.就中屈曾發數學精詳(1772)卷二堆垜法,張德昭算法九章摘要備覽(1817)商功第四堆垜法,張作楠量倉通法 (1820) 卷五堆垜法,幷本數理精蘊(1723)及算法統宗(1593)之說.惟汪萊,董祐誠稍有發明.汪萊衡齋算學第四册 (1799) 有「遞兼數理」,所謂三角堆卽形數(*Figurate mumbers*),因

臚舉:

1. 平三角堆

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2!},$$

2. 立三角堆

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

3. 三乘三角堆

$$1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

4. 四乘三角堆

$$1+5+15+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}$$

....

諸式,歸納得:

$(r-1)$乘三角堆之總和

$$S=\frac{1}{r!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1).$$

董祐誠則於割圜連比例(1819)及堆垛求積術(1821)

論方錐堆.如:

1. 平方錐堆

$$1+4+9+16+\cdots+\frac{n(2n+0)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

2. 立方錐堆

$$1+5+14+30+\cdots+\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

3. 三乘方錐堆

$$1+6+20+50+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

即 $1\cdot3\cdot2^2+2\cdot4\cdot3^3+3\cdot5\cdot4^2+\cdots n$ 項

$$=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$

4. 四乘方錐堆

$$1+7+27+77+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{6!}$$

………………………… ……………………………………

又於堆垛求積術(1821)論「縱方堆求積術」,如:

1. 平方縱堆積,

$$1+8+15+24+\cdots+\frac{n\{2n+2(m-1)+0\}}{2!}$$

$$=\frac{n(n+1)\{2n+3(m-1)+1\}}{3!}$$

即 $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+\cdots+n(m+n-1)$

$$=\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}+\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

2. 立方縱堆積,

$$3+11+26+50+\cdots+\frac{n(n+1)\{2n+3(m-1)+1\}}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{2n+4(m-1)+2\}}{4!}$$

3. 三乘方縱堆積,

$$3+14+40+90+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\{2n+4(m-1)+2\}}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{2n+5(m-1)+3\}}{5!}$$

4. 四乘方縱堆積,

$$3+17+57+147+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{2n+5(m-1)+3\}}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\{2n+6(m-1)+4\}}{6!}$$

....

同理,$(r-1)$乘方縱堆積之和 S 爲:

$$\sum\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)\{2n+r(m-1)+(r-2)\}}{r!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)\{2n+(r+1)(m-1)+(r-1)\}}{(r+1)!}$$

而 m 爲首層數.

24. 清羅士琳

元朱世傑四元玉鑑 (1303) 內菱草形段,如像招數,果積疊藏,諸門,幷言級數.此書在明無人研究.入清其書始載於錢大昕 (1728–1804) 元史藝文志,然尙誤作二卷.梅瑴成 (1681–1763) 赤水遺珍有釋四元玉鑑中或問歌彖二則,時全書尙未出世也.嘉慶間阮元撫浙時,訪獲得朱氏原書,列爲四庫未收書之一.擬演細草未果,以屬李潢 (?–1811),潢旋卒去.僅由何元錫(字夢華)刻印行世.羅士琳於壬午 (1822) 入京,於葉雲素(名繼雯)處得見是書.癸未(1823)因黎斗一所藏鈔本,龔定盦(名自珍) 所贈何刻本,因着手補成全草,以甲午(1834)完稿.道光丙申(1836)印刻,丁酉 (1837) 復修原

稿,名曰四元玉鑑細草,凡二十四卷.茲舉羅氏對於四元玉鑑中各級數之解說如下:

(A) 茭草形段

1. 茭草落一形:

茭草形	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
三角底積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55.
乘數	1,	1·5,	2,	2·5,	3,	3·5,	4,	4·5,	5,	5·5.

即 $$1(1)+2(1\cdot5)+3(2)+\cdots+n\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}$$

2. 茭草撒星形:

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45,	55,	66,	78,	91.	
乘得數	13,	36,	66,	100,	135,	168,	196,
	216,	225,	220,	198,	156,	91.	
反錐差	13,	12,	11,	10,	9,	8,	7,
	6,	5,	4,	3,	2,	1	

即 $$1(n)+3(n-1)+6(n-2)+\cdots+\frac{n-1}{2}\cdot n\left\{n-\overline{n-2}\right\}$$

$$+\frac{n+1}{2}\cdot n\left\{n-\overline{n-1}\right\}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot3\cdot4}.$$

3. 菱草嵐峯形:

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45,	55,	66,	78.		
乘得數	1,	6,	18,	40,	75,	126,	196,
	288,	405,	550,	660,	936.		
錐差	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	8,	9,	10,	11,	12.		

即 $$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 6+\cdots\cdots+n\frac{n+1}{2}\cdot n$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

4. 菱草撒星更落一形.

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45,	55,	66,	78,	91,	105.
乘得數	105,	273,	468,	660,	825,	945,	1008,
	1008,	945,	825,	660,	468,	273,	105.
三角積	105,	91,	78,	66,	55,	45,	36,
	28,	21,	15,	10,	6,	3,	1.

即 $$\left(\frac{n+1}{2}\cdot n\right)\cdot 1+\left(\frac{n}{2}\cdot n-1\right)\cdot 3+\cdots\cdots+(1)\frac{n+1}{2}\cdot n$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

5. 茭草嵐峯更落一形.

三角積　1,　3,　6,　10,　15,　21,　28,
36,　45,　55,　66,　78,　91,　105,
120,　136.

乘得數　136,　405,　798,　1300,　1890,　2541,　3220,
3888,　4500,　5005,　5346,　5460,　5278,　4725,
3720,　2176.

梯田積　136,　135,　133,　130,　126,　121,　115,
108,　100,　91,　81,　70,　58,　45,
31,　16.

羅士琳自註稱:［附求梯田積:置底子加一,以底子乘之,二而一爲初段;又底子加二,以底子減一乘之,二而一爲次段;又底子加三,以底子減二乘之爲三段.如是加者遞加一,減者遞減一,得四段五段,以此類推］.

卽　第n層之梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2},$$

其中N爲確定之底子,如此題之16.故若以第一層論,則n爲1,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{16\times 17}{2}=136$$

以第二層論,則 $n=2$,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{15\times18}{2}=135$$

…………………… ………………………………………………………

以第十六層論,則 $n=16$,而梯田積爲

$$\frac{(N-n+1)(N+n)}{2}=\frac{1\times32}{2}=16$$

上式卽:

$$\frac{n(2n-\overline{n-1})}{2}\cdot1+\frac{(n-1)(2n-\overline{n-2})}{2}\cdot3$$

$$+\frac{(n-2)(2n-\overline{n-3})}{2}\cdot6+\cdots\cdots$$

$$+\frac{3(2n-2)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1\cdot(2n)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

6. 菱草值錢.

菱草束	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	8,	9,	10,	11,	12.		
乘得數	9,	24,	45,	72,	105,	144,	189,
	240,	297,	360	429,	504.		

抛差	9,	12,	15,	18,	21,	24,	27,
	30,	33,	36,	39,	42		

即 $$1(a)+2(a+1\cdot b)+3(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+n(a+\overline{n-1}\cdot b)$$

$$=\frac{n(n+1)\{2bn+(3a-2b)\}}{2\cdot 3},$$

7. 茭草值錢.

茭草束	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
	8,	9,	10,	11,………………………34,			
	35,	36					
乘得數	181,	352,	513,	664,	805,	936,	1057,
	………………………………………………544,						
	385,	216.					
抛差	181,	176,	171,	166,	161,	156,	151,
	………………………………………………16,						
	11,	6.					

即 $$1(a+\overline{n-1}\cdot b)+2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots$$

$$+(a+1\cdot b)(n-1)+n(a)$$

$$=\frac{n(n+1)\{bn+(a-b)\}}{2\cdot 3}$$

近人湯天棟有茭草形段羅草補註,以數理精蘊廑度

實相補之法,補註羅草,見科學雜誌.[11]

(*B*) 如像招數.

1. 差夫築堤:

差夫數 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, 113, 120, 127, 134, 141, 148, 155, 162, 167.

乘得數 1024, 1065, 1092, 1105, 1104, 1089, 1060, 1017, 960, 889, 804, 705, 592, 465, 324, 169.

築堤日 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

即 共人數 $a+(a+1\cdot b)+(a+2\cdot b)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2.$$

共米數 $m\{na+(n-1)(a+1\cdot b)$

$+(n-2)(a+2\cdot b)+\cdots\cdots$

$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)\}$

(11) 湯天棟,茭草形段羅草補註,科學雜誌,第十一卷,第十一期,第1535—1558頁,民國十七年(1926)十一月,上海.

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right\}$$

而 $m=$ 每人日支米.

2. 平方招兵:

平方積	16,	36,	64,	100,	144,	196,	256,
	324,	400,	484,	576,	676,	784,	900.
乘得數	224,	468,	768,	1100,	1440,	1764,	2048,
	2268,	2400,	2420,	2304,	2028,	1568,	900.
招來日	14,	13,	12,	11,	10,	9,	8,
	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,

卽　招兵數 $a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2$$

$$+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

共銀數 $m\Big\{na^2+(n-1)(a+1\cdot b)^2$

$$+(n-2)(a+2\cdot b)^2+\cdots$$

$$+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2\Big\}$$

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3\right\}$$

而 $m=$ 每人日給銀.

3. 圓箭束招兵:

圓箭束	19,	37,	61,	91,	127,	169,	217,
	271,	331,	397,	469,	547,	631,	721,
	817.						
乘得數	285,	518,	793,	1092,	1397,	1690,	1953,
	2168,	2317,	2382,	2345,	2188,	1893,	1442,
	817.						
招來日	15,	14,	13,	12,	11,	10,	9,
	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,
	1.						

即 共兵數 $[1+K(1+2+3+\cdots+b)]$

$$+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]+\cdots$$

$$+[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})]$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3.$$

共米數 $m\Big\{n[1+K(1+2+3+\cdots+b)]+(n-1)$

$$[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+1})]+\cdots$$

$$+1\cdot[1+K(1+2+3+\cdots+\overline{b+n-1})\Big\}$$

$$=m\Big\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3\Big\}$$

而 m= 每人日給米.

4. 平方招兵:

平方積	25,	36,	49,	64,	81,	100,
	121,	144,	169,	196,	225,	256,
	289,	324,	361.			
乘得數	3000,	4284,	5733,	7296,	8910,	10500,
	11979,	13248:	14196,	14700,	14625,	13824,
	12138,	9396,	5415.			
梯田積	120,	119,	117,	114,	110,	105,
	99,	92,	84,	75,	65,	54,
	42,	29,	15.			

即 共兵數 $a^2+(a+1\cdot b)^2+(a+2\cdot b)^2+\cdots\cdots$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2$$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)(n-1)nd_3$$

共米數 $m\Big\{\frac{n(n+1)}{2}\cdot a^2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot(a+1\cdot b)^2+\cdots\cdots$

$$+\frac{1\cdot 2n}{2}(a+\overline{n-1}\cdot b)^2\Big\}$$

$$=m\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)d_1\right.$$

$$+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)d_2$$

$$\left.+\frac{1}{120}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)d_3\right\}$$

而 $m=$ 每人日給米.

5. 立方招兵:

立方積	27,	64,	125,	216,	343,	512,
	729,	1000,	1331,	1728,	2197,	2744,
	3375,	4096,	4913.			
乘得數	405,	896,	1625,	2592,	3773,	5120,
	6561,	8000,	9317,	10368,	10985,	10976,
	10125,	8192,	4913.			
招來日	15,	14,	13,	12,	11,	10,
	9,	8,	7,	6,	5,	4,
	3,	2,	1.			

即 共兵數 $a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2\cdot b)^3+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^3$

$$=nd_1+\frac{1}{2}(n-1)nd_2+\frac{1}{6}(n-2)n-1)nd_3$$

$$+\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)nd_4.$$

招來日 $m\left\{na^3+(n-1)(a+1\cdot b)^3\right.$

$+(n-2)(a+2\cdot b)^3+\cdots\cdots$

$\left.+1\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^3\right\}$

$$=m\left\{\frac{1}{2}n(n+1)d_1+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)d_2\right.$$

$$+\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)d_3$$

$$\left.+\frac{1}{120}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)\,d_4\right\}.$$

羅士琳解釋茭草形段,如像招數諸問,都恰到好處,惟茭草形段中(5),茭草嵐峯更落一形,及如像招數中(4),平方招兵用梯田積,頗與原義無當.蓋羅士琳以「嵐峯更落一形」爲

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot 1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot 3+\frac{(n-2)(n+3)}{2}\cdot 6+\cdots\cdots$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1\cdot 2n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

實應作:

$$1\cdot 1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots\cdots$$

$$+n\left(1+3+6+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

羅士琳又以「平方招兵給米」爲:

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot a^2+\frac{(n-1)(n+2)}{2}\cdot(a+1\cdot b)^2$$

$$+\frac{(n-2)(n+3)}{2}\cdot(a+1\cdot b)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{2(2n-1)}{2}\cdot(a+\overline{n-2}\cdot b)^2$$

$$+\frac{1\cdot 2n}{2}\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b)^2,$$

實應作:

$$a^2+[a^2+(a+1\cdot b)^2]2+[a^2+(a+1\cdot b)^2$$

$$+(a+2\cdot b)^2]3+\cdots\cdots+[a^2+(a+1\cdot b)^2+\cdots\cdots$$

$$+(a+\overline{n-1}\cdot b)^2]$$ 也.

(C)果垛疊藏.

1. 三角垛直錢:

三角積	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
	36,	45.					
乘得數	2,	9,	24,	50,	90,	147,	224,
	324,	450.					
拋差	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	9,	10.					

卽 $$1(a)+3(a+1\cdot b)+6(a+2\cdot b)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)}{2}\cdot(a+\overline{n-1}\cdot b).$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\{3bn+(4a-3b)\}}{2\cdot3\cdot4}.$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)a$$

$$+\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)b.$$

2. 四角垜直錢:

四角積	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,
	64,	81.					
乘得數	17,	60,	117,	176.	225,	252,	245,
	192,	81.					
拋差	17,	15,	13,	11,	9,	7,	5,
	3,	1.					

即
$$1^2(a+\overline{n-1}\cdot b)+2^2(a+\overline{n-2}\cdot b)+\cdots\cdots$$

$$+(n-1)^2(a+1\cdot b)+n^2\cdot a$$

$$=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)a+\frac{1}{12}(n^2-1)n^2\cdot b.$$

3. 四角落一形:

三角積	1,	3,	6.	10,	15,	21,	28,
	36.						
四角積積數	1,	5,	14,	30,	55,	91,	140,
	204.						

乘數 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

即 $$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{3}$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+1)(n+2).$$

4. 三角嵐峯形:

三角積積數	1,	4,	10,	20,	35,	56.
乘得數	1,	8,	30,	80,	175,	336.
錐差	1,	2,	3,	4,	5,	6.

即 $$1\cdot1+2(1+3)+3(1+3+6)+\cdots$$

$$+n\left(1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1).$$

5. 四角嵐峯形:

四角積積數	1,	5,	14,	30,	55.
乘得數	1,	10,	42,	120,	275.
錐差	1,	2,	3,	4,	5.

即 $$1\cdot1+2(1+4)+3(1+4+9)+\cdots$$

$$+n(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left\{n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

6. 三角撒星更落一形:

三角積積數	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84
乘得數	28,	84,	150,	200,	210,	168,	84.
三角積	28,	21,	15,	10,	6,	3,	1.

卽

$$1\cdot(1+2+3+\cdots+n)+[1+(1+2)](1+2+3+\cdots+\overline{n-1})+\cdots+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)]\cdot 1$$

$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

此外又有圓錐垛積,羅士琳曾於所著臺錐演積術(1837)詳論其事.至三角臺垛,四角臺垛,芻童垛,芻甍垛,幷依沈括隙積術立算.上述三角撒星更落一形,亦可如下式記之,(12)卽:

$$1+[1+(1+4)]+[1+(1+4)+(1+4+10)]+\cdots\cdots+[1+(1+4)+\cdots+(1+4+10+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3})]$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

25. 清李善蘭

李善蘭(1810-1882)著垛積比類四卷,詳論級數

(12) 見董化時,四元玉鑑詳草,民國九年(1920).

問題.其書似成於代數學(1859),代微積拾級(1859)旣譯之後,蓋李於垜積比類內稱:「垜積爲少廣一支,……西人代數微分中,所有級數,大半皆是.」代數學卷八,「論級數及未定之係數」,代微積拾級卷十一有「馬氏捷術」,及「戴氏新術」,言高等級數,則李氏著作蓋深受西說之影響也.垜積比類卷一,論三角垜,分類如下:

(A)三角垜

元垜,

$$\sum_1^n 1 = n,$$

一乘垜,

$$\sum_1^n n = \frac{n(n+1)}{2!}$$

卽汪萊之平三角堆.

二乘垜,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

卽汪萊之立三角堆.

三乘垜,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

即汪萊之三乘三角堆.

四乘垜,

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!},$$

即汪萊之四乘三角堆.

(B)一乘支垜

方垜,

$$\sum_{1}^{n}(2n-1)=\frac{n(2n+0)}{2!},$$

第一垜,

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(2n+0)}{2!}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

即董祐誠之平方錐堆.

第二垜,

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

即董祐誠之立方錐堆.

第三垜,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!},$$

即董祐誠之三乘方錐堆.

第四垜,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{6!}$$

即董祐誠之四乘方錐堆.

方垜,

$$\sum_1^n (3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2!},$$

甲垜,

$$\sum_1^n \frac{n(3n-1)}{2!}=\frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}$$

第一垜,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(3n+0)}{3!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4!}$$

(C)二乘支垛 第二垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(3n+1)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(3n+2)}{5!}$$

第三垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(3n+2)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(3n+3)}{6!},$$

方垛,

$$\sum_1^n (4n-3)=\frac{n(4n-2)}{2!},$$

甲垛,

$$\sum_1^n \frac{n(4n-2)}{2!}=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3!},$$

第一垛,

$$\sum_1^n \frac{n(n+1)(4n-1)}{3!}$$

(D)三乘支垛

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!},$$

第二垛，

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(4n+0)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!},$$

第三垛，

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(4n+2)}{6!}$$

同理可得 r 乘支垛第 m 垛之積：

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\{(r+1)n+(m-r+1)\}}{(m+2)!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)\{r+1)n+(m-r+2)\}}{(m+3)!}$$

第二卷論乘方垛及其支垛，分類如下：

太垛，

$$\sum_{1}^{n}1=n,$$

元垛，

(E)乘方垜

$$\sum_1^n n=\frac{n(n+1)}{2},$$

一乘方垜,

$$\sum_1^n n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

二乘方垜,

$$\sum_1^n n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

三乘方垜,

$$\sum_1^n n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

四乘方垜,

$$\sum_1^n n^5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12},$$

五乘方垜,

$$\sum_1^n n^6=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42},$$

六乘方垜,

$$\sum_1^n n^7=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}.$$

李善蘭則由「乘方垛各廉表」,求得各方垛之總和,如:

$$\sum_{1}^{n} n^5 = (1)\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{6!} + (26)\frac{(n-1)n\cdots(n+4)}{6!}$$

$$+(66)\frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{6!} + (26)\frac{(n-3)(n-2)\cdots(n+2)}{6!} + (1)\frac{(n-4)(n-3)\cdots(n+1)}{6!}$$

$$= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.$$

乘方垛各廉表.

$$(A_1=1),$$
$$(A_2=1),(B_2=1),$$
$$(A_3=1),(B_3=4),(C_3=1),$$
$$(A_4=1),(B_4=11),(C_4=11),(D_4=1),$$
$$(A_5=1),(B_5=26),(C_5=66),(D_5=26),(E_5=1),$$
$$(A_6=1),(B_6=57),(C_6=302),(D_6=302),(E_6=57),(F_6=1),$$
$$(A_7=1),(B_7=120),(C_7=1191),(D_7=2416),(E_7=1191),(F_7=120),(G_7=1),$$
$$(A_8=1),(B_8=247),(C_8=4293),(D_8=15619),(E_8=15619),(F_8=4293),(G_8=247),(H_8=1)$$

至乘方垛各廉表之成就,可由下式說明之:

$A_1=1,$

$A_2=1,\quad B_2=2\times0+1\times1=1,$

$A_3=1,\quad B_3=2\times1+2\times1=4,\qquad C_3=3\times0+1\times1=1,$

$A_4=1,\quad B_4=2\times4+3\times1=11,\qquad C_4=3\times1+2\times4=11,$

$D_4=4\times0+1\times1=1,$

$A_5=1,\quad B_5=2\times11+4\times1=26,\qquad C_5=3\times11+3\times11=66,$

$D_5=4\times1+2\times11=26,$

$A_6=1,\quad B_6=2\times26+5\times1=57,\qquad C_6=3\times66+4\times26=302,$

$D_6=4\times26+3\times66=302,$

$A_7=1,\quad B_7=2\times57+6\times1=120\qquad C_7=3\times302+5\times57=1191,$

$D_7=4\times302+4\times302=2416,$

$A_8=1,\quad B_8=2\times120+7\times1=247,\qquad C_8=3\times1191+6\times120=4293,$

$$D_8=4\times2416+5\times1191=15619,$$

$\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$E_5=5\times0+1\times1=1,$

$E_6=5\times1+2\times26=57,\qquad F_6=6\times0+1\times1=1,$

$E_7=5\times57+3\times302=1191,\qquad F_7=6\times1+2\times57=120,$

$G_7=7\times0+1\times1=1,$

$E_8=5\times1191+4\times2416=15619,\qquad F_8=6\times120+3\times1191=4293,$

$G_8=7\times1+2\times120=247,\qquad H_8=8\times0+1\times1,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

故 $$1^P+2^P+3^P+\cdots\cdot n^P=(A_P)_1\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdot(n+P)}{(P+1)!}$$

$$+(B_P)_2\frac{(n-1)n(n+1)\cdots\cdot(n+P-1)}{(P+1)!}+(C_P)_3\frac{(n-3)(n-2)(n-1)\cdots\cdot(n+P-2)}{(P+1)!}$$

$$+\cdots\cdot+(A_P)_P\frac{\{n-\overline{P-1}\}\{n-\overline{P-2}\}\cdots\cdot n(n+1)}{(P+1)!}$$

而 $A_P=1$,

$B_P=2^{P-2}\times 1+2^{P-3}\times 2+2^{P-4}\times 3+\cdots\cdots+2^0(P-1)$,

$C_P=3^{P-3}\times 1\times B_2+3^{P-4}\times 2\times B_3+3^{P-5}\times 3\times B_4+\cdots\cdots+3^0(P-2)B_{P-1}$,

$D_P=4^{P-4}\times 1\times C_3+4^{P-5}\times 2\times C_4+4^{P-6}\times 3\times C_5+\cdots\cdots+4^0(P-3)C_{P-1}$.

……………………………………………………

$B_P=2^{P-2}\times 1+2^{P-3}\times 2+2^{P-4}\times 3+\cdots\cdots+2^0(P-1)$

$A_P=1$.

(F)二乘方垛

一垛，$\sum_1^n n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

二垛，$\sum_1^n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

三垛，$\sum_1^n\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{6!}$

四垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{6!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{7!}$

五垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{7!}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+5)(6n^2+30n+20)}{8!}$

(G)三乘方垜

一垜，$\sum_{1}^{n}n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$，

二垜，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$．

$=\frac{n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+3n-1)}{60}$．

三垛，$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(2n^3+6n^2+3n-1)}{60}$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n^3+18n^2+16n-3)}{840}.$$

第三卷論三角自乘垛及其支垛:

(H)三角自乘垛

子垛，$\sum_{1}^{n}n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$

丑垛，$\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)}{2!}\right\}^2=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$

寅垛，$\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right\}^2$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(20n^3+90n^2+94n+6)}{7!}$$

卯垜，$\sum_{1}^{n}\left\{\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\right\}^{2}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(70n^4+560n^3+1370n^2+1000n+24)}{9!}$

....

第四卷論三角變垜,三角再變垜,三角三變垜:

(I)三角變垜

一垜，$\sum_{1}^{n} n=\frac{n(n+1)}{2!}$，

二垜，$\sum_{1}^{n} n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$，

三垜，$\sum_{1}^{n} n\cdot\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{4!}$，

$$\text{四垜},\ \sum_1^n n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$$

$$\text{五垜},\ \sum_1^n n\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(5n+1)}{6!}$$

(J)三角再變垜

$$\text{一垜},\ \sum_1^n n^2=\frac{n\{n(2n+3)+1\}}{3!},$$

$$\text{二垜},\ \sum_1^n n^3=\frac{n(n+1)\{2n(3n+3)+0\}}{4!},$$

$$\text{三垜},\ \sum_1^n n^2\cdot\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{n(n+1)(n+2)\{3n(4n+3)-1\}}{5!},$$

四垛，$\sum_{1}^{n} n^2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\{4n(5n+3)-2\}}{6!}$

五垛，$\sum_{1}^{n} n^2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\{4n(6n+3)-3\}}{7!}$

(K)三角三變垛

一垛，$\sum_{1}^{n} n^3 = \frac{n[n\{n(6n+12)+6\}-0]}{4!} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$，

二垛，$\sum_{1}^{n} n^4 = \frac{n[n\{n(24n+36)+4\}-4]}{5!}$，

$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

三垛，$\sum_{1}^{n} n^3 \cdot \frac{n(n+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)[n\{n(60n+72)-6\}-6]}{6!}$

四垛，$\sum_{1}^{n} n^{8}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$，

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)[n\{n(120n+120)-24\}-6]}{7!}$$

五垛，$\sum_{1}^{n} n^{8}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$

$$=\frac{n(n+1)\cdots(n+4)[n\{n(210n+180)-50\}-4]}{9!}.$$

26. 清華蘅芳

華蘅芳著積較術三卷，爲行素軒算稿之四．按開方別術成於同治壬申(1872)，爲行素軒算稿之一．行素軒算稿自刻於光緒壬午(1882)，則此書之成，蓋在同治壬申，光緒壬午間(1872-1882)矣．華蘅芳又譯英華里司(原名未詳)代數術(1873)，其卷十七有「論無窮之級數.」

積較術卷一論普通積較術(*Method of finite difference*)，因普通積較爲:

$$A_n \cdots\cdots A_3 \quad A_2 \quad A_1 \quad A/$$

$$B_n \cdots\cdots B_4 \quad B_3 \quad B_2 \quad B_1/B$$

$$C_n \cdots\cdots C_4 \quad C_3 \quad C_2/C_1 \quad C$$

$$D_n \cdots D_4 \quad D_3/D_2 \quad D_1 \quad D$$

華氏分別左右,并補其缺格,爲書:

$$A_n, \cdots\cdots A_3, \quad A_2 \quad A_1 \quad A/A_{-1} \quad A_{-2} \quad A_{-3} \cdots\cdots A_{-n},$$

$$B_n, \cdots\cdots B_3, \quad B_2 \quad B_1/B \quad B_{-1} \quad B_{-2} \quad B_{-3} \cdots\cdots B_{-n},$$

$$C_n, \cdots\cdots C_3, \quad C_2/C_1 \quad C \quad C_{-1} \quad C_{-2} \quad C_{-3} \cdots\cdots C_{-n},$$

$$D_n, \cdots\cdots D_3,/D_2 \quad D_1 \quad D \quad D_{-1} \quad D_{-2} \quad D_{-3} \cdots\cdots D_{-n},$$

而

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A + B_1, \\ A_2 = A_1 + B_2, \\ A_3 = A_2 + B_3, \\ \cdots\cdots \\ A_n = A_{n-1} + B_n; \end{array}\right\} (1) \quad \left.\begin{array}{l} A_{-1} = A - B \\ A_{-2} = A_{-1} - B_{-1} \\ A_{-3} = A_{-2} - B_{-2} \\ \cdots\cdots \\ A_{-n} = A_{-n+1} - A_{-n+1} \end{array}\right\} (2) \cdots\cdots (A)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= B + C_1, \\ B_2 &= B_1 + C_2, \\ B_3 &= B_2 + C_3, \\ &\cdots\cdots \\ B_n &= B_{n-1} + C_n; \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} B_{-1} &= B - C, \\ B_{-2} &= B_{-1} - C_{-1}, \\ B_{-3} &= B_{-2} - C_{-2}, \\ &\cdots\cdots \\ B_{-n} &= B_{-n+1} - C_{-n+1} \end{aligned}\right\} (2) \cdots\cdots (B)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= C + D_1, \\ C_2 &= C_1 + D_2, \\ C_3 &= C_2 + D_3, \\ &\cdots\cdots \\ C_n &= C_{n-1} + D_n \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} C_{-1} &= C - D, \\ C_{-2} &= C_{-1} - D_{-1}, \\ C_{-3} &= C_{-2} - D_{-2}, \\ &\cdots\cdots \\ C_{-n} &= C_{-n+1} - D_{-n+1} \end{aligned}\right\} (2) \cdots\cdots (C)$$

若較數只有二次,即 $C=C_1=\cdots=C_n=C_{-1}=\cdots=C_{-n}$,

則依法代入(C),(B),再由(A)得:

$$A_n=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C, \quad B_n=B+nC, \qquad C_n=C$$

若較數共有三次,即 $D=D_1=\cdots\cdots=D_n=D_{-1}=\cdots\cdots=D_{-n}$,

則依法代入(C),(B),再由(A)得:

$$A_n=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}D,$$

$$B_n=B+nC+\frac{n(n+1)}{2!}D,$$

$$C_n=C+nD,$$

$$D_n=D.$$

若較數不僅二,三次,則得普通公式爲:

$$\left.\begin{aligned}
A_n&=A+nB+\frac{n(n+1)}{2!}C+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}D+\cdots\cdots\cdots,\\
B_n&=B+nC+\frac{n(n+1)}{2!}D+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}E+\cdots\cdots\cdots,\\
C_n&=C+nD+\frac{n(n+1)}{2!}E+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}F+\cdots\cdots\cdots,\\
D_n&=D+nE+\frac{n(n+1)}{2!}F+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}G+\cdots\cdots\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(D)$$

如有積較

(上差) $d_1=A,\quad A_{-n},\quad A_{-2n},\quad A_{-3n}\cdots\cdots,$

(二差) $d_2=(A-A_{-n}),\quad (A_{-n}-A_{-2n}),\quad (A_{-2n}-A_{-3n}),\cdots\cdots,$

(三差) $d_3=(A-2A_{-n}+A_{-2n}),(A_{-n}-2A_{-2n}+A_{-3n}),(A_{-2n}-2A_{-3n}+A_{-4n})\cdots\cdots,$

(四差) $d_4=(A-3A_{-n}+3A_{-2n}-A_{-3n}),\quad (A_{-n}-3A_{-2n}+3A_{-3n}-A_{-4n})\cdots\cdots,$

(五差) $d_5=(A-4A_{-n}+6A_{-2n}-4A_{-3n}+A_{-4n})\cdots\cdots,$

於(D)式內令$-n,-2n,-3n,-4n,\cdots\cdots$等代$n$,則:

$$A_{-n}=A-nB+\frac{n(n-1)}{2!}C+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-2n}=A-2nB+\frac{2n(2n-1)}{2!}C+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-3n}=A-3nB+\frac{3n(3n-1)}{2!}C+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$A_{-4n}=A-4nB+\frac{4n(4n-1)}{2!}C+\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{3!}D+\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= A \\
d_2 &= nB - \frac{n^2-n}{2!}C + \frac{n^3-3n^2+2n}{3!}D \\
&\quad - \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4!}E + \cdots, \\
d_3 &= n^2C - \frac{6n^3-6n^2}{3!}D + \frac{14n^4-36n^3+22n^2}{4!}E \\
&\quad - \cdots, \\
d_4 &= n^3D - \frac{36n^4-36n^3}{4!}E + \cdots, \\
d_5 &= n^4E - \cdots.
\end{aligned}\right\} \quad (E)$$

於(E)式中,

令 $n=10$,

則 $d_1 = A$,

$$d_2 = 10B - 45C + 120D - 210E + 252F - \cdots,$$

$$d_3 = 100C - 900D + 4425E - 15000F + \cdots,$$

$$d_4 = 1000D - 13500E + 96750F - \cdots,$$

$$d_5 = 10000E - 18000F + \cdots,$$

$$d_6 = 100000F - \cdots. \qquad (E_1)$$

令 $n = \frac{1}{10}$,

則 $d_1 = A$

$$d_2=\frac{1}{10}B+\frac{9}{200}C+\frac{171}{6000}D+\frac{4959}{240000}E$$

$$+\frac{193401}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_3=\frac{1}{100}C+\frac{54}{6000}D+\frac{1854}{240000}E+\frac{80370}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_4=\frac{1}{1000}D+\frac{324}{240000}E+\frac{17550}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_5=\frac{1}{10000}E+\frac{2160}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_6=\frac{1}{100000}F+\cdots. \qquad (E_2)$$

令 $n=-1$,

則 $d_1=A$,

$$d_2=-B-C-D-E-F-\cdots,$$

$$d_3=C+2D+3E+4F+\cdots,$$

$$d_4=-D-3E-6F-\cdots,$$

$$d_5=E+4F+\cdots,$$

$$d_6=-F-\cdots. \qquad (E_3)$$

令 $n=-10$,

則 $d_1=A$,

$$d_2=-10B-55C-220D-715E-2002F-\cdots,$$

$$d_3=100C+1100D+7425E+38500F+\cdots,$$

$$d_4=-1000D-16500E-156750F-\cdots,$$

$$d_5=10000E+220000F+\cdots,$$

$$d_6=-100000F-\cdots. \qquad (E_4)$$

令 $n=-\frac{1}{10}$,

$$d_1=A,$$

$$d_2=-\frac{1}{10}B-\frac{11}{100}C-\frac{231}{6000}D-\frac{7161}{240000}E$$

$$-\frac{293601}{12000000}F-\cdots,$$

$$d_3=\frac{1}{100}C+\frac{66}{6000}D+\frac{2574}{240000}E+\frac{122430}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_4=-\frac{1}{1000}D-\frac{396}{240000}E-\frac{24750}{12000000}F-\cdots,$$

$$d_5=\frac{1}{10000}E+\frac{2640}{12000000}F+\cdots,$$

$$d_6=-\frac{1}{100000}F- \qquad (E_5)$$

華氏應用$(E_1)(E_2)$,(E_3),(E_4),(E_5),各式,以求方程式之根.例如:

$X^2+2X-16=0$,求 X 之根.

先以 $X=0, 1, 2, 3, 4,\cdots$ 逐次代入得 $-16, -13, -8, -1, 8$, 則 X 在 3 與 4 之間,列爲積較式,卽:

$A_n\cdots 8(A_1)$,	$-1(A)$,	-8,	-13,	$-16,\cdots A_{-n}$	
$B_n\cdots 9(B_1)$,	$7(B)$,	5,	3,	$1,\cdots B_{-n}$	
$C_n\cdots 2(C_1)$,	$2(C)$,	2,	2,	$2,\cdots C_{-n}$	
4,	3,	2,	1,	0.	(邊數)

而 $-16, 1, 2$ 一行之數,稱爲:「邊數0,長率1之積較數」.

邊數代入後,因方根在3與4之間,故3後應以$\frac{1}{10}$遞進.凡以$\frac{1}{10}$遞進或遞退,則用(E_2)式或(E_5)式.其以10遞進或遞退,則用(E_1)式或(E_4)式.

今令 $A=-1,\quad B=7,\quad C=2,$

從(E_2)得:

$$d_1=-1,\quad d_2=0.79,\quad d_3=0.02,$$

此時之$X=3.00$,列爲積較.

0.64,	$-0.19(A)$,	-1.00	
0.83,	$0.81(B)$,	0.79	
0.02,	$0.02(C)$,	0.02	
3.20	3.10	3.00	(邊數)

而X在3.10及3.20之間.

又令　$A=-0.19$,　$B=0.81$,　$C=0.02$,

從(E_2)得:

$$d_1=-0.19,\quad d_2=0.819,\quad d_3=0.0002,$$

此時之$X=3.10$,列爲積較.

0.0569,	−0.0256,	−0.1079,	−0.1900	
0.0825,	0.0823,	0.0821,	0.819	
0.0002,	0.0002,	0.0002,	0.0002	
3.13	3.12	3.11	3.10	(邊數)

而X在3.12,及3.13之間.

同理得,　　$X=3.1231$.

積較術卷二,「論造表用表之法」,

因(A)平方數之積較爲:

X^2:

(1)

16,	9,	4,	1,	0
7,	5,	3,	1	
2,	2,	2		
4,	3,	2,	1,	0

或

X^2:

(2)

16,	9,	4,	1,	0,
7,	5,	3,	1,	−1,
2,	2,	2,	2,	2,
4,	3,	2,	1,	0

故X^2, 0 邊長率爲1積較之數如(2)之(0)−(−1)−(2).

或取(1)之斜行(0)−(1)−(2),改經直行,自下而上,變其

偶層之號,亦得$(0)-(-1)-(2)$.

(B)立方數之積較爲:

X^3:

$$\begin{array}{|ccccc|}
64 & 27 & 8 & 1 & 0 \\
37 & 19 & 7 & 1 & \\
18 & 12 & 6 & & \\
6 & 6 & & &
\end{array}
\quad 或 \quad
X^3: \begin{array}{|ccccc|}
64 & 27 & 8 & 1 & 0 \\
37 & 19 & 7 & 1 & 1 \\
18 & 12 & 6 & 0 & -6 \\
6 & 6 & 6 & 6 & 6
\end{array}$$

如前例X^3,0邊長率爲1積較之數爲

$$(0)-(1)-(-6)-(6).$$

又X^4,0邊長率爲1積較之數爲

$$(0)-(-1)-(14)-(-37)-(24).$$

由是可製成「諸乘方正元積較表」,如:

(n^8)	(n^7)	(n^6)	(n^5)	(n^4)	(n^3)	(n^2)	(n^1)	(n^0)
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1
-1,	1,	-1,	1,	-1,	1,	-1,	1	
254,	-126,	62,	-30,	14,	-6,	2		
-5796,	1806,	-540,	150,	-36,	6			
40824,	-8400,	1560,	-240,	24,				
-126000,	16800,	-1800,	120,					
191520,	15120,	720,						
-14120,	5040,							
40320,								

華氏應用「諸乘方正元積較表」,以求方程式之根.例如:

$X^2+2X-16=0$,求 X 之根

因　隅$=1$,　　方$=2$,　　實$=-16$,

由「諸乘方正元積較表」,知:

0,	0,	0
-1,	1	
2		

乘得:

0	0	-16	-16	併得
-1	2		1	
2			2	
			0	(邊數)

由上所得「0邊長率爲1積較之數」,可以得下之積較式,卽:

A_n…………	$8(A_1)$,	$-1(A)$,	-8,	-13,	-16,…………	A_{-n}
B_n…………	$9(B_1)$,	$7(B)$,	5,	3,	1,…………	B_{-n}
C_n…………	$2(C_1)$,	$2(C)$,	2,	2,	2,…………	C_{-n}
	4,	3,	2,	1,	0,	(邊數)

因此方程式之根在3,4之間,其根數每次以1遞進.

又如:　$X^2-39X-172=0$,求 X 之根,

此方程式之根在10以上,因直接求「0邊長率爲10積較之數.」

因 隅=1.(100), 方=−39(10), 實=−172,

由「諸乘方正元積較表」,知:

0,	0,	1
−1,	1	
2		

乘得:

0	0	−162	−162	併得
−100	−390		−490	
200			200	
			0	(邊數)

由上所得「0邊長率爲10積較之數」,可以得下之積較式,即:

378	−132	−442	−552	−462	−172	
510	310	110	−80	−290	−490	
200	200	200	200	200	200	
50	40	30	20	10	0	(邊數)

因知此方程式之根在40, 50之間,其根數每次以10遞進.而根數之小數位,可按前術計算.

積較術卷三論積較術應用於各種垛積之法.因由前「諸乘方正元積較表」,知:

n^0, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 1_1,

n^1, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, 1_2,

n^2, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, -1_2, 2_3,

n^3, 0 邊長率爲 1 積較之數爲: 0_1, 1_2 -6_3, 6_4,

………………………………………………………………

即 $\sum_1^n n$ 之積較爲: 0_1, 1_2,

$\sum_1^n n^2$ 之積較爲: 0_1, -1_2, 2_3,

$\sum_1^n n^3$ 之積較爲: 0_1, 1_2, -6_3, 6_4,

………………………………………………………………

既知上義,即可以求各垛積之積較,如:

$\sum_1^n \frac{n(n+1)}{2!}$ 之積較爲: 0_1, 0_2, 1_3,

$\sum_1^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$ 之積較爲: 0_1, 0_2, 0_3, 1_4,

………………………………………………………………

既得積較,卽可由「積較還原表」得各垜積之總和.蓋「積較之數,本從諸乘方式實,方,廉,隅之數而生.故從任一行之積較,皆可返求其實,方,廉,隅之數」,先舉例以明之,如:

(1) 有積較式 $\left|\begin{matrix} -16 & (A) \\ 1 & (B) \\ 2 & (C) \end{matrix}\right|$ 求其平方之式.

法以 $\left|\begin{matrix} -16^{*} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right|$ 爲第一式,

$\left|\begin{matrix} \frac{1}{1}+\frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2^{*} \\ 1 \end{matrix}\right|$ 爲第二式,

$\left|\frac{1}{1}\right| = \left|1^{*}\right|$ 爲第三式,

則所求方程式爲

$$X^{2}+2X-16=0.$$

又如:

(2) 有積較式, $\left|\begin{array}{rl} -105 & (A) \\ 87 & (B) \\ -36 & (C) \\ 6 & (D) \end{array}\right|$ 求其立方之式,

法以 $\left|\begin{array}{rl} -105 & (A) \\ 87 & (B) \\ -36 & (C) \\ 6 & (D) \end{array}\right|$ 爲第一式,

$$\left|\begin{array}{r} \dfrac{87(B)}{1}-\dfrac{36(C)}{2}+\dfrac{6(D)}{3} \\ -\dfrac{36(C)}{2}+\dfrac{6(D)}{3} \\ \dfrac{6(D)}{3} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} 71^{*} \\ 16 \\ 2 \end{array}\right| \text{ 爲第二式,}$$

$$\left|\begin{array}{r} -\dfrac{36(C)}{2}+\dfrac{6(D)}{3}+\dfrac{6(D)}{2\times 3} \\ \dfrac{6(D)}{2\times 3} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{r} -15^{*} \\ 1 \end{array}\right| \text{ 爲第三式}$$

得原方程式爲:

$$X^3-15X^2+71X-105=0.$$

如列爲表,則得「積較還原表」,如:

0,	0,	0,	0,	0,	0,	1
$\frac{120G}{6!}$	$\frac{24F}{5!}$	$\frac{6E}{4!}$	$\frac{2D}{3!}$	$\frac{C}{2!}$	$\frac{B}{1}$	
$\frac{374G}{6!}$	$\frac{50F}{5!}$	$\frac{11E}{4!}$	$\frac{3D}{3!}$	$\frac{C}{2!}$		
$\frac{225G}{6!}$	$\frac{35F}{5!}$	$\frac{6E}{4!}$	$\frac{D}{3!}$			
$\frac{85G}{6!}$	$\frac{10F}{5!}$	$\frac{E}{4!}$				
$\frac{15G}{6!}$	$\frac{F}{5!}$					
$\frac{G}{6!}$						

華氏應用「積較還原表」,以求原方程式,例如

有積較式

$-105(A)$
$87(B)$
$-36(C)$
$6(D)$

求其立方之式,

以積較數橫列爲

$$6(D),\quad -36(C),\quad 87(B),\quad -105(A).$$

由「積較還原表」知:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & \\ \frac{3}{6} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{6} & & & \end{vmatrix}$$

乘得,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -105 \\ 2 & -18 & 87 & \\ 3 & -18 & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \begin{matrix} -105 \\ 71 \\ -15 \\ 1 \end{matrix}$$ 併得.

即得 $X^3-15X^2+71X-105=0.$

故既得積較,即可由「積較還原表」得各垛積之總和.

華氏又於垛積演較(1889)一書,論積較術應用於四元玉鑑之法.

27. 清勞乃宣

清勞乃宣亦著垛積籌法(1894)一書,論各垛積之總和.就中三角垛,方垛,縱方垛,已見於董祐誠之著書.即六角垛中之三乘六角垛,四乘六角垛等,即李善蘭

之二乘方垛一垛,二垛等,惟其記法略異耳.如:

(1)平六角垛,

$$1+6+12+\cdots\cdots=\frac{(n-1)n\cdot 6}{2!}+1,$$

(2)立六角垛,

$$1+7+19+\cdots\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)\cdot 6}{3!}+\frac{n}{1},$$

(3)三乘六角垛,

$$1+8+27+\cdots\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\cdot 6}{4!}+\frac{n(n+1)}{2!},$$

或 $$\sum_1^n n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(4)四乘六角垛,

$$1+9+36+\cdots\cdots=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\cdot 6}{5!}$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

或 $$\sum_1^n\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{5!}$$

……………………………………………………

28. 強汝詢及其他

清強汝詢(1824–1894)著垜積衍術四卷,論一乘垜,二乘垜,三乘垜,四乘垜等遞變之法.前人所論垜積,有一部分包括在內.就中并可得比較有序之連乘數(*Products of natural nnmbers*)數種,如:

1. $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\cdots n$ 項 $=n^2(n+1)$,

2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot7+3\cdot4\cdot11+\cdots n$ 項 $=n^2(n+1)(n+2)$,

3. $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot9+3\cdot4\cdot5\cdot14+\cdots n$ 項

$$=n^2(n+1)(n+2)(n+3),$$

....

4. $1\cdot3\cdot2+2\cdot4\cdot3+3\cdot5\cdot4+\cdots n$ 項

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$ (朱世傑)

5. $1\cdot3\cdot2^2+2\cdot4\cdot3^2+3\cdot5\cdot4^2+\cdots n$ 項

$$=\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$$ (李善蘭)

6. $1\cdot3\cdot2^3+2\cdot4\cdot3^3+3\cdot5\cdot4^3+\cdots n$ 項

$$=\frac{1}{6}n(n+1)^2(n+2)^2(n+3).$$

其於強汝詢前後言級數者,則:

顧觀光(1799–1862)九數存古(1892),其卷五「堆積術」引

宋沈括,楊輝,秦九韶,元朱世傑之說.

傅九淵有不爲齋算學卷二,有「招差算例」.

繆朝銓秋徵算稿(1892)有「招數一得」.

龔銘鳳算學雜問(1897)以代數法證形數總和.

楊兆鋆須曼算學(1898)卷五,有「堆垛演算」.

周達有垛積新義(1901),垛積餘義(1901).

張爔有堆垛術(1903)專論堆垛之變.

三角術及三角函數表之東來

目 次

(一) 集目
1. 平面三角術集目.
2. 球面三角術集目.
3. 三角函數表集目.
(二) 平面三角術之東來
4. 平面三角術第一次輸入中國.
5. 三角形邊角和較相求法之應用.
6. 平面三角術第二次輸入中國.
(三) 球面三角術之東來
7. 球面三角術輸入中國.
8. 中算家之球面三角術研究上.
9. 中算家之球面三角術研究下.
10. 球面三角術二次輸入中國.
(四) 三角函數表之東來
11. 三角函數表輸入中國.
12. 三角函數表之計算.

(一) 集目

1. 平面三角術集目

(1) 測量全義第一卷,「測直線三角形,」徐光啓修,(1631).

(2) 五緯曆指三卷崇禎曆書本.

(3) 三角算法前半卷,天學會通本,南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.

(4) 角度衍,惺齋雜著第二三種,王元啓撰,未刊.

(5) 平三角舉要五卷,梅勿菴曆算全書本,梅文鼎撰.

(6) 三角法會編二册,錫山曆算全書本,楊作枚撰.

(7) 三角法摘要一卷,測算刀圭本,年希堯撰(1718).

(8) 數理精蘊下編卷十七(1723年印本).

(9) 句股引蒙十卷,陳訏撰(1722).

(10) 句股割圜記三卷,戴震撰(1755).

(11) 數學精詳十三卷,屈曾發撰(1772).

(12) 釋弧卷上,里堂學算記本,焦循撰(1795–1798).

(13) 矩線原本卷二,數學五書本,安淸翹撰(1818).

(14) 三角和較算例一卷,觀我生室彙編本,羅士琳撰(1840).

(15) 句股六術一卷,下學盦算術之一,項名達撰.

(16) 三角和較術一卷,項名達撰.

(17) 算法大成上編卷五,卷六,陳杰撰(1844).

(18) 求表捷術共四種九卷,戴煦撰.

(19) 平三角記,九數外錄之內,武陵山人遺書本,顧

觀光撰.

(20) 平三角術,算學二十一種本,吳嘉善撰(1863).

(21) 學彊恕齋筆算卷五,卷六,梅啓照撰(1870).

(22) 代數術卷二十四,卷二十五,英,華里司撰,英,傅蘭雅,清,華蘅芳共譯(1873).

(23) 圜率考眞圖解一卷.白芙堂叢書本,左潛,曾紀鴻,黃宗憲共撰(1874).

(24) 三角數理卷二,英,海麻士撰,英,傅蘭雅,清,華蘅芳共譯(1877).

(25) 三角須知一册,格致須知本,英,傅蘭雅撰.

(26) 平三角測量法,算草叢存本,華蘅芳撰.

(27) 三角和較算例演草一卷,王鑒撰,未刻.

(28) 釋句股形邊角相求法,一得齋算草本,崔朝慶撰(1891).

(29) 弧矢啓祕圖解一卷,李善蘭撰,汪遠焜繪圖,國學雜誌第二,三,四期印本.

(30) 八線備旨卷一,卷二,卷三,美,羅密士撰,美,潘愼文,謝洪賚共譯(1894年本).

(31) 算學答問一卷,龔銘鳳撰(1897).

(32) 句股邊角圖說一册,胡炳文撰(1898).

(33) 句股邊角相求圖解舉隅一卷,吳和鼐撰(1898).

(34) 三角和較術解四卷,周達撰(1899).

(35) 平三角和較術圖解二卷,張毓瑗撰(1902).

(36) 三角新理三卷,求一得齋算學本,陳志堅撰(1904).

(37) 八線拾級一册,美,温德鄂撰,劉光照譯(1904印).

(38) 句股形邊角相求術圖解一卷,石振埏撰(1906).

2. 球面三角術集目

(1) 測量全義第七卷,「測曲線三角形」,徐光啓修1631).

(2) 三角算法後半卷,天學會通本,南海穆尼閣著,北海薛鳳祚纂.

(3) 弧三角舉要五卷,梅文鼎撰(1684).

(4) 環中黍尺五卷,梅文鼎撰(1700).

(5) 塹堵測量二卷,梅勿庵曆算全書本,梅文鼎撰.

(6) 三角法摘要一卷,測算刀圭本,年希堯撰(1718).

(7) 正弧三角疏義一卷,正弧三角會通一卷,翼梅本,江永撰.

(8) 曆象考成上編,卷二,卷三,「弧三角」上下二卷(1723刻).

(9) 割圜密率捷法卷二;「弧線三角形邊角相求」,明安圖撰(1736–74).

(10) 句股割圜記三卷,戴震撰(1755).

(11) 弧三角形三邊求角用開方得半角正弦解,在赤水遺珍之內,梅氏叢書輯要本,梅㲄成撰(1761).

(12) 衡齋算學第一册,汪萊撰(1796).

(13) 釋弧卷中,卷下,里堂學算記本,焦循撰 (1795–98).

(14) 衡齋算學第四册,汪萊撰(1799).

(15) 一線表用卷一,數學五書本,安淸翹撰(1817).

(16) 矩線原本卷三,數學五書本,安淸翹撰(1818).

(17) 弧角設如三卷,翠微山房數學本,張作楠撰(1822).

(18) 弧三角舉隅一卷,翠微山房數學本,張作楠撰(1822).

(19) 斜弧三邊求角補術一卷,董方立遺書本,董祐誠撰(1821).

(20) 弧三角和較算例,附句股六術之後,項名達撰(1843).

(21) 算法大成上編,卷七,至卷十「弧三角」,陳杰撰

(1844).

(22) 切線分外角法,在天算或問卷一,則古昔齋算學十三本,李善蘭撰.

(23) 正弧形邊角比例法,斜弧三角形用垂弧法,斜弧三角形用次形法,算賸餘稿之內,武陵山人遺書本,顧觀光撰(1851).

(24) 解斜弧形切線分角法,算賸續編之內,武陵山人遺書本,顧觀光撰(1851).

(25) 弧三角記,九數外錄之內,武陵山人遺書本顧觀光撰.

(26) 弧三角平視法一卷,東塾遺書本陳澧撰(1857).

(27) 弧三角拾遺一卷,務民義齋算學本,徐有壬撰.

(28) 學彊恕齋筆算卷八,卷九,「弧三角」,梅啓照撰(1870).

(29) 弧三角術一卷, 算學二十一種本, 吳嘉善撰(1872).

(30) 三角數理卷九至十二,英,海麻士撰,英,傅蘭雅,華蘅芳共譯(1877).

(31) 八線備旨卷四,美,羅密士撰,美,潘愼文,謝洪賚共譯(1894 印).

(32) 弧三角圖解十卷,盛鍾聖,鍾彬撰(1894).

(33) 弧三角釋術一册,吳興讓撰(1901).

(34) 弧三角題解口卷,方愷撰.

(35) 弧三角闡微五册,歐禮斐編.

3. 三角函數表集目

(1) 測圓八線小表,在測量全義卷三之內,徐光啓修(1631).

(2) 割圓八線表六卷,崇禎曆書本,湯若望,徐光啓共譯.

(3) 割圓八線立成長表四卷,崇禎曆書本,徐光啓撰.

(4) 割圓句股八線表,附代句股開方法一卷,新法曆書本,湯若望撰.

(5) 比例四線新表一卷,曆學會通本,薛鳳祚,穆尼閣共譯.

(6) 四線對數表一册,明末清初套印本.

(7) 天弧象限表,李子金撰(1683).

(8) 八線眞數表一卷,測算刀圭本,年希堯校(1718).

(9) 八線假數表一卷,測算刀圭本,年希堯校(1718).

(10) 對數廣運一卷,年希堯撰.

(11) 數表一卷.

(12) 三角割圜八線小表,在句股引蒙之內,陳訏撰(1722).

(13) 八線表上下卷,數理精蘊卷一,卷二(1723年印本).

(14) 八線對數表上下卷,數理精蘊卷七,卷八(1723年印本).

(15) 八線表上下,附數學精詳之後,屈曾發撰(1772).

(16) 一線表在一線表用之內,數學五書本,安清翹撰(1817),

(17) 切線表在學算存略之內,數學五書本,安清翹撰.

(18) 八線類編三卷,翠微山房叢書本,張作楠校.

(19) 八線對數類編二卷,翠微山房叢書本,張作楠校.

(20) 三角割圜八線小表,在學彊恕齋筆算卷十之內,梅啓照撰(1870).

(21) 八線對數類編二卷,張作楠原輯,黃宗憲校正,丁取忠重刻(1874).

(22) 弦切對數表八卷,賈步緯校.

(23) 八線簡表一卷,賈步緯校.

(24) 八線對數簡表一卷,賈步緯校.

(25) 八線簡表,中西算學大成第九九卷本,陳維祺輯(1889).

(26) 八線對數簡表,中西算學大成第一百卷本.

(二) 平面三角術之東來

4. 平面三角術第一次輸入中國

平面三角之輸入,實始於明崇禎辛未(1631).是年徐光啓與耶穌會士所修測量全義,其卷一測直線三角形,即論平面三角術,以當時三角術在歐洲尙無善本,[1]故僅輸入之各公式:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\ \tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos\beta,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\cdots,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\cdots.$$

---

(1) 參觀本篇第4節「平面三角術第二次輸入中國」內所述.

入清則薛鳳祚(字儀甫,淄川人)從穆尼閣受對數,及三角術是時稱平面三角形爲正線三角形.因以對數立算,故有下列各式:

$$\log b=\log a+\log\sin\beta-\log\sin\alpha,\cdots$$

$$\log\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\log\frac{a-b}{2}+\log\tan\frac{180-\gamma}{2}-\log\frac{a+b}{2},\cdots$$

$$\log\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\{[\log(s-b)+\log(s-c)]+20-[\log s+\log(s-a)]\},\cdots$$

是時三角術初入中國,解者絕少,除梅文鼎(字勿菴,宣城人1633–1721)外,餘多稗販成說而已.梅文鼎平三角舉要首以幾何法證上列各公式.而年希堯(字允恭,廣寧人)之測算刀圭,中三角法摘要(1718),陳訏(字言揚,海寧人)之句股引蒙,則僅傳引梅說,無所發明.

康熙壬寅(1722)數理精蘊告成,翌年刻行.其下編卷十七,「面部七」,「三角形邊線角度相求」即解正,斜三角形也.此卷并以幾何法證:

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta,$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2},$$

卷十八,「面部八」,「測量,句股測量,三角測量」,所引者與梅文鼎三角法舉要相同.此外又有$\sin\frac{a}{3}$求法,卽三分取一用益實歸法,則為前此所未論,自有梅文鼎三角法舉要及數理精蘊,此學知者漸衆,而屈曾發(字省園,虞山人)數學精詳,卷十一,「三角形邊線角度相求法」,及安淸翹(號翼聖,垣曲人,(1759-1830)矩線原本卷二(1818),「測量篇上」,幷本上列二書之成說也.

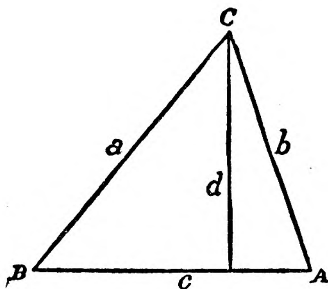
時則戴震(字東原,休寧人 ,1724-1777) 雅意嗜古,曾改同時輸入之籌算(*Napier's rod*)為策算;乾隆二十年 (1755) 又取梅文鼎所著三角法舉要,塹堵測量,環中黍尺三書,易以新名,飾以古義,作句股割圜記三篇,凡三卷,稱角為觚,稱正弦為次內矩分,餘弦為內矩分,正切為次矩分,餘切為矩分,正割為次引數,餘割為徑引數,相似形為同限.而務為簡奧,雖以焦循(字理堂,江都人,1763-1820)之好古,而釋弧卷上亦謂戴氏變易舊名,恆不易了.故戴氏此種反動,在學術界影響至微.

5. 三角形邊角和較相求法之應用

古未有邊角和較相求之例,自三角術輸入,中算家乃知角度之應用.而說述此義最精者,當數羅士琳(字次璆號茗香,甘泉人,?-1853),項名達(一名萬準,字

步來,號梅侶,仁和人,1789-1850).

羅士琳著三角和較算例一卷(1840),其自序稱:陳杰(字靜葊烏程人)因道光七年(1827)考取之算學生張某,曾設有一角及大小腰各與底邊和一題,未知何自而來,特無常法可馭,乃損書下詢.士琳因爲成此書,并以天元一術演算得九十六問.計第一例,已知$\angle A$;及$a+b, c+d$; $a-b, c+d$; $a+b, c-d$; $a-b, c-d$; $a+d, c+d$; $a+c, c+d$; $a+c, a+d$; $a-d, c-d$; 求a, b, c, d八題.第



二例,已知$\angle A$,及$a+d, b+c$; $a-d, b+c$; $a+d, b-c$; $a-d, b-c$; $a+b, a+c$; $a+b, b+c$; $a+c, b+c$; $a-b, a-c$; 求a, b, c, d八題.第三例,已知$\angle A$及$b+d, c+d$; $b+d, b+c$; $c+d, b+c$; $b-d, c-d$; $b+d, a+c$; $b+d, a-c$; $b-d, a+c$; $b-d, a-c$; 求a, b, c, d八題.羅氏原書,有術無草.王鑒有三角和較算例演草一卷,亦未刻印行世.茲錄第一例第一題算例

於下,以備考核.

「第一例正餘弦相加減爲衍母.〔加爲幷,減爲差,餘弦大反減正弦,則衍母卽爲負差.〕[2]

第一例第一題.〔銳角衍母用幷,鈍角衍母用差.〕有一角,而角在兩邊之中,有大腰與底邊和,有小腰與垂線和,求三邊及垂線.〔士琳案:凡言大小腰者,卽角旁之兩邊,亦名大邊小邊,其底邊卽對角之邊,亦名對邊.〕

第一術　求對邊　術曰:衍母乘大和於上,半徑乘小和於下,上下相減〔衍母爲負,差則相加〕,爲初數〔下位大,反減上位,則爲負初數〕,正弦乘大和爲次數,初次兩數,各自乘,相併爲正實.衍母乘初數於上,正弦乘次數於下,上下相併〔負初數則相減〕,倍之爲負從.餘弦與衍母相加減〔銳角加,鈍角減,如衍母爲負差則相加〕,又以正弦乘之爲正隅.〔衍母爲負差,或餘弦大,反減衍母,則爲負隅.〕平方開之,得對邊」

*　　*　　*　　*

陳杰稱:「項名達專意於平弧三角,」項氏所著平

(2) 本篇凡引用原文用「…」號,原文中小註用〔…〕號,補註用(…)號.

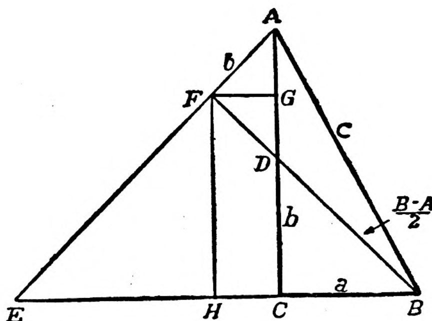
三角和較術(道光癸卯, 1743 自序), 分平面三角形爲句股形, 平三角兩部. 其句股形第十七題謂:

「有句股較$(b-a)$, 有弦和較$(a+b-c)$, 求兩角(A, B).

法以句股較爲一率, 弦和較倍之爲二率, 半直角正弦爲三率, 求得四率爲較. 又以句股較爲一率, 弦和較倍之爲二率, 半徑爲三率, 求得四率, 自乘, 轉加半徑自乘之倍, 開方得數, 與較相加, 爲半較角餘割, 旣得半較角, 迺與半直角相加減, 得兩角.」

如圖 ABC 句股形, 作 $CE=AC$,

作 $BF\perp AE$, 及 FG, FH 兩平行線.



則
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{90^\circ}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\cos\frac{B-A}{2}-\sin\frac{90^\circ}{2}}{\sin\frac{90^\circ}{2}}\cdots\cdots(b)$$

因 $$\sin\frac{B-A}{2}=\frac{t}{c},\ \sin\frac{90^\circ}{2}=\frac{b-a}{2t},$$

得 $$c=\frac{b-a}{2\sin\frac{90^\circ}{2}\sin\frac{B-A}{2}},$$

代入 (b) 得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{\sin\frac{90^\circ}{2}}{\cot\frac{B-A}{2}-\csc\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}}(=S_1)\cdots\cdots(c)$$

此卽第一段所謂:「以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半直角正弦爲三率,求得四率爲較(S_1)」也.

由 (c) 得

$$\frac{b-a}{2(a+b-c)}=\frac{1(=r)}{\cot\frac{B-A}{2}\csc^2\frac{90^\circ}{2}-\csc\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2}}(=T_1)$$

此第二段所謂:「以句股較爲一率,弦和較倍之爲二率,半徑$(r=1)$爲三率,求得四率(T_1)」也.

$$\csc\frac{B-A}{2}=\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1.$$

然$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}$何故可以開方得數,及$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1$何以必等於$\csc\frac{B-A}{2}$?則

(a)因 $$2^2(a+b-c)^2=8(c-a)(c-b)=T^2=2xy$$

$$2\{(c-a)-(c-b)\}^2=2(c-a)^2+2(c-b)^2-4(c-a)(c-b)$$
$$=\underline{2(1)^2}=2\underline{(x-y)^2}$$

兩式相加,故$\sqrt{T^2+2(1)^2}$可以開方得數,

$$T^2+2(1)^2=2(x+y)^2$$

(b) $\sqrt{T_1^2+2(1)^2}$

$$=\sqrt{4\cot^2\frac{B-A}{2}+2\csc^2\frac{B-A}{2}-4\sqrt{2}\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{B-A}{2}+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\cdot$$

$$\times\sqrt{2\cos^2\frac{B-A}{2}+1-2\sqrt{2}.\cos\frac{B-A}{2}+1-\cos^2\frac{B-A}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\times\sqrt{\left\{\sqrt{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right\}^2}$$

故 $$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}=2\csc\frac{B-A}{2}-\cot\frac{B-A}{2}\csc\frac{90^\circ}{2},$$

即 $$\sqrt{T_1^2+2(1)^2}+S_1=\csc\frac{B-A}{2}.$$

故第三段謂:「四率(T_1)自乘,轉加半徑($r=1$)自乘之倍,開方得數,與較(S_1)相加,爲半較角餘割」也.

其平三角第五題謂:

「有一角(A),有對邊(a),與餘兩邊 b,c 之兩較($b-a$, $c-a$),求兩角(B, C).

法以兩較邊相加爲一率,相減爲二率,半角餘切爲三率,求得四率,爲借角正切.

$$\left(\frac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D}\right),$$

又以半徑爲一率,半角正弦倍之爲二率,借角正弦爲三率,求得四率,爲加減度正弦.

$$\left(\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B'-C'}{2}}{\sin\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}}\right)$$

減借角得半數角.

$$\left(\frac{B'-C'}{2}-\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=\frac{B-C}{2}\right).$$

迺以半較角,與半角餘度相加減,得兩角.

$$\left(B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\ C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}\right).」$$

如圖原$\triangle ABC$之三邊a, b, c,所設$\triangle AID$有$\angle A$, $b-a$, $c-a$, 由D作等腰$\triangle ADF$作BC之平行線DM,

則 $\angle MDF=\dfrac{B-C}{2}$;

因令 $\angle AID=\angle B', \angle ADI=\angle C'$,

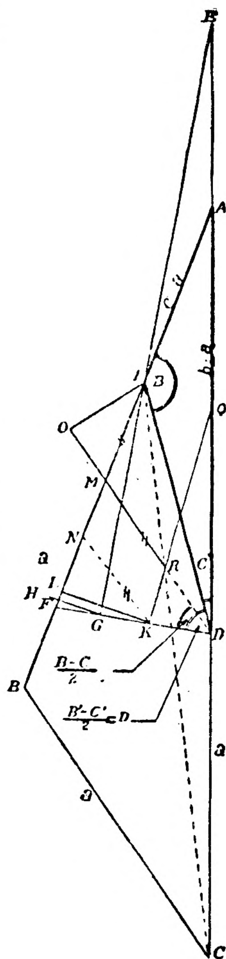
而 $\angle B+\angle C=\angle B'+\angle C'$,

則 $\angle IDF=\dfrac{B'-C'}{2}$;

又自I作AD之平行IK,作DF之直垂IG.自G,自K作IB之直垂GH, KL.自K作BC之平行KN,又作AB之平行KQ與DM相遇於R.自I作DM延長線之直垂IO.

因 $IM=MR=NK$.

故 $\triangle IOM=\triangle KLN, IO=KL$.



如圖 $\dfrac{(b-a)+(c-a)}{(b-a)-(c-a)}$

$$=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan\dfrac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\dfrac{A}{2}}{\tan D},$$

又 $$IF=(b-a)-(c-a)=(b-c)$$

則 $$IO=KL=2\,(b-c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

又 $$\angle IDO=\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\},$$

故 $$\sin\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=\frac{2(b-c)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{ID},$$

因 $$\frac{IG}{b-c}=\cos\frac{A}{2};IG=(b-c)\cos\frac{A}{2};$$

又 $$\frac{IG}{ID}=\sin\frac{B'-C'}{2},$$

$$ID=(b-c)\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{B'-C'}{2}},$$

故 $$\sin\left\{\frac{B'-C'}{2}-\frac{B-C}{2}\right\}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B'-C'}{2}.$$

其第六題,謂:

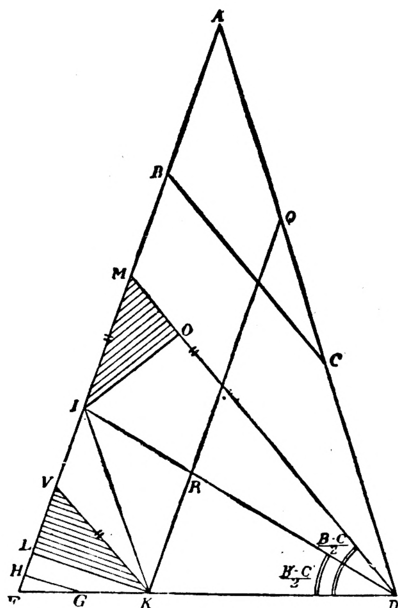
「有一角(A),有對邊(a),與餘兩邊(b, c)之兩和($b+a$, $c+a$),求兩角(B, C)」

如圖并上例得B, C.

$$\frac{(b+a)+(c+a)}{(b+a)-(c+a)}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B'-C'}{2}}=\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan D},$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B'-C'}{2}}{\sin\left\{\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right\}},$$

$$\frac{B'-C'}{2}+\left\{\frac{B-C}{2}-\frac{B'-C'}{2}\right\}=\frac{B-C}{2}.$$



戴煦(字鄂士,錢塘人, 1805–1860) 作求表捷術三種,前有咸豐壬子 (1852) 自序.其外切密率卷三,卷四,以幾何法證:

本距弧 $(45^\circ-\alpha)$ 切線, $\tan(45^\circ-\alpha)=\dfrac{r-\tan\alpha}{r+\tan\alpha}\div r,$

餘距弧 $(\alpha-45^\circ)$ 切線, $\tan(\alpha-45^\circ)=\dfrac{\tan\alpha-r}{\tan\alpha+r}\div r,$

半弧切線三率, $\dfrac{(\tan\frac{1}{2}\alpha)^2}{r}=\dfrac{\sec\alpha-r}{\sec\alpha+r}\div r,$

本弧切線三率, $\dfrac{\tan^2\alpha}{r}=\{(\sec\alpha+r)(\sec\alpha-r)\}\div r.$

及 $\dfrac{2r^2-\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha}=\dfrac{r}{\sec^2\alpha}.$

其假數測圓(1852)又以幾何法證:

$$\frac{\sec(90^\circ-\alpha)}{2}:\sec(2\alpha-90^\circ)=r:\sec\alpha$$

$$\sec(90^\circ-\alpha):r=\sin 2\alpha:2\sin\alpha.$$

此外陳杰算法大成上編(道光二十四年,1844金望欣序)卷五,卷六論「平三角」,吳嘉善(字子登,江西南豐人)著平三角術(1863),梅啓照(字小巖,南昌人)著學彊恕齋筆算十卷,(前有同治九年,1870自序)其卷五,六,七論平三角,則多平淺之論,用便初學而已.

6. 平面三角術第二次輸入中國

同治十二年(1873)華蘅芳(字若汀,金匱人,1830-1902)與英,傅蘭雅(*Dr. John Fryer*, 1839-……共譯英,華里

司(原名不詳)代數術二十五卷;光緒三年(1877)又共譯英,海麻士(*Hymers*?)三角數理十二卷,是爲平面三角術第二次輸入中國.

代數術卷二十四,卷二十五,第二一五款至二八一款論八線數理.其第二一五款言平弧三角術之歷史,謂:

「八線之理,古時已有人知之,其理之根源,乃從平圓中所容之正方形,其兩對角線所成之矩形,等於其兩邊所成之矩形之倍.此理始見於特里密(*Ptolemy*)之書,而爲希臘國人解三角各理之本.近時有里的里斯(*Georg Joachim of Feldkirch in Tyrol, generally called Rhæticus*)者,著一種論三角形之書;阿特「人名」,(*Valentine Otho*)在1596年續成而印行之.又畢的斯克斯(*Pitiscus,*),1599年所印之書,亦有此論,則八線之由來,蓋已久矣.

嘗考滿得剌(*Montucla*)所著算學傳(*Histoire des Mathematiques, 1ère ed*, 1758)中,言1700年以前,尙未有考求弦切等線之式,惟因弦切各線,爲算學家必用之數,爰有俄羅斯京中博學會內之人,名美耶(?)者,其所印之書,初論此理.然觀美耶之說,知其未曾讀過畢的

斯克斯之書,因畢的斯克斯所著之書,其第二卷,第八,與第九題,已有求兩弧正餘弦和較之法,此乃1612年所印之本也.

迨1723年,有卜里奴(*John Bernoulli*,1667-1748)者,著書論弧切線之和,其式俱以本弧之切線明之.以上二書,皆先於美耶之書,而美耶之書,乃於1727年間始印行;惟其書初以代數之法解三角,則爲前所未有.

又有尤拉(*Euler*)者,於1754-1755年中,著書論八線之理,比前人更明;而弧三角之法,亦爲尤拉於1779年所成之書,初以代數馭之.

1783年,有第國華(?)者,亦著書論弧三角之理;又有法蘭西人拉果蘭諸(*Lagrange*,1736-1813)亦論之,至此時三角之法,蓋已精矣.」

同書於證普通三角公式外并於第二五〇款以後,以歸納法證:

$$\cos nA=2^{n-1}\cos^n A-\frac{n}{1}\cdot 2^{n-3}\cos^{n-2}A+\frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4}A-\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\frac{\sin nA}{\sin A}=2^{n-1}\cos^{n-1}A-\frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos^{n-3}A$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-5}A-\cdots,\cdots\cdots(2)$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cos nA=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\cos^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 為奇數,⋯⋯(3)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n}\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\cos^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4 A$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\cos^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 為偶數,⋯⋯(4)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\cos^2 A$$

$$+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4 A-\cdots\cdots,$$

而 n 為奇數,⋯⋯(5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}\frac{\sin nA}{\sin A}=\frac{n}{1}\cos A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\cos^3 A$$

$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 為偶數,⋯⋯(6)

$$\frac{\cos nA}{\cos A}=1-\frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 A+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 A$$
$$-\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 爲奇數,……(7)

$$\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2 A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4 A$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6 A+\cdots\cdots,$$

而 n 爲偶數,……(8)

$$\sin nA=\frac{n}{1}\sin A-\frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 A$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 爲奇數,……(9)

$$\frac{\sin nA}{\cos A}=\frac{n}{1}\sin A-\frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 A$$
$$+\frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 A-\cdots\cdots,$$

而 n 爲偶數,……(10)

前之(1),(2),(8),(9)四式爲費依達(*Vieta*)所定.1701年卜奴里設爲弧背之通弦式,與(2)式相同,當時無人證之.1702年卜奴里又設二式與(8),(9)相同,惟(9)式奈端(*Newton*)已早有其法,尤拉(*Euler*)曾輯(1),(2),(9),(10)四式.拉果蘭諸之書中,曾自稱用其自己之算法,

證各式爲不誤.1722年卜奴里有式;如:

$$\tan nA=\frac{\phi_1 t-\phi_3 t^3+\phi_5 t^5-\cdots\cdots}{1-\phi_2 t^2+\phi_4 t^4-\cdots\cdots},$$

而 $t=\tan A,\ \phi_1=\frac{n}{1},\ \phi_2=\frac{n(n-1)}{2!},$

$$\phi_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$\phi_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\phi_5=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cdots\cdots\cdots(11)$$

同書,舉: $2^{n-1}\cos^n A=\cos nA+\frac{n}{1}\cos(n-2)A$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A-\cdots\cdots\cdots(12)$$

惟其級數,必作一負號之弧爲止.如 n 爲偶數,則必取末項倍數之半,其末項者,弧等於 A 之項也.

若 n 爲奇數,則

$$\pm 2^{n-1}\sin^n A=\sin nA-\frac{n}{1}\sin(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\sin(n-4)A$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin(n-6)A+\cdots\cdots\cdots(13)$$

此式若$n=4m+1$,則用正號;若$n=4m+3$,則用負號.不然,則級數之末項,必爲$\sin A$之倍數.

若 n 爲偶數,則

$$\mp 2^{n-1}\sin^n A=\cos nA-\frac{n}{1}\cdot\cos(n-2)A$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos(n-4)A$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos(n-6)A+\cdots\cdots\quad(14)$$

此式若$n=4m+2$,則用負號;若$n=4m$,則用正號.惟其級數必作至得一項能有$\cos(oA)$卽等於 1 之項,則其倍數,必以 2 約之.

代數術卷二十五,第二六一款,稱:

「前於開方各式中,曾論及有用虛式之根號$\sqrt{-1}$者,此式在考八線數理中,實有大用處.….令$i\ (=\sqrt{-1})$爲一個泛數,[現在未定,將來可定之數也],….」.

證得:

$$\cos nA\pm i\sin nA=(\cos A\pm i\sin A)^n,\ i=\sqrt{-1}.$$

同書第二六二款,稱:

「前款之式,爲算學士棣美弗(*De Moivre*)於1730年間,考平圓及雙曲線之算式時所得,惟代數幾何之書中,

謂是尤拉(*Euler*)所設之法」,

由上式之和與較變之,則可得:

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i},$$

「此兩式,雖未能徑爲算學中之用,然依代數幾何之法求之,即可得幾何中最奧妙之理,其理極深」.

同書第二六八,第二六九款,略稱:

$$\cos A=1-\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}-\cdots\cdots,$$

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\cdots\cdots,$$

此式爲奈端(*Newton*)初查得弧與弦相求之法,亦甚巧妙.

又因: e 爲訥白爾(*Napier*)對根.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$$

以 $x=iA,$

$x=-iA,$

分別代入簡之,得:

$$\cos A = \frac{e^{iA} + e^{-iA}}{2},$$

$$\sin A = \frac{e^{iA} - e^{-iA}}{2i}.$$

「此兩式,當時拉果闌諸(*Lagrange*, 1736–1813)以爲最巧之法.惟觀其求此兩式之時,所用之正弦,餘弦之級數,卽爲1700間奈端(*Newton*)所設之級數,如奈端當時多用一番心,則奈端已可知之,不必待五十年後尤拉(*Euler*)考出矣」.

同書第二七〇,第二七一,第二七三各款,又介紹古累固里(*Gregory*)所設之式,卽:

$$A = \tan A - \frac{1}{3}\tan^3 A + \frac{1}{5}\tan^5 A - \frac{1}{7}\tan^7 A + \cdots\cdots,$$

古累固里考得此式,以與英國算學士高廉士(*Collins*, 1625–1683) [此 1671 年之事], 又於 1675 年與來本之(*Leibnitz* 1646–1716)言之.

同書算出:

$$\tan^{-1}1 = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(Euler)}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}, \text{ (Hutton, Clausen)}$$

$$= 2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + 2\tan^{-1}\frac{1}{8}$$

$$=3\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{1}{8}+3\tan^{-1}\frac{1}{9}+2\tan^{-1}\frac{1}{18}$$

$$+3\tan^{-1}\frac{1}{32}$$

以求平圓之周.又別設一解法,與二項式及虛數式無關,以求:

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}A+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{4}A+\frac{1}{8}\tan\frac{1}{8}A+\cdots,$$

「此式最簡妙,為1812年華里斯(?)之書所載,其書初出時,咸以為新法.因此時英國之人,尙未知尤拉已有此法也」.

同書第二七四,第二七五,第二七六各款,說明方程式

$$x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1=0,$$

可以因數分解之,稱此為第摩愛之法,第摩愛似為棣美弗(*De Moivre*)之同名異譯.

幷稱奈端之友荷地斯(*Cotes*, 1682–1716)對於上題引伸之法,乃平圓中最奇之法云.

同書第二八〇款示三角法與聯立方程式之關係,幷解:

$$wxyz=a,$$

$$wz+xy=b,$$

$$wy+xz=c,$$

$$wx+yz=d,$$

得

$$w=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\tan\phi_2\tan\phi_3},$$

$$x=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\cot\phi_2\tan\phi_3},$$

$$y=\sqrt[4]{a}\sqrt{\cot\phi_1\tan\phi_2\cot\phi_3},$$

$$z=\sqrt[4]{a}\sqrt{\tan\phi_1\cot\phi_2\cot\phi_3},$$

而

$$\sin 2\phi_1=\frac{b}{2\sqrt{a}},$$

$$\sin 2\phi_2=\frac{c}{2\sqrt{a}},$$

$$\sin 2\phi_3=\frac{d}{2\sqrt{a}}.$$

最後又論平圓中內容十七等邊形之法.其法本爲哥斯(*Gauss*, 1777–1855, 著 *Disquisitiones arithmeticae*, 1801)所設,代數術乃從勒禪德(*Legendre*)書中錄出云.

代數術前引:

$$\cos nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n+(\cos A-i\sin A)^n}{2},$$

$$\sin nA=\frac{(\cos A+i\sin A)^n-(\cos A-i\sin A)^n}{2i},$$

二式,今按二項式展開,簡之又令m代n,得:

$$\cos mA=\cos^m A\left\{1-\frac{m(m-1)}{2!}\tan^2 A+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\tan^4 A-\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(15)$$

$$\sin mA=\cos^m A\left\{m\tan A-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\tan^3 A+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(16)$$

三角數理卷二,第一三四款,於上式.

因$\cos^m A=(1-\sin^2 A)^{\frac{m}{2}}$於$\cos mA$之級數內,將$\cos^m A$并$\cos A$之偶次自乘數,以$\sin^2 A$為主,依二項式展開之,即

$$\cos mA=\cos^m A-\frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}A\sin^2 A+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cos^{m-4}A\sin^4 A-\cdots\cdots(15)$$

$$=1-\frac{m}{2}\sin^2 A+\frac{m(m-2)}{2\cdot4}\sin^4 A-\frac{m(m-2)(m-4)}{2\cdot4\cdot6}\sin^6 A+\cdots\cdots$$

$$-\frac{m(m-1)}{2!}\sin^2 A\Big\{1-\frac{m-2}{2}\sin^2 A$$

$$+\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\Big\}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\sin^4 A$$

$$\times\Big\{1-\frac{m-4}{2}\sin^2 A$$

$$+\frac{(m-4)(m-6)}{2\cdot 4}\sin^4 A-\cdots\cdots\Big\}$$

即 $$\cos mA=1-\frac{m}{1}\left(\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}\right)\sin^2 A$$

$$+\frac{m(m-2)}{1\cdot 3}\Big\{\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot 4}\Big\}\sin^4 A+\cdots\cdots$$

因 $$\frac{1}{2}+\frac{m-1}{2}=\frac{m}{2},\quad \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{m-1}{2}$$

$$+\frac{(m-1)(m-3)}{2\cdot 4}=\frac{m(m+2)}{2\cdot 4},$$

又因 $$(1+x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{n}{2}}=(1+x)^{\frac{m+n}{2}},$$

則
$$\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+2)}{2\cdot4\cdots2r}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+4)}{2\cdot4\cdots(2r-2)}$$
$$\times\frac{n}{2}+\frac{m(m-2)\cdots(m-2r+6)}{2\cdot4\cdots(2r-4)}\times\frac{n(n-2)}{2\cdot4}+\cdots$$
$$=\frac{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+n-2r+2)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}$$

故
$$\cos nA=1-\frac{n^2}{2!}\sin^2A+\frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4A$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6A+\cdots.$$

而n爲偶數,……(8)

同理,可證明得代數術(7),(9),(10)各式,如以$\frac{\pi}{2}-A$代(7),(8),(9),(10)各式之(A),則可證得代數術(3),(4),(5),(6),各式,因亦自成一系統.

其在中國,則董祐誠(字方立,陽湖人,1791-1823)割圜連比例圖解三卷(1819),及項名達(1789-1850)遺著象數一原七卷,并論倍角之通弦及正矢,(8)而倍角之通弦式與上述(9)式完全相同,并在代數學,三角數理

(3) 說詳:李儼,明清算家之割圓術研究,科學雜誌第十二卷第十一期,第1487—1520頁,十六年(1927)十一月,第十二卷第十二期,第1721—1766頁,十六年(1927)十二月,第十三卷第一期,第53—102頁,十七年(1928)一月,第十三卷第二期,第200—250頁,十七年(1928)二月.

輸入之前,爲可貴也.

後此關於三角術著述之可記者,則有左潛(?—1874)曾紀鴻,(1848-1877),黃宗憲共撰之圓率考眞圖解一卷,(1874)曾以幾何法證 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.李善蘭所撰弧矢啓祕有汪遠焜圖解者,則以幾何法證三角術之各公式.

龔銘鳳算學答問一卷(1897)以幾何法證:

$$\text{vers}(\alpha+\beta)=1-\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2}{d}.^{(4)}$$

至解析羅士琳三角和較算例者,有:王鑒,三角和較算例演草一卷,陳志堅(字思九,新陽人)三角新理三卷.解析項名達三角和較術者,有:崔朝慶(字聘臣,南通人)釋句股形邊角相求法,(1891),胡炳文句股邊角圖說一册(1898),吳和翔,句股邊角相求圖解舉隅一卷(1898),周達,三角和較術解四卷(1899),張毓瑗,平三角和較術圖解二卷(1902),石振埏,句股形邊角相求圖解一卷(1906).就中陳志堅,三角新理乃以三角形一角及三邊和較求三角形邊角,與羅士琳之以三角

(4) 如令 $r=1$, $d=2$, 可得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

形一角及三邊幷中垂線求三邊及中垂線者,略異其例.

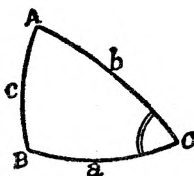
(三) 球面三角術之東來

7. 球面三角術輸入中國

球面三角術與平面三角術,同以崇禎辛未(1631)輸入中國.徐光啓與耶穌會士共修曆書,崇禎辛未進測量全義十卷,其第七卷論測曲線三角形,有圜內九線相當法,圜球借論,分球上三角形之各類,球上斜三角形九種,球上三角形相易之法,球上直角形各邊角正弦等線之比例,球上直角相求約法,球上斜角形各邊角正弦等線之比例,(球上)斜角形相求約法,各法.

其「圜球(原本)借論,」謂古德阿多西阿撰,疑卽指 *Menelaus of Alexandria* 之 *Sphœrica*.

其「球上相求約法,」謂:求上直角三邊形,有三角三邊,此六者有三,可推其餘,交互爲三十求,各以乘法得之.



$$\text{第一：}\quad \text{有 } A,B \begin{cases} (1)\text{求 } a & 1:\sin B=\sec A:\sec a, \\ (2)\text{求 } b & 1:\sin A=\sec B:\sec b, \\ (3)\text{求 } c & 1:\tan B=\tan A:\sec c; \end{cases}$$

$$\text{第二：}\quad \text{有 } B,a \begin{cases} (4)\text{求 } A & 1:\csc B=\sec a:\sec A, \\ (5)\text{求 } b & 1:\sin a=\tan B:\tan b, \\ (6)\text{求 } c & 1:\sec B=\tan a:\tan c; \end{cases}$$

$$\text{第三：}\quad \text{有 } B,b \begin{cases} (7)\text{求 } A & 1:\sec b=\cos B:\sin A, \\ (8)\text{求 } a & 1:\tan b=\cot B:\sin a, \\ (9)\text{求 } c & 1:\sec B=\sin b:\sin c; \end{cases}$$

$$\text{第四：}\quad \text{有 } B,c \begin{cases} (10)\text{求 } A & 1:\sec c=\cot B:\tan A, \\ (11)\text{求 } a & 1:\cos B=\tan c:\tan a, \\ (12)\text{求 } b & 1:\sin c=\sin B:\sin b; \end{cases}$$

$$\text{第五：}\quad \text{有 } A,a \begin{cases} (13)\text{求 } B & 1:\sec a=\cos A:\sin B, \\ (14)\text{求 } b & 1:\tan b=\cot A:\sin b, \\ (15)\text{求 } c & 1:\csc A=\sin a:\sin c; \end{cases}$$

$$\text{第六：}\quad \text{有 } A,b \begin{cases} (16)\text{求 } B & 1:\csc A=\sec b:\sec B, \\ (17)\text{求 } a & 1:\sin b=\tan A:\tan a, \\ (18)\text{求 } c & 1:\sec A=\tan b:\tan c; \end{cases}$$

$$\text{第七：}\quad\text{有 } A,\ c\left\{\begin{array}{lll}(19)\text{求 } B & 1:\sec c & =\cot A:\tan B,\\ (20)\text{求 } a & 1:\sin c & =\sin A:\sin a,\\ (21)\text{求 } b & 1:\cos A & =\tan c:\tan b;\end{array}\right.$$

$$\text{第八：}\quad\text{有 } a,\ b\left\{\begin{array}{lll}(22)\text{求 } B & 1:\csc a & =\tan b:\tan B,\\ (23)\text{求 } A & 1:\csc b & =\tan a:\tan A,\\ (24)\text{求 } c & 1:\sec a & =\sec b:\sec c;\end{array}\right.$$

$$\text{第九：}\quad\text{有 } a,\ c\left\{\begin{array}{lll}(25)\text{求 } B & 1:\tan c & =\cot a:\cos B,\\ (26)\text{求 } A & 1:\csc c & =\sin a:\sin A,\\ (27)\text{求 } b & 1:\cos a & =\sec c:\sec b;\end{array}\right.$$

$$\text{第十：}\quad\text{有 } b,\ c\left\{\begin{array}{lll}(28)\text{求 } B & 1:\csc c & =\sin b:\sin B,\\ (29)\text{求 } A & 1:\tan c & =\cot b:\cos A,\\ (30)\text{求 } a & 1:\cos b & =\sec c:\sec a.\end{array}\right.$$

其「球上斜角形各邊角正弦等線之比例」,及「(球上)斜角形相求約法」,則有下列各式:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c};$$

$$1^2:\sin b\sin c=\operatorname{vers}A:(\operatorname{vers}a-\operatorname{vers}\overline{c-b}),$$

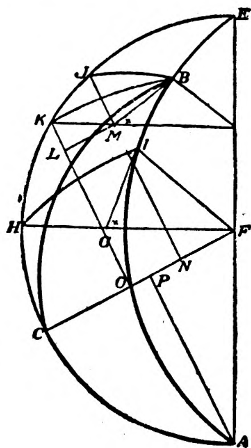
或
$$\cos A=\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a,$$

或
$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

或 $$\operatorname{vers} A=\frac{\operatorname{vers} a-\operatorname{vers} \overline{c-b}}{\sin b \sin c},$$

或 $$\operatorname{vers} A=\frac{\operatorname{vers}\ a-\operatorname{vers}\ \overline{c-b}}{\frac{1}{2}\left\{\cos \overline{c-b} \pm \cos \overline{c+b}\right\}}.$$

其最後一式之分母,在測量全義第八卷「測球上大圜」,第九卷「測星」,并稱爲「先得數」,而其分子稱爲「後得數」.同書稱如 $c+b<\frac{\pi}{2}$,用+號; $c+b>\frac{\pi}{2}$,用一號.而此正負號,頗引起後來中算家之爭辯.至其原式之證法,則如圖



ABC 斜三角形,以AB, AC 足成象限,遇於 E, 各取其中點於 I 於 H,令 ABE 在斜面, ACE 在平面.又作 AK 弧 $=AB$ 弧,CJ 弧 $=BC$ 弧,作 KB 小圜.

則 $R=HF=IF=AF=EF=CF$, $AP=\sin b$,$CP=\operatorname{vers} b$, $KD=\sin c$, $IG=\sin A$, $HG=\operatorname{vers} A$, $KO=\sin(c-b)$, $CO=\operatorname{vers}\ \overline{c-b}$, $JN=\sin a$, $CN=\operatorname{vers} a$, $NO=CN-CO$, $LM=NO$.

因　$\triangle_s BMD, IGF$ 爲相似,

則　$R : GF = BD : MD$,

或　$R : KD = HG : KM$ ....(1),

又因　$\triangle_s APF, KLM$ 爲相似,

則　$AF : AP = KM : LM$,

或　$R : AP = KM : LM$ ....(2),

(1)×(2)得　$1^2 : \sin b \cdot \sin c = \text{vers } A : \text{vers } a - \text{vers } \overline{c-b}$.

證訖.

入清則薛鳳祚從穆尼閣受對數及三角術,而稱球面三角術爲「圜線三角法」,其三角算法於正弧三角,將測量全義中第五,第六,第七,第十各併入第三,第二,第四,第九得十八法,幷以對數入算.又列舉納氏比例式,半角之公式,及半弧之公式.

納氏比例式: (Napier's analogies)

$$\begin{cases} \tan\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\dfrac{C}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \cot\dfrac{C}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\dfrac{c}{2}, \\ \tan\frac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \tan\dfrac{c}{2}, \end{cases}$$

半角之公式: $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$,........

半弧之公式: $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-E)\sin(C-E)}{\sin B\sin C}}$,........

而 $$2E=A+B+C-180°.$$

其最後一式之證法,則以原三角形 ABC,其極三角形 $A'B'C'$.

則 $$\sin\frac{A'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b')\sin(s-c')}{\sin b'\sin c'}}$$

或 $$\sin\left(\frac{180°-a}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a'-b'+c'}{2}\right)\sin\left(\frac{a'+b'-c'}{2}\right)}{\sin b'\sin c'}},$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180°-A+B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{180°-A-B+C}{2}\right)}{\sin(180°-B)\sin(180°-C)}}.$$

證訖.

原書作圖草率,又無幾何證法,故以梅文鼎之善解西法,倘不能了解,而歎爲「殘碑斷碣,弧三角遂成祕密藏」.(5)

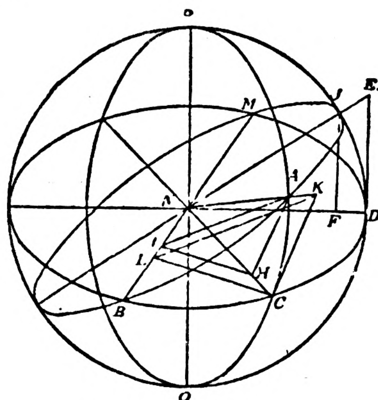
8. 中算家之球面三角術研究上

球面三角術輸入中國後,中算家之研究,以梅文

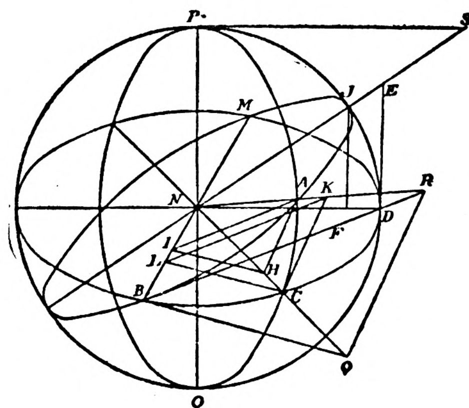
(5) 語見梅文鼎勿菴曆算書目.

鼎爲最熱心.梅於康熙甲子(1684)曾作「弧三角所成句股書」,一册,以證(崇禎)曆書正弧三角形相求之法.

蓋於曆書原圖加ES, PS二線,用以直接證



(1) 曆書原圖



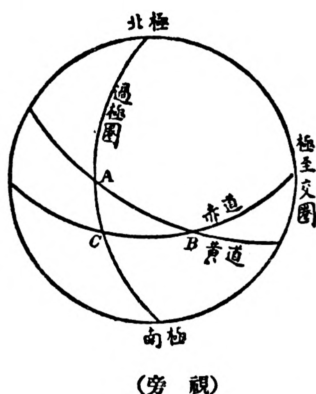
(2) 梅氏補圖

$$\left.\begin{array}{l}\sin b=\sin B\sin c\\ \sin a=\sin A\sin c\end{array}\right\}\text{ 及 }\left.\begin{array}{l}\tan a=\tan A\sin b\\ \tan b=\tan B\sin a\end{array}\right\}$$

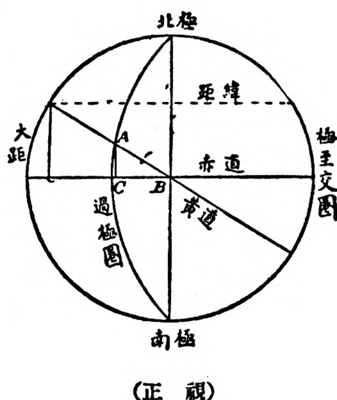
又另作 ΔBQR 以證

$$\left.\begin{array}{l}\tan a=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b=\cos A\cdot\tan c\end{array}\right\}$$

說詳弧三角舉要 (1684), 由此基本三公式,可以化得相求三十法.梅氏又因郭守敬平視側視諸圖,即爲球面三角形而設,因作正視,旁視二圖:



(旁 視)



(正 視)

故梅文鼎環中黍尺(1700)卷一,證:

$$1^2:\sin b\cdot\sin c=\text{vers }A:\text{vers }a-\text{vers }\overline{c-b}$$

作圖與曆書略異.例如曆書 *HGFI*, *KMDB* 弧面形,皆作平視成爲 *HIF*, *KBD* 線.

故 $HI=\text{vers}\,A,\quad IF=\cos A,$

$KD=\sin c.$

卽 $1:KD=\text{vers}\,A:KB\cdots\cdots(1)$

又 $KO=\sin(c-b),$

$BN=\sin a;$

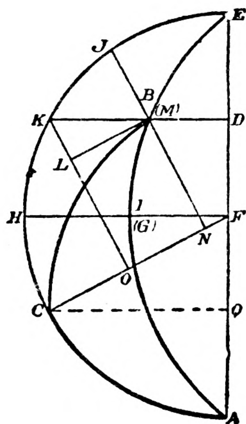
$CO=\text{vers}(c-b),$

$CN=\text{vers}\,a.$

則 $ON=CN-CO$

$=\text{vers}\,a-\text{vers}(c-b).$

又 $CQ=\sin b, BL=ON.$



(B)

作 CQ 直垂於 AB, 則 $\Delta_s BLK, CFQ$ 爲相似,

故 $CF:CQ=KB:BL,$

卽 $1:\sin b=KB:BL\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)\times(2)$ 得 $1^2:\sin b\cdot\sin c=\text{vers}\,A:\text{vers}\,a=\text{vers}\,\overline{c-b}.$

證訖.

其後又設數圖,以證 a, b, c 邊及 A 角或大或小,所生加減符號之差.

又因 $\sin b\cdot\sin c=\dfrac{\cos\overline{c-b}\pm\cos\overline{c+b}}{2},$

環中黍尺卷五乃專論其加減之變.

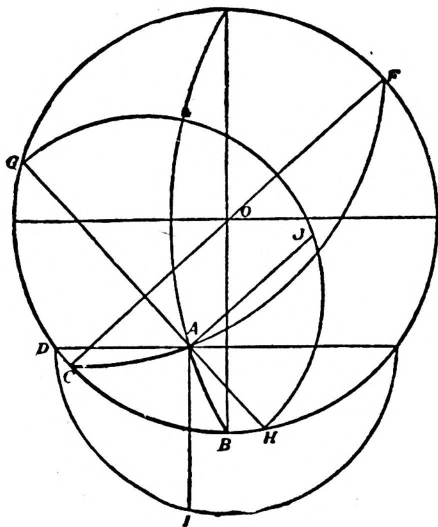
環中黍尺卷二,論以量法代算弧三角,此卽曆書

簡平儀之說.

(1)　$a=50°$, $b=55°$, $c=60°$, 求 B, C.

法先於 0 作圓,於圓界上量 $a=50°=BC$, $b=55°=BD$. 作 DE 爲 BO 之垂線,爲球上小圓之平視,是稱「等距圈」.

又自 C 通過 O, 作 CF 徑線.於大圓界上量 $C=60°=CG=CH$. 聯 GH 交 DE 於 A, 則 A 爲 b, c 之交點.



次求 B 角度: 自 A 作直垂,與自 DE 爲全徑所作之平圓交於 I, 則 DI 即 B 角度,量得 78°,算得 77°55′、

次求 C 角度：自 A 作直垂，與自 GH 爲全徑所作之平圓交於 J，則 HJ 卽 A 角度，量得 $67\frac{2}{3}^\circ$，算得 $67^\circ 39'$.

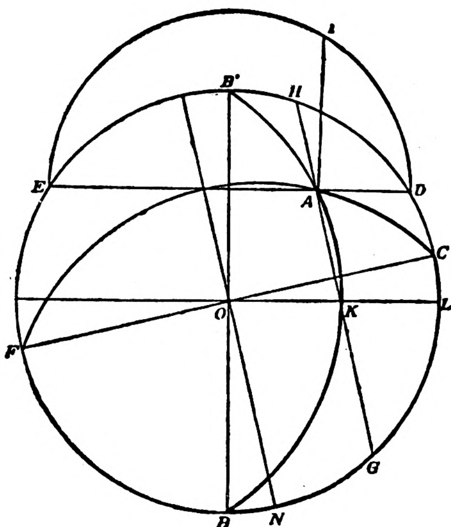
(2)　$a=100^\circ$, $c=120^\circ$, $\angle C=60^\circ$, 求 b.

法先於 O 作圓，於圓界上量 $a=100^\circ=BC$, $C=120^\circ=BD$. 作 DE 爲 BOB' 之垂線，爲「等距圈」.

又自 C 通過 O，作 CF 徑線.

次以 DE 爲全徑，作圓.於圓界上量 $\angle C=60^\circ=DI$.

自 I 作直垂 IA 交 DE 於 A，則 A 爲 b,c 之交點.



自 A 作 CO 之直垂 CH，則 CH 爲 b 之度，量得

59°+,算得 59°7′.

(3) 有 $b, c, \angle B$ 求 a,

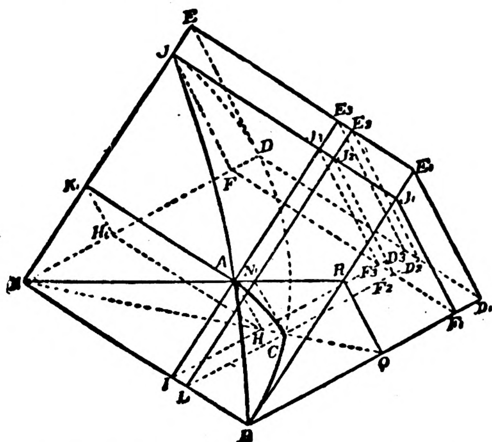
如前量 $c=BD$, 作 DE. 於 DE 作半圓.量 $b=DI$, 作垂線交 DE 於 A.

次以 b 之通弦,即 GH 等距線,就 A 遷就游移,使 GH 切於外周及 A 線,半其弧得 HC 弧,即 b,量得 $a=BC$.

(4) 有 B, C 角及 a 邊.

如前量 $a=BC$, 後又量 $\angle B=KL$, $\angle C=MN$; MC, BB' 弧相交於 A. 其所得之 A 不甚準確.

梅文鼎又撰塹堵測量,其卷一「總論」稱:



「…八線在平圓者,可以圖明;在渾圓者,難以筆

顯鼎嘗深思其故,而見渾圜中諸線,犂然有合於古人塹堵之法.乃以堅楮肖之,爲徑寸之儀,而三弧三角各線所成之句股,了了分明,…因名之曰塹堵測量,從其質也」.

右舉塹堵測量之圖,可與曆書及弧三角舉要總圖對照,便知.其中與句股形 NED 平行之三句股形,并全相等;每句股形內各句股形亦相等.

梅文鼎旣於弧三角舉要證:

$$\left.\begin{aligned}\sin b&=\sin B\cdot\sin c\\ \sin a&=\sin A\cdot\sin c\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\tan A\cdot\sin b\\ \tan b&=\tan B\cdot\sin a\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b&=\cos A\cdot\tan c\end{aligned}\right\}$$

玆復由塹堵測量證之.

如圖(1), $BJ_1 : BF_1 = BR : BQ,$

卽 $1 : \cos B = \tan c : \tan a$

可證
$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\cos B\cdot\tan c\\ \tan b&=\cos A\cdot\tan c\end{aligned}\right\}$$

(1) 第一層句股比例圖

如圖(2) $LD_2 : E_2D_2 = \angle C : KC,$

即 $1 : \tan B = \sin a : \tan b,$

可證

$$\left.\begin{array}{l}\tan a = \tan A \cdot \sin b \\ \tan b = \tan B \cdot \sin a\end{array}\right\}$$

如圖(3) $\angle J_3 : J_3F_3 = \angle A : AH,$

即 $1 : \sin B = \sin c : \sin b$

可證

$$\left.\begin{array}{l}\sin b = \sin B \cdot \sin c \\ \sin a = \sin A \cdot \sin c\end{array}\right\}$$

(2) 第二層句股比例圖

(3) 第三層句股比例圖

塹堵測量卷二,謂:立句股錐形 $N-BRQ$ 內容正弧三角形 ABC,其合形,展形如下圖.而展形之四面各爲句股形.

(1) 合形

(2) 展形

梅文鼎爲先了解三角術者;後此作者如年希堯

(字允恭,廣寧人)三角法摘要一卷(1718),江永(字愼修,婺源人,1682-1762)正弧三角疏義,正弧三角會通,御製曆象考成上編,卷二卷三內,弧三角上下(1723刻),明安圖割圜密率捷法卷二內,弧線三角形邊角相求(1736-1774),戴震句股割圜記三卷(1755),幷宗梅氏之說.就中曆象考成所論深具條理,而句股割圜記於餘弦折半中數內加減符號,亦發折衷之論,然於薛鳳祚所受諸式,尙未論及也.

雍正元年(1723)刻曆象考成,其卷二,卷三論弧三角形,其目如下:

「卷二

弧三角形上

弧三角形總論

弧三角形綱領

弧三角形凡例

正弧三角形論

正弧三角形八線句股比例圖說

正弧三角形用次形圖說

正弧三角形邊角相求法

正弧三角形設例七則

卷三

弧三角形下

斜弧三角形論

斜弧三角形邊角比例法

斜弧三角形作垂弧法

斜弧三角形用總較法,次形法附.

斜弧三角形設例八則.」

凌廷堪校禮堂集內(戴震)東原先生事略狀論 $\sin b\cdot\sin c=\frac{\cos\overline{c-b}\pm\cos\overline{c+b}}{2}$ 稱:「用餘弦折半爲中數,則過象限與不過象限有相加相減之殊,猶未爲甚捷也.(戴震)先生則謂用餘弦者或加或減,易生歧惑,乃立新術,用總較兩弧之矢相較折半爲中數,則一例用減,更簡而捷矣.蓋餘弦者矢之餘也.八線法:弧小則餘弦大,弧大則餘弦小;弧若大過象限九十度,則餘弦反由小而漸大.唯矢不然,弧小則矢小,弧大則矢大;弧若大過象限九十度,則矢更隨之而大.是矢與弧大小相應,不似餘弦之參差,故以易之」.焦循釋弧(1795-1798)亦言:「餘弦之所以加所以減,皆由兩矢端之故,則與其用餘弦而多一加減之繁,何如直用兩矢端之

爲捷.故(戴震)東原氏之例曰;以左右兩距,相併爲和度,相減爲較度,卽總弧存弧和度較度之矢,相減半之,爲矢半較,東原氏之術,視(梅文鼎)勿菴爲約矣」.

9. 中算家之球面三角術研究下

第二期之研究球面三角術者,有梅𤂝成(1681-1763),汪萊(1068-1813),焦循(1763-1820),安清翹(1759-1830),張作楠,董祐誠(1791-1823),項名達(1789-1850),陳杰,李善蘭(1809-1882),顧觀光(1799-1862),陳澧,徐有壬(1800-1860),梅啓照,吳嘉善諸人,可謂盛矣.

梅𤂝成,梅氏叢書輯要(1761)卷六十一,赤水遺珍第四條,「弧三角形三邊求角,用開平方得半角正弦法解」註稱:[友人見示,云西士所授,而不知其用法之故,特爲解之.]

$$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{x},\quad \frac{\sin c}{x}=\frac{1}{y},\ y^{\frac{1}{2}}=\sin\frac{A}{2}.$$

卽
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

此卽天學會通本三角算法求圈線鈍角第五術,有三邊算三角術也.梅𤂝成曾按其祖環中黍尺,將 $\sin b$, $\sin c$, $\sin(s-b)$, $\sin(s-c)$ 繪於圖上,如圖 ABC 三角形,KJ 弧折半於 S.

$QC=\sin b, CG=\sin(s-b), KT=\sin(s-c), DK=\sin c.$

(補證) 先證△ₛQCG, TKL 爲相似.先引長 CG 遇圓界於 M, 連 MQ_1. 因 $CQ=QQ_1, CG=GM$. 則 △ₛQCG, Q_1CM 爲相似.又自 T 作 TL, 平行於 BJ, 平分 BK 於 L. 則△ₛTKL, JKB 爲相似.而在△ₛ Q_1CM, JKB, 有 $\angle Q_1CM=\angle BKJ$. 又∠ₛCQ_1M, KJV 同對 $2(s-b)$ 弧.

故 △ₛQCG, TKL 爲相似. 證訖.[6]

故梅瑴成謂
$$\frac{QC}{CG}=\frac{KT}{KL},$$

即
$$\frac{\sin b}{\sin(s-b)}=\frac{\sin(s-c)}{KL}.$$

又因
$$KL=\frac{BK}{2},$$

故
$$\frac{DK}{KL}=\frac{HF}{\frac{HI}{2}},$$

即
$$\frac{\sin c}{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\frac{\text{vers } A}{2}}$$

或
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

(6) 原書證法不完,另加補證較易明了.

(A)

汪萊,衡齋算學第一册 (1796),第四册 (1799),論弧三角形中「知不知條目」,「有無定限條目」,皆前人所未論者

董祐誠,斜弧三邊求角補術 (1821),以幾何法證:

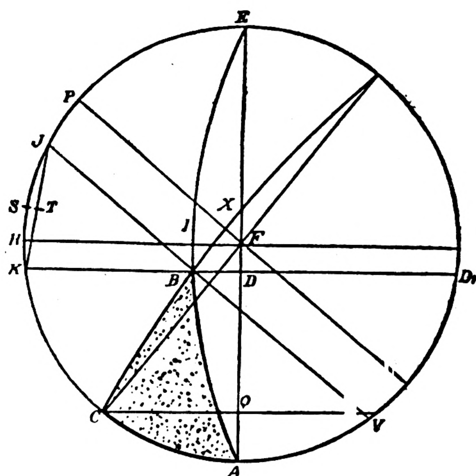
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}.$$

如圖 $s=ACS$ 弧, $s-b=\frac{KAV}{2}$弧, $s-c=KHS$弧.

又 $HI=\text{vers}\,A,\quad KD=\sin\ c.$

於 $\triangle BKJ$ 上,因 $\angle KJV=\angle(s-b)$, KJ線 $=2\sin(s-c)$

因 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$之關係,



(B)

故
$$\frac{\sin KBJ}{KJ}=\frac{\sin KJB}{KB},$$

而
$$\sin KBJ=\sin HFP=\sin AFC=\sin b.$$

得
$$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(s-b)}{KB};$$

又因
$$\frac{KD}{KB}=\frac{HF}{HI},$$

得
$$\frac{\sin C}{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b}}=\frac{1}{\frac{\text{vers }A}{2}},$$

而
$$\frac{\text{vers}\,A}{2}=\sin^2\frac{A}{2}.$$

故 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}.$$ 證訖.

董祐誠又補證「求對大邊之又一角」

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b.}}$ 公式如下:

如圖 $$\frac{\sin b}{2\sin(s-c)}=\frac{\sin(180^\circ-s)}{JB},$$

及 $$\frac{JN(=\sin a)}{JB}=\frac{1}{\frac{\text{vers}(180^\circ-c)}{2}},$$

則 $$\frac{\sin a\cdot\sin b}{\sin s\cdot\sin(s-c)}=\frac{1}{\frac{\text{vers}(180^\circ-c)}{2}},$$

卽 $$\cos\frac{c}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\cdot\sin b}}$$ 證訖.

張作楠(字雲樵,金華人)撰弧角設如三卷(1822)謂:

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c.}}$ 可由 $1:\sin b\cdot\sin c$ $=\text{vers}\,A:\text{vers}\,a-\text{vers}\,\overline{c-b}$,用代數法化得.

項名達,弧三角和較術(1843)論「斜弧三角」二十式,幷應用納氏比例式,以爲算例.

徐有壬,弧三角拾遺於納氏比例式,(正弦)半角之公式,(見薛鳳祚之三角算法),(餘弦)半角之公式

(見董祐誠之斜弧三邊求角補術)外,又設下之正弦,餘弦半弧之公式:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-A)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{b}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \sin\frac{c}{2}&=\sqrt{-\frac{\cos S\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-C)\cdot\cos(S-B)}{\sin B\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-C)}{\sin A\cdot\sin C}},\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(S-A)\cdot\cos(S-B)}{\sin A\cdot\sin B}},\end{aligned}\right\}$$

而 $$S=\frac{1}{2}(A+B+C).$$

外此則焦循祖述戴震之說,而安清翹,陳杰,顧觀光,陳澧,梅啓照,吳嘉善又好為平淺之論.陳杰,李善蘭,顧觀光雖幷有志證明納氏比例式,而設論幷多缺點.

10. 球面三角術二次輸入中國

華蘅芳從英傅蘭雅譯英海麻士(Hymers!)三角數理(1877),其卷九至十二論弧三角,謝洪賚從美潘愼文譯美羅密士八線備旨(1894印),其卷四論弧三角,同文館歐禮斐編弧三角闡微五册,幷為二次輸入

之球面三角術.

(四) 三角函數表之東來

11. 三角函數表輸入中國

元,郭守敬有三角函數表而不完全,且以乘方取度,所得不精,至明末耶穌會士始輸入三角函數表明,崇禎四年 (1631) 正月二十八日呈進割圓八線表六卷,及測量全義十卷,而

(1) 測圓八線小表

在測量全義卷三之內,爲正弦,切線,割線,及其餘線之函數表,小數四位,每十五分有數,如附表(1)

度	分	正 弦 (sin)	切 線 (tan)	割 線 (sec)
0°	0′	——	——	——
	15′	.0043	.0043	1.0000
	30′	.0087	.0087	1.0000
	45′	.0130	.0130	1.0001
1°	0′	.0174	.0174	1.0001
	15′	.0218	.0218	1.0002
	30′	.0261	.0262	1.0003
	45′	.0305	.0305	1.0005
2°	0′	.0349	.0349	1.0006
	15′	.0392	.0393	1.0007
	30′	.0436	.0437	1.0009
	45′	.0480	.0480	1.0011
3°	0′	.0523	.0524	1.0013
	15′	.0567	.0568	1.0016
	30′	.0610	.0612	1.0018
	45′	.0654	.0655	1.0021
4°	0′	.0697	.0699	1.0024
	15′	.0741	.0743	1.0027
	30′	.0784	.0787	1.0030
	45′	.0828	.0831	1.0034
5°	0′	.0871	.0875	1.0038

(1)

(2) 割圜八線表

爲半象限之三角函數表,小數五位,每分有數,秒以下以比例得之.其次序先正弦線,次正切線,次正割線,次餘弦,次餘切線,次餘割線,如附表(2).

0°	正　弦 (sin)	正切線 (tan)	正割線 (sec)	餘　弦 (cos)	餘切線 (cot)	餘割線 (csc)	
0′	.00000	.00000	1.00000	1.00000	0000.00000	0000.00000	60′
1′	.00029	.00029	1.00000	.99999	3437.74667	3437.74682	59′
2′	.00058	.00058	1.00000	.99999	1718.87319	1718.87348	58′
3′	.00087	.00087	1.00000	.99999	1145.91530	1145.91574	57′
4′	.00116	.00116	1.00000	.99999	859.43630	859.43689	56′
5′	.00145	.00145	1.00000	.99999	687.54887	687.54960	55′
6′	.00175	.00175	1.00000	.99999	572.95721	572.95809	54′
7′	.00204	.00204	1.00000	.99999	491.10600	491.10702	53′
8′	.00233	.00233	1.00000	.99999	429.71757	429.71873	52′
9′	.00262	.00262	1.00000	.99999	381.97099	381.97230	51′
10′	.00291	.00291	1.00000	.99999	343.77371	343.77516	50′
11′	.00320	.00320	1.00001	.99999	312.52137	312.52297	49′
12′	.00349	.00349	1.00001	.99999	286.47773	286.47948	48′
13′	.00378	.00378	1.00001	.99999	264.44080	264.44269	47′
14′	.00407	.00407	1.00001	.99999	245.55198	245.55402	46′
15′	.00436	.00436	1.00001	.99999	229.18166	229.18385	45′
16′	.00465	.00465	1.00001	.99999	214.85762	214.85995	44′
17′	.00494	.00494	1.00001	.99999	202.21875	202.22122	43′
18′	.00524	.00524	1.00001	.99999	190.98419	190.98680	42′
19′	.00553	.00553	1.00002	.99998	180.93220	180.93496	41′
20′	.00582	.00582	1.00002	.99998	171.88540	171.88831	40′
21′	.00611	.00611	1.00002	.99998	163.70019	163.70325	39′
22′	.00640	.00640	1.00002	.99998	156.25908	156.26228	38′
23′	.00669	.00669	1.00002	.99998	149.46502	149.46837	37′
24′	.00698	.00698	1.00002	.99998	143.23712	143.24061	36′
25′	.00727	.00727	1.00003	.99997	137.50745	137.51108	35′
26′	.00756	.00756	1.00003	.99997	133.21851	133.22229	34′
27′	.00785	.00785	1.00003	.99997	127.32134	127.32526	33′
28′	.00815	.00815	1.00003	.99997	122.77396	122.77803	32′
29′	.00844	.00844	1.00003	.99996	118.54018	118.54440	31′
30′	.00873	.00873	1.00003	.99996	114.58865	114.59301	30′
	(cos)	(cot)	(csc)	(sin)	(tan)	(sec)	89°

(2)

此外尙有

(3) 割圜八線立成長表:四卷徐光啓撰,崇禎曆書本.

(4) 割圜句股八線表,附代句股開方法一卷;湯若望撰,新法曆書本.

順治時薛鳳祚從西士穆尼閣受對數術.1653年有比例對數表之作.清梅文鼎勿菴曆算書目稱:「薛儀甫又有四線新比例,用四線(卽正弦,餘弦,切線,餘切線)同,惟度析百分,[從古率也].穆有天步眞原,薛有天學會通并依此立算」,所謂四線新比例,當卽

(5) 比例四線新表:一卷;薛鳳祚,穆尼閣同譯,曆學會通本

李儼所見曆學會通尙非全帙,惟據薛,穆三角算法所述,知此表小數六位,度以下析爲百分,每分有數.裘沖曼藏:

(6) 四線對數表一册,弦切四線,小數十位,明末

清初套印本.

此疑稍後於比例四線新表也.如附表(3).

度 分 秒	正 弦(sin)	餘 弦 (cos)	切 線 (tan)	餘 切 線(cot)		
0° 0′ 0″	0	10.0000000000	0		0″	60′
10″	5.6855748665	9.9999999995	5.6855748670	14.3144251330	50″	
20″	5.9866048617	9.9999999980	5.9866048637	14.0133951363	40″	
30″	6.1626961198	9.9999999954	6.1626961244	13.8373038756	30″	
40″	6.2876348554	9.9999999918	6.2876348636	13.7123651364	20″	
50″	6.3845448673	9.9999999872	6.3845448801	13.6154551199	10″	
1′ 0″	6.4637261198	9.9999999786	6.4637261293	13.5362738707	0″	59′
10″	6.5306728985	9.9999999750	6.5306729235	13.4693270765	50″	
20″	6.5886648429	9.9999999673	6.5886648756	13.4113351244	40″	
30″	6.6398173623	9.9999999568	6.6398174037	13.3601825963	30″	
40″	6.6855748502	9.9999999489	6.6855749013	13.3144250987	20″	
50″	6.7269675316	9.9999999382	6.7269675934	13.2730324066	10″	
2′ 0″	6.7647560882	9.9999999265	6.7947561617	13.2352438383	0″	58′
10″	6.7995181904	9.9999999137	6.7995182767	13.2004817233	50″	
20″	6.8317028692	9.9999998899	6.8317029693	13.1682970367	40″	
30″	6.8616660875	9.9999998851	6.8616662024	13.1383337976	30″	
40″	6.8896948059	9.9999998693	6.8896949366	13.1103050634	20″	
50″	6.9163207389	9.9999998525	6.9160238864	13.0838761136	10″	
3′ 0″	6.9408473166	9.9999998346	6.9408474820	13.0591525180	0″	57′
	(cos)	(sin)	(cot)	(tan)		

(3)

數理精蘊刻表較詳,其前則有李子金,年希堯,陳訏之作.

(7) 天弧象限表.

爲李子金於康熙癸亥(1683)所製,表九十七頁,祇設正餘弦二線,由0度至45度,度析百分,小數五位,每十分有數.如附表(4).

	正 弦 (sin)	餘 弦 (cos)	
0° 0	.00000	1.00000	90° 0′
10′	.00175	.99999	90′
20′	.00349	.99999	80′
30′	.00524	.99999	70′
40′	.00698	.99998	60′
50′	.00873	.99996	50′
60′	.01047	.99995	40′
70′	.01222	.99993	30′
80′	.01396	.99990	20′
90′	.01571	.99988	10′
1° 0′	.01745	.99985	89° 0′
10′	.01920	.99982	90′
20′	.02094	.99978	80′
30′	.02269	.99974	70′
40′	.02443	.99970	60′
50′	.02618	.99966	50′
60′	.02792	.99961	40′
70′	.02967	.99956	30′
80′	.03141	.99951	20′
90′	.03316	.99945	10′
2° 0′	.03490	.99939	88° 0′
	餘 弦 (cos)	正 弦 (sin)	

(4)

年希堯編有;

(8) 八線眞數表一卷,

(9) 八線假數表一卷,

其八線眞數表一卷,年希堯校,計分「正弦,餘弦眞數表」,「切線眞數表」,二種,康熙戊戌,(1718)自序.度析爲六十分,小數七位,每分有數.八線假數表一卷,年希堯校,計分「正弦,餘弦假數表」,「切線假數表」二種,康熙戊戌,(1718)自序.度析爲六十分,小數七位,每分有數.按數理精蘊康熙壬寅(1722)告成,翌年始刻行,見東華錄「雍正」三,東華續錄「乾隆」一四,年氏二表之成,蓋不出於數理精蘊也.又有

(10) 對數廣運一卷

相傳亦年希堯撰.此書於對數表之外,有正弦假數表,切線假數表,割線假數表,正弦眞數表,切線眞數表,割線眞數表,等數種.此項小表,小數并爲五位,其正弦假數表,卽正弦對數表,如附表(5).

正弦 (sin)		假數	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0′	−	6.46373	6.76476	6.94085	7.06579	7.16270	7.24188	7.30882	7.36682	7.41797
	10′	7.46373	7.50512	7.54291	7.57767	7.60985	7.63982	7.66784	7.69417	7.71900	7.74248
	20′	7.76475	7.78594	7.80615	7.82545	7.84393	7.86166	7.87870	7.89509	7.91088	7.92612
	30′	7.94084	7.95508	7.96887	7.98223	7.99520	8.00779	8.02002	8.03192	8.04350	8.05478
	40′	8.06578	8.07650	8.08696	8.09718	8.10717	8.11693	8.12647	8.13581	8.14495	8.15390
	50′	8.16268	8.17128	8.17971	8.18798	8.19610	8.20407	8.21189	8.21958	8.22713	8.23456
89°	0′	9.99993	4	4	4	4	4	5	5	5	5
	10′	9.99995	6	6	6	6	6	6	7	7	7
	20′	9.99997	7	7	7	8	8	8	8	8	8
	30′	9.99998	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	40′	9.99999									
	50′	9.99999									
1°	0′	8.24186	8.24903	8.25609	8.26304	8.26988	8.27661	8.28324	8.28977	8.29621	8.30255
	10′	8.30879	8.31495	8.32103	8.32702	8.33292	8.33875	8.34450	8.35018	8.35578	8.36132
	20′	8.36678	8.37217	8.37750	8.38276	8.38796	8.39310	8.39818	8.40320	8.40816	8.41307
	30′	8.41792	8.42272	8.42746	8.43216	8.43680	8.44139	8.44594	8.45044	8.45489	8.45930
	40′	8.46366	8.46799	8.47226	8.47650	8.48069	8.48485	8.48896	8.49304	8.49708	8.50108
	50′	8.50504	8.50897	8.51287	8.51673	8.52055	8.52434	8.52810	8.53183	8.53552	8.53919

(5)

又有袖珍本($13^{cm}+21^{cm}$)舊木刻本,硃墨套印

(11) 數表一卷

上半一至五十頁爲一至一萬之五位對數表,下半一至九十頁爲零度至四十五度之正弦,切線,假數表及正弦,切線,割線眞數表,疑爲年希堯同時刻物,其下半第一頁如附表(6).

陳訏於句股引蒙(1722)之內,附有

(12) 三角割圜八線小表

即測量全義之割圜八線小表,亦在數理精蘊之前.

清康熙癸巳(1713)始編律呂算法等書(見東華續錄「乾隆」一四),康熙甲午(1714)始擬以律呂,曆法,算法三書共爲一部,名曰律曆淵源,(見東華錄「康熙」九四).康熙壬寅(1722)六月數理精蘊,曆象考成皆告成,(見東華續錄「乾隆」一四).雍正癸卯(1723)冬十月律曆淵源一百卷刻成.分三部,一曰,曆象考成,一曰律呂正義,一曰數理精蘊.清世宗製序.(見東華錄「雍正」三).數理精蘊有;

0°	(sin)	(tan) 假數	(sin)	(tan)	(sec) 眞數
0′	——	——	0.00000	0.00000	1.00000
1′	6.46373	6.46373	0.00029	0.00029	1.00000
2′	6.76476	6.76476	0.00058	0.00058	1.00000
3′	6.94085	6.94085	0.00087	0.00087	1.00000
4′	7.06579	7.06579	0.00116	0.00116	1.00000
5′	7.16270	7.16270	0.00145	0.00145	1.00000
6′	7.24188	7.24188	0.00175	0.00175	1.00000
7′	7.30882	7.30882	0.00204	0.00204	1.00000
8′	7.36682	7.36682	0.00233	0.00233	1.00000
9′	7.41797	7.41797	0.00262	0.00262	1.00000
10′	7.46373	7.46373	0.00291	0.00291	1.00000
11′	7.50512	7.50512	0.00320	0.00320	1.00001
12′	7.54291	7.54291	0.00349	0.00349	1.00001
13′	7.57767	7.57767	0.00378	0.00378	1.00001
14′	7.60985	7.60985	0.00407	0.00407	1.00001
15′	7.63982	7.63982	0.00436	0.00436	1.00001
16′	7.66784	7.66784	0.00465	0.00465	1.00001
17′	7.69417	7.69417	0.00495	0.00495	1.00001
18′	7.71900	7.71900	0.00524	0.00524	1.00001
19′	7.74248	7.74248	0.00553	0.00553	1.00002
20′	7.76475	7.76476	0.00582	0.00582	1.00002
21′	7.78594	7.78595	0.00611	0.00611	1.00002
22′	7.80615	7.80615	0.00640	0.00640	1.00002
23′	7.82545	7.82546	0.00669	0.00669	1.00002
24′	7.84393	7.84394	0.00698	0.00698	1.00002
25′	7.86166	7.86167	0.00727	0.00727	1.00003
26′	7.87870	7.87871	0.00756	0.00756	1.00003
27′	7.89509	7.89510	0.00785	0.00785	1.00003
28′	7.91088	7.91089	0.00814	0.00815	1.00003
29′	7.92612	7.92613	0.00844	0.00844	1.00004
30′	7.94084	7.94086	0.00873	0.00873	1.00004

(13) 八線表上下卷,

(14) 八線對數表上下卷.

八線表上下卷,見數理精蘊卷一,卷二,由0°至45°,小數七位,度析爲六十分,分析爲六十秒,每十秒有數.幷補正割,餘割二線.如附表(7).

八線對數表上下卷,見數理精蘊卷七,卷八,由0°至45°,小數十位,度析爲六十分,分析爲六十秒,每十秒有數,幷補正割,餘割二線.如附表(8).

稍後則有:

(15) 八線表上下.

八線表上下,屈曾發撰,附數學精詳(1772)卷十一之後,僅記一度至九十度,小數七位之八線表.

安淸翹以一周爲百度,度爲十分,爲前此所未具.述此者有

(16) 一線表,

(17) 切線表,

二種.一線表,在學算存略卷三,「句股算略」之內,又在一線表用法(1817)卷一,「一線表」之內,安淸翹撰,數學五書本.小數五位,一周爲百度,半象限爲 $12\frac{1}{2}$ 度,度析爲十分,每分有數,如附表(9).

0° 度	正弦 sin	正切線 tan	正割線 sec	餘弦 cos	餘切線 cot	餘割線 csc	
0′ 0″	.0000000	.0000000	1.0000000	1.0000000	....	....	60′ 0″
10″	.0000485	.0000485	1.0000000	0.9999999	20618.5567020	20618.5576263	50″
20″	.0000970	.0000970	1.0000000	0.9999999	10309.2773196	10309.2773681	40″
30″	.0001454	.0001454	1.0000000	0.9999999	6877.5784044	6877.57[illegible]4772	30″
40″	.0001939	.0001939	1.0000000	0.9999999	5157.2970603	5157.2971573	20″
50″	.0002424	.0002424	1.0000000	0.9999999	4125.4121287	4125.4122499	10″
1′ 0″	.0002909	.0002909	1.0000000	0.9999999	3437.6070815	3437.6072269	59′ 0″
10″	.0003394	.0003394	1.0000000	0.9999999	2946.3756629	2946.3758326	50″
20″	.0003879	.0003879	1.0000001	0.9999999	2577.9837587	2577.9839526	40″
30″	.0004363	.0004363	1.0000001	0.9999998	2292.0004584	2292.0006766	30″
40″	.0004848	.0004848	1.0000001	0.9999998	2062.7058581	2062.7061005	20″
50″	.0005333	.0005333	1.0000002	0.9999998	1875.1168198	1875.1170865	10″
2′ 0″	.0005818	.0005818	1.0000002	0.9999998	1718.8033689	1718.8036598	58′ 0″
10″	.0006303	.0006303	1.0000002	0.9999998	1586.5457719	1586.5460871	50″
20″	.0006788	.0006788	1.0000003	0.9999997	1473.1875368	1473.1878762	40″
30″	.0007272	.0007272	1.0000003	0.9999997	1375.1371012	1375.1374649	30″
40″	.0007657	.0007757	1.0000003	0.9999997	1289.1577930	1289.1581809	20″
50″	.0008242	.0008242	1.0000004	0.9999996	1213.2972579	1213.2976700	10″
3′ 0″	.0008727	.0008727	1.0000004	0.9999996	1145.8686834	1145.8691197	57′ 0″
	cos	cot	csc	sin	tan	sec	

(7)

0°	度	正弦 (sin)	正切線 (tan)	正割線 (sec)	餘弦 (cos)	餘切線 (cot)	餘割線 (csc)		
0′	0″	………………	………………	………………	10.0000000000	………………	………………	60′	0″
	10″	5.6855748665	5.6855748670	10.0000000005	9.9999999995	14.3144251330	14.3144251335		50″
	20″	5.9866048617	5.9866048637	10.0000000020	9.9999999980	14.0133951363	14.0133951383		40″
	30″	6.1626961198	6.1626961244	10.0000000046	9.9999999954	13.8373038756	13.8873038802		30″
	40″	6.2876348554	6.2876548636	10.0000000082	9.9999999918	13.7123651364	13.7123651446		20″
	50″	6.3845448673	6.3845448801	10.0000000128	9.9999999872	13.6154551199	13.6154551327		10″
1′	0″	6.4637261109	6.4637261295	10.0000000184	9.9999999816	13.5362738707	13.5362738891	59′	0″
	10″	6.5306728985	6.5306729235	10.0000000250	9.9999999750	13.4693270765	13.4693271015		50″
	20″	6.5886648429	6.5886648756	10.0000000327	9.9999999673	13.4113351244	13.4123351571		40″
	30″	6.6398173623	6.6398174037	10.0000000414	9.9999999586	13.3601825963	13.3601826377		30″
	40″	6.6855748502	6.6855749013	10.0000000511	9.9999999489	13.3144250987	13.3144251498		20″
	50″	6.7269675316	6.7269675934	10.0000000618	9.9999999382	13.2730324066	13.2730324684		10″
2′	0″	6.7647560882	6.7647561617	10.0000000735	9.9999999265	13.2352438383	13.2352439118	58′	0″
	10″	6.7995181904	6.7995182767	10.0000000863	9.9999999137	13.2004817233	13.2004818096		50″
	20″	6.8317028692	6.8317029693	10.0000001001	9.9999998999	13.1682970307	13.1682971308		40″
	30″	6.8616660875	6.8616662024	10.0000001149	9.9999998851	13.1383337976	13.1383339125		30″
	40″	6.8896948059	6.8896949366	10.0000001307	9.9999998693	13.1103050634	13.1103051941		20″
	50″	6.9160237389	6.9160238864	10.0000001475	9.9999998525	13.0839761136	13.0839762611		10″
3′	0″	6.9408473166	6.9408474820	10.0000001654	9.9999998346	13.0591525180	13.0591526834	57′	0″

(8)

0G	0′	00000	3G	0′	18738	6G	0′	36812	9G	0′	53583
	1′	00628		1′	19355		1′	37396		1′	54112
	2′	01256		2′	19971		2′	37978		2′	54639
	3′	01884		3′	20586		3′	38558		3′	55165
	4′	02513		4′	21201		4′	39137		4′	55688
	5′	03141		5′	21814		5′	39715		5′	56208
	6′	03769		6′	22427		6′	40291		6′	56727
	7′	04397		7′	23039		7′	40865		7′	57243
	8′	05024		8′	23649		8′	41438		8′	57757
	9′	05651		9′	24260		9′	42009		9′	58269
1G	0′	06279	4G	0′	24869	7G	0′	42578	10G	0′	58778
	1′	06906		1′	25477		1′	43146		1′	59286
	2′	07532		2′	26084		2′	43712		2′	59790
	3′	08159		3′	26690		3′	44276		3′	60293
	4′	08785		4′	27295		4′	44838		4′	60793
	5′	09411		5′	27899		5′	45399		5′	61291
	6′	10036		6′	28502		6′	45958		6′	61786
	7′	10661		7′	29103		7′	46515		7′	62279
	8′	11285		8′	29704		8′	47070		8′	62769
	9′	11908		9′	30303		9′	47624		9′	63257
2G	0′	12533	5G	0′	30902	8G	0′	48175	11G	0′	63742
	1′	13156		1′	31498		1′	48725		1′	64225
	2′	13779		2′	32094		2′	49273		2′	64706
	3′	14401		3′	32689		3′	49818		3′	65183
	4′	15022		4′	33282		4′	50362		4′	65659
	5′	15643		5′	33874		5′	50904		5′	66131
	6′	16264		6′	34464		6′	51444		6′	66601
	7′	16883		7′	35053		7′	51982		7′	67069
	8′	17502		8′	35641		8′	52517		8′	67533
	9′	18121		9′	36227		9′	53051		9′	67995
									12G	0′	68455
										1	68911
										2′	69365
										3′	69816
										4′	70265
										5	70710

切線表在學算存略卷三,「句股算略」之內,安清翘撰,數學五書本,小數五位,一周為百度,半象限為$12\frac{1}{2}$度,度析為十分,每分有數,如附表(10).

0G	0′	00000	3G	0′	19075	6G	0′	39592	9G	0′	63461
	1′	00628		1′	19728		1′	40321		1′	64346
	2′	01257		2′	20381		2′	41053		2′	65238
	3′	01885		3′	21036		3′	41789		3′	66138
	4′	02513		4′	21694		4′	42592		4′	67045
	5′	03142		5′	22352		5′	43273		5′	67959
	6′	03771		6′	23013		6′	44021		6′	68882
	7′	04401		7′	23675		7′	44774		7′	69812
	8′	05030		8′	24340		8′	45530		8′	70751
	9′	05660		9′	25006		9′	46291		9′	71698
1G	0′	06291	4G	0′	25675	7G	0′	47056	10G	0′	72654
	1′	06922		1′	26346		1′	47826		1′	73618
	2′	07554		2′	27019		2′	48600		2′	74591
	3′	08186		3′	27694		3′	49379		3′	75574
	4′	08819		4′	28372		4′	50163		4′	76566
	5′	09453		5′	29052		5′	50952		5′	77567
	6′	10087		6′	29735		6′	51746		6′	78579
	7′	10722		7′	30420		7′	52545		7′	79600
	8′	11538		8′	31108		8′	53349		8′	80631
	9′	11994		9′	31798		9′	54160		9′	81873
2G	0′	12632	5G	0′	32492	8G	0′	54974	11G	0′	82727
	1′	13271		1′	33187		1′	55796		1′	83796
	2′	13911		2′	33887		2′	56623		2′	84866
	3′	14552		3′	34588		3′	57456		3′	85953
	4′	15194		4′	35294		4′	58294		4′	87051
	5′	15838		5′	36002		5′	59139		5′	88161
	6′	16483		6′	36713		6′	59991		6′	89285
	7′	17129		7′	37428		7′	60848		7′	90421
	8′	17776		8′	38146		8′	61713		8′	91568
	9′	18425		9′	38867		9′	62584		9′	92730
									12G	0′	93906
										1′	95095
										2′	96299
										3′	97517
										4′	98751
										5′	100000

(10)

以上二表,事屬草創,故與 *A. Granet–Tablas Taché-*

ométriques, H. Morin, Editeur, Paris 表相校,末位尙有出入.

嘉道之際,金華人張作楠輯翠微山房算學,其第三,第四種爲

(18) 八線類編三卷,

(19) 八線對數類編二卷,

幷題張作楠輯,蓋本於數理精蘊八線類編小數七位,八線對數類編小數八位,每分有數,弦,切,割三線各爲一組,與年希堯二表相類.其後數經繙刻,流傳頗廣.

梅啓照於學彊恕齋筆算(1870)卷十之內,附有

(20) 三角割圜八線小表,

與陳訏三角割圜八線小表同出於測量全義.

稍後則黃宗憲,校正張作楠原輯之.

(21) 八線對數類編,

丁取忠爲刻入白芙堂叢書,前有同治十三年(1874)丁取忠識語.

同時賈步緯輩復譯成下列各表,是爲三角函數表第二次輸入中國,計得:

(22) 弦切對數表,

(23) 八線簡表一卷,

(24) 八線對數簡表一卷.

其弦切對數表,據江南製造局記卷二,題作:「繙譯弦切對數表八卷八册,賈步緯繙譯,火榮業校對」書列於八線簡表之前.其八線簡表一卷,八線對數簡表一卷,共題賈步緯校,與張作楠類編相同,惟置各線於一葉,與張書略異.據江南製造局記卷二,則八線簡表於同治十三年(1874)出版,而陳維祺所輯中西算學大成(1889)第九九卷,第一〇〇卷之

(25) 八線簡表,

(26) 八線對數簡表,

幷出於賈書.以上所述,爲各表之大要,其製表之義,則於次節述之.

12. 三角函數表之計算

與三角函數表及三角術同時輸入中國者,有大測二卷(1631),其表原篇第三,表法篇第四,表用篇第五,列舉「六宗率」,「三要法」,「二簡法」;及用表之法.法先求圓內容6邊,4邊,10邊,3邊,5邊,15邊之長,名曰「六宗率」.既得此六種形之一邊,各半之,即得六種弧之各正弦,由是可求 $\cos A$; $\sin 2A$, $\cos 2A$, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$

是爲「三要法」.又由 $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$ 按法求 $\sin(A+B)$,$\sin(A-B)$;由 $\sin(60^\circ+A)$,$\sin(60^\circ-A)$ 求 $\sin A$,是爲「二簡法」.由此得正弦一百二十個其最小者 $45'$.其表用篇第五,稱相連兩分之差,爲「差率」,此差以當 $60'$.其餘按此比例求得,是爲最初輸入三角函數表之計算方法.

楊作枚又於「六宗率」外補算得圓內容 9 邊之長,見所著解割圓之根一卷,勿菴曆算全書本(1723 刻)同年所刻數理精蘊卷十六(1723 刻)於 9 邊外幷算得圓內容 7 邊之長,與舊有之「六宗率」相參伍,可得正弦三百六十個,其最小者 $15'$,又有求 $\sin\frac{A}{3}$ 法可得 $5'$,其 $5'$ 以下,以比例得之,已較前加密矣.其後汪萊,安清翹,幷有求 $\sin\frac{A}{5}$ 法,則可算得 $1'$ 矣.

十七世紀末年(1700)法人杜德美(*Pierre Jartoux*, 1670–1720.11.30)來華,時國中適有測地之舉,遂於役其間,又嘗與來布尼玆(*Gottfried Wilhelm Leibniz*, 1646–1716)通訊.其後梅瑴成於梅氏叢書輯要卷六十一,赤水遺珍中,傳杜德美法,卽「求弦矢捷法」.

$$\sin a=a-\frac{a^3}{3!r^2}+\frac{a^5}{5!r^4}-\frac{a^7}{7!r^6}+\frac{a^9}{9!r^8}-\cdots$$

$$\text{vers}\,\alpha=\frac{a^2}{2!r}-\frac{a^4}{4!r^3}+\frac{a^6}{6!r^5}-\frac{a^8}{8!r^7}+\frac{a^{10}}{10!r^9}-\cdots$$

杜德美法曾引起中算家之興味,董祐誠割圜連比例圖解三卷(1819)證得下列四式:

$$2\sin m\alpha=c_m=mc-\frac{m(m^2-1)c^3}{(4)3!r^2}+\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)c^5}{(4^2)5!r^4}$$

$$-\frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)c^7}{(4^3)7!r^6}+\cdots$$

$$\text{vers}\,m\alpha=m^2(\text{vers}\,\alpha)-\frac{m^2(4m^2-4)2(\text{vers}\,\alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\cdot r}$$

$$+\frac{m^2(4m^2-4)(4m^2-16)2^2(\text{vers}\,\alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot r^2}-\cdots$$

$$2\sin\frac{\alpha}{m}=c_{\frac{1}{m}}=\frac{c}{m}+\frac{(m^2-1)c^3}{(4)3!m\cdot^3r^2}+\frac{(m^2-1((9m^2-1)c^5}{(4^2)5!m^5\cdot r^4}$$

$$+\frac{(m^2-1)(9m^2-1)(25m^2-1)c^7}{(4^3)7!m^7\cdot r^6}+\cdots$$

$$\text{vers}\frac{\alpha}{m}=\frac{(\text{vers}\,\alpha)}{m^2}+\frac{(4m^2-4)2(\text{vers}\,\alpha)^2}{4\cdot3\cdot4\,m^4\cdot r^2}$$

$$+\frac{(4m^2-4)(4\cdot4m^2-4)2^2(\text{vers}\,\alpha)^3}{4^2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot m^6\cdot r^2}+\cdots$$

而 $c=2\sin\alpha$.

項名達遺稿象數一原七卷,證得下列二式:

$$c_{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}c_m-\frac{n(n^2-m^2)(c_m)^3}{(4)3!m^3\cdot r^2}$$

$$+\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(c_m)^5}{(4^2)5!\,m^5\cdot r^4}$$

$$-\frac{n(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 3^3)(n^2-m^2\cdot 5^2)(c_m)^7}{(4^3)7!\,m^7\cdot r^6}+\cdots$$

$$\operatorname{vers}\frac{n}{m}\alpha=\frac{n^2(2\operatorname{vers} m\,\alpha)}{2!\,m^2}-\frac{n^2(n^2-m^2)(2\operatorname{vers} m\,\alpha)^2}{4!\,m^4\cdot r}$$

$$+\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(2\operatorname{vers} m\,\alpha)^3}{6!\,m^6\cdot r^2}$$

$$-\frac{n^2(n^2-m^2)(n^2-m^2\cdot 2^2)(n^2-m^2\cdot 3^2)(2\operatorname{vers} m\alpha)^5}{8!\,m^8\cdot r^3}+\cdots$$

而 $c_m=2\sin m\,\alpha$.

項名達又以各三角函數,化爲正弦或餘弦之函數,如:

$$\tan\alpha=\sin\alpha+\frac{\sin^3\alpha}{2r^2}+\frac{3\cdot\sin^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\sin^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\sin^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\,r^8}+\cdots$$

....

$$\cot\alpha=\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha}{2\cdot r^2}+\frac{3\cdot\cos^5\alpha}{2\cdot 4r^4}+\frac{3\cdot 5\cdot\cos^7\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot r^6}$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cos^9\alpha}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot r^8}+\cdots$$

....

戴煦外切密率四卷(1852),則有「本弧求切線」,及「本弧求割線」等式:

$$\tan a = a + \frac{2a^3}{3!\,r^2} + \frac{16a^5}{5!\,r^4} + \frac{272a^7}{7!\,r^6} + \frac{7936a^9}{9!\,r^8} + \cdots$$

$$\sec a - r = \frac{a^2}{2!\,r} + \frac{5\,a^4}{4!\,r^3} + \frac{61a^6}{6!\,r^5} + \frac{1385a^8}{8!\,r^7} + \frac{50521a^{10}}{10!\,r^9} + \cdots$$

戴煦又證得求四十五度以內諸正割對數之公式,卽

$$\log_{10}\sec a = \mu\left\{\frac{a^2}{2!} + \frac{2a^4}{4!} + \frac{16a^6}{6!} + \frac{272a^8}{8!} + \frac{7936a^{10}}{10!} + \cdots\right\}$$

其分母爲「本弧求割線」之分母,其分子爲「本弧求切線」之分子.三角對數表,雖早經輸入中國,至是乃由戴煦考得其公式焉.後此李善蘭,徐有壬,顧觀光雖曾深考三角函數之級數式,終未嘗以之入算,卽徐有壬之造各表簡法所稱之造正弦全表,造正矢全表,造正切全表,造八線對數全表,幷徒具其法而已.前於此者,則羅士琳跋割圜密率捷法(1839),曾據術推演得

$$\log\tan\ 1^\circ 13' 20'' = 8.3290934249,$$

$$\log\sin\ 6^\circ 41' 10'' = 9.0660648312,$$

$$\log \sin 12° 50' 0'' = 9.3465793117,$$

$$\log \tan 16° 32' 10'' = 9.4726090000,$$

$$\log \tan 42° 32' 40'' = 9.9627287560.$$

以證八線對數原表之譌.(7)

(7) 見割圜密率捷法,道光己亥(1839)羅士琳後跋.及續疇人傳,道光二十年(1840)阮元序.